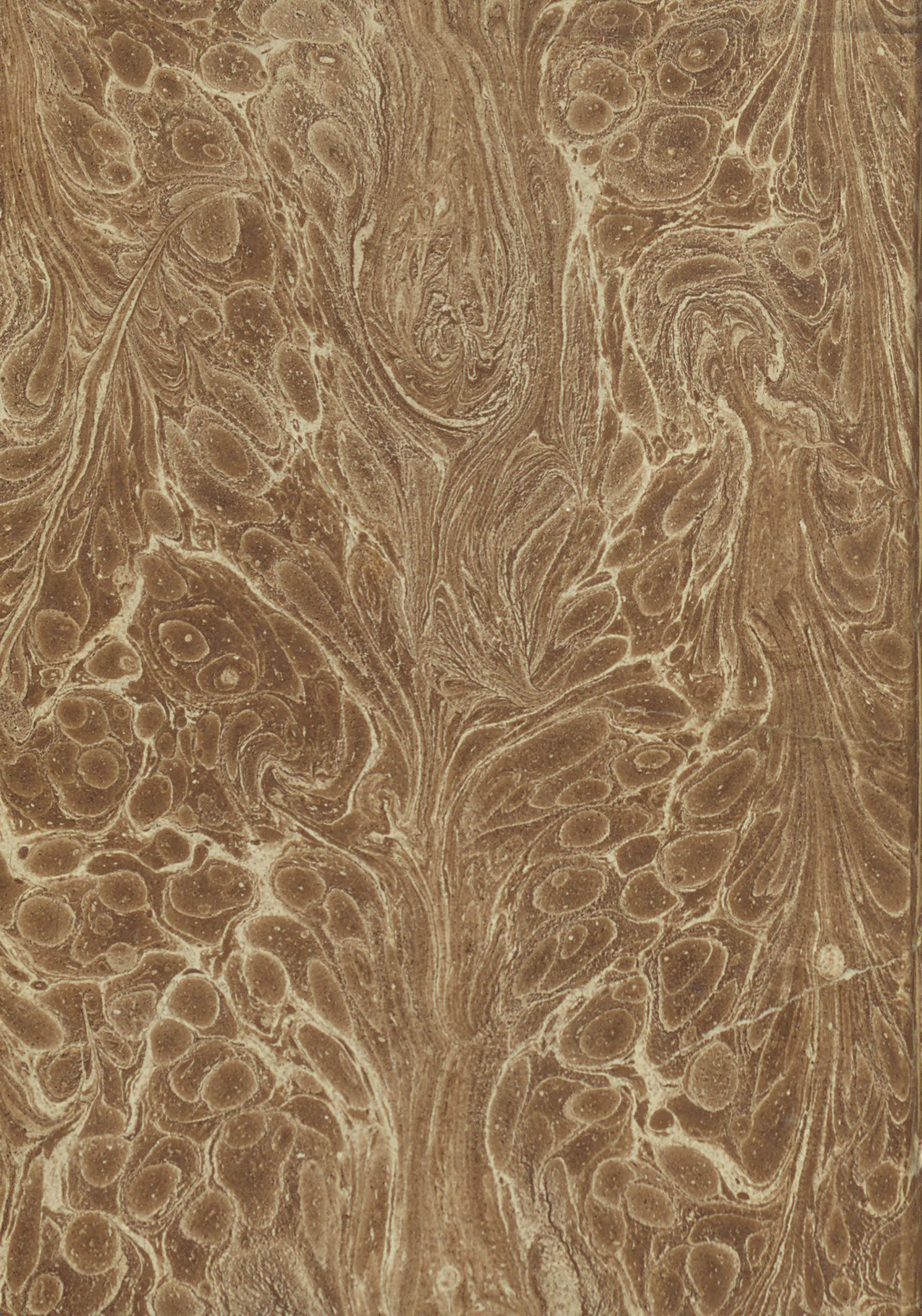
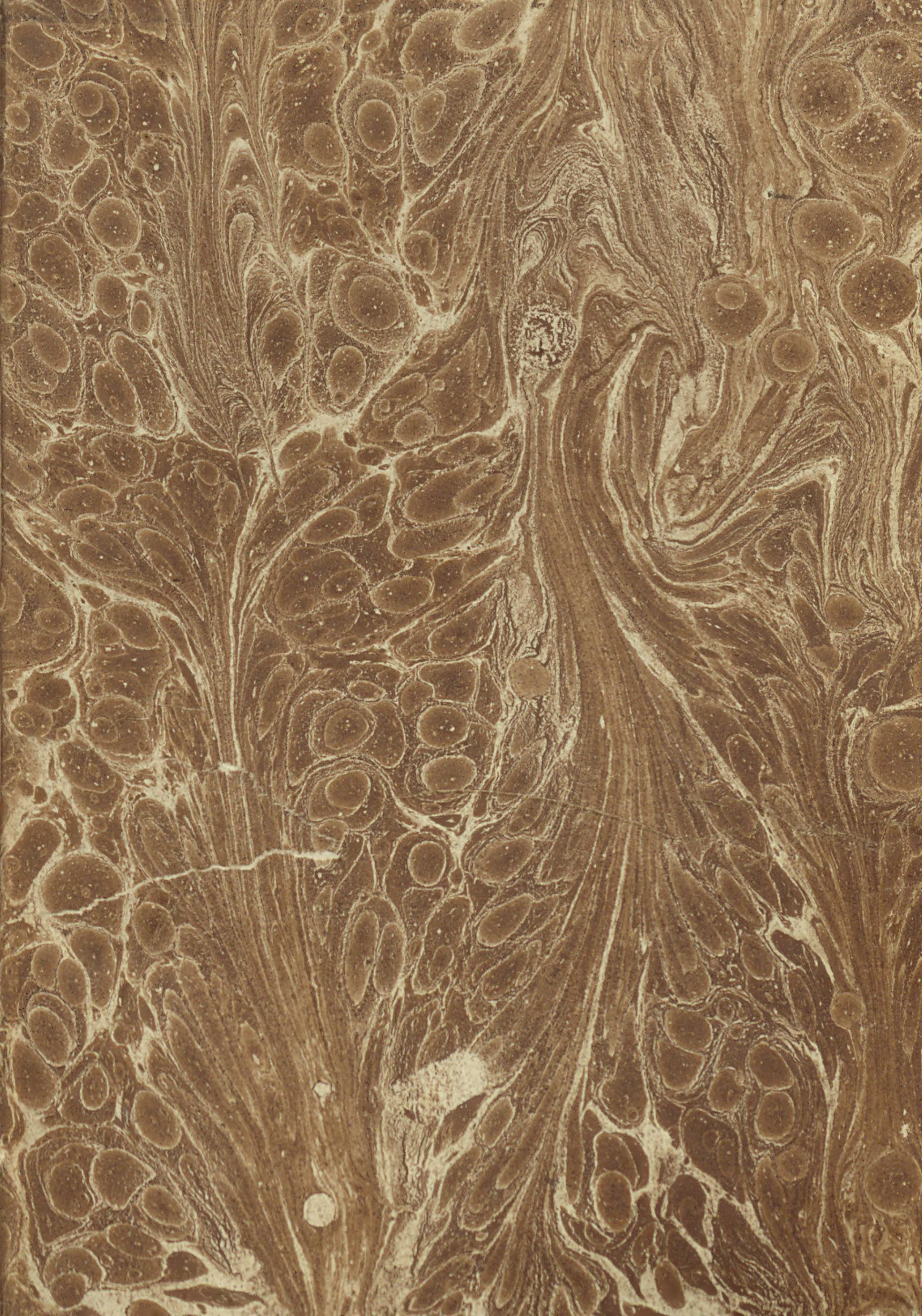






TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REYNO,

POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,

Catedrático que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario, encargado del curso de Geodesia por la Academia de S. Fernando, Socio Académico de la de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, y en la actualidad Oficial mayor del Archivo de la Secretaría de la Gobernacion de la Península, y Diputado en las presentes Córtes por la provincia de Granada.

SEGUNDA EDICION CORREGIDA.

TOMO I. PARTE PRIMERA,

Que contiene la Aritmética y Álgebra.



MALLORCA.

IMPRENTA DE FELIPE GUASP.

AÑO DE 1813.

PRÓLOGO.

En *la introduccion de mi* Memoria sobre la curvatura de las líneas *manifesté las dificultades que habia en el dia para exponer en una obra los principios elementales de las Matemáticas, y el plan baxo que me proponia escribir la que ahora presento al público. Estas dificultades provienen de dos causas*: 1.ª *del estado de adelantamiento en que se hallan actualmente las ciencias*; y 2.ª *de que en una obra elemental no basta, como en otra qualquiera, decir verdades, sino que es indispensable decirlas de un modo que las pueda entender aun el de menos talento*; y *debo confesar que á no ser por las sábias y oportunas reflexîones que me hacia continuamente en mi clase*, y *fuera de ella, el Brigadier de Caballería D. Andres Lopez de Sagastizabal* (1), *digno Director que fué del Seminario de Nobles de Madrid, en que tube el honor de regentar una de las Cátedras de Matemáticas* (2), *jamas hubiera emprendido una obra de esta especie. Más este instruido militar con aquella franqueza, tino* y *cortesanía que le era propia, me fué conduciendo de uno en otro tratado, manifestándome su opinion sobre cada uno de ellos*, y *en conseqüencia emprendí mi trabajo*; *de modo que al concluirse el curso del año de* 1807, *me hallé con el manuscrito de la parte elemental de las materias que pueden explicarse*

---

(1) Murió en Cádiz, siendo Mariscal de campo, y hallándose electo Presidente de la Audiencia de Guadalaxara.

(2) La otra la desempeñaba con mucho tino y acierto D. Agustin de Sojo, que hoy se halla de primer profesor en la Academia de Guardias Marinas de la isla de Leon; y ademas fué el primero que se ofreció á explicar gratuitamente en la Academia militar de dicha isla, y que por los importantes servicios que ha hecho en este interesante establecimiento, se debe considerar entre el número de sus dignos fundadores.

en los dos años que se destinan en las Cátedras del Seminario para la enseñanza de estas ciencias.

Estos elementos tienen una circunstancia sobre que me parece importante fixar la atencion del público. Los Metafísicos suelen decir, y con algun fundamento, que los Matemáticos son medio ideólogos; *porque parten de ciertas ideas que suponen ya en el principiante, y no se paran á hacérselas adquirir; y los Matemáticos dicen con certidumbre que* gran parte de las qüestiones metafísicas tienen un objeto aéreo, y que no son mas que el resultado de los sueños y delirios de sus imaginaciones acoloradas. *Y como lo que se debe procurar es reunir lo bueno que digan unos y otros, he antepuesto á mis elementos una introduccion, en que partiendo solo del conocimiento de que* tenemos sentidos, *doy á conocer todas las ideas de que necesito hacer uso, y expongo la clasificacion de estas ciencias. Yo conozco que de esta reunion de la Metafísica con las Matemáticas han de resultar grandes ventajas á los progresos de todas las ciencias; y por lo mismo no puedo menos de manifestar que esta idea está puesta en práctica con mucha utilidad de la Nacion por mi Catedrático D. Antonio Varas* (1), *con lo qual inspira á sus discípulos un amor grande á las ciencias.*

---

(3) Como en este respetable Matemático compiten la ciencia y la modestia, me ha pedido varias veces que no le cite en mis escritos; pues únicamente ha tratado de ser útil á los hombres, sin intentar obligarlos jamas á que se lo agradezcan. Más si he faltado á su precepto ha sido porque haria una injuria á la Nacion, sino diese á conocer que es uno de los que mas han contribuido al adelantamiento de las ciencias en general, y de las Matemáticas en particular; y por otra parte no cumpliria con mi deber sino diese este ligero testimonio de reconocimiento hácia una persona que, no contentándose con haberme inspirado un grande amor al estudio, quiso tambien delinearme el rumbo que debia seguir para poder ser útil en algun tiempo á mi Patria, que es la única honra á que aspiro.

Por lo demas solo tengo que advertir que en la exposicion de la doctrina no he seguido ningun sistema ni partido, que solo he tenido en consideracion al principiante, que he procurado suministrarle todos los auxîlios posibles, y que la mayor parte de los tratados los he expuesto con el órden con que menos dificultades ha costado á mis discípulos.

Esta obra en que se exponen todas las nuevas teorías descubiertas hasta el dia, se escribió en virtud de órden del Gobierno, paraque sirviese de texto en todas las casas de educacion de la Nacion Española, *y fue aprobada por el primitivo Consejo de Regencia* paraque pudiese servir de texto en las Universidades y demas estudios, tanto de la España ultramarina como de la Europea; y *á pesar de que por no haberse acabado aun de imprimir, no he hecho ninguna gestion al Gobierno paraque lleve á efecto esta determinacion, tengo la gran satisfaccion de que voluntariamente la han adoptado en varios establecimientos, y de que se ha concluido la edicion de este tomo de Aritmética y Álgebra antes de acabarse de imprimir la primera parte del* 2.° *tomo.*

Más como no todos estan en disposicion de juzgar del mérito de una obra elemental, en que es necesario conciliar no solo sus partes entre sí, sino tambien la dependencia que tiene de las demas ciencias y aplicaciones que de ellas se hacen á los usos de la sociedad, ruego al lector que antes de decidirse á ponerle ningun defecto, considere bien lo que digo en la introduccion de mi Memoria sobre la curvatura de las líneas, y *estudie seria y profundamente las obras maestras de la ciencia y de sus inmensas é importantísimas aplicaciones; pues de lo contrario se expone á reputar por defectos hasta aquello mismo en que consiste su mayor mérito.*

INDICE

de las materias contenidas en este tomo.

INTRODUCCION

En que se dan unos principios de Metafísica suficientes para entrar con utilidad en el estudio de las Matemáticas.

ARITMÉTICA.

PRINCIPIOS DE ÁLGEBRA.

ERRATA.

En la página jv del prólogo, línea 12, donde dice acoloradas, léase *acaloradas*.

ALFABETO GRIEGO.

Nombre.	Figura.	Valor.
1 Alfa	Α, α	*a*
2 Beta	Β, ϐ, β	*b*
3 Gamma	Γ, γ, ɼ	*g*
4 Delta	Δ, δ	*d*
5 Epsilon	Ε, ε	*e* breve
6 Dseta	Ζ, ζ, ζ	*ds*
7 Eta	Η, η	*e* larga
8 Tzeta	Θ, θ, ϑ	*tz*
9 Iota	Ι, ι	*i*
10 Kapa	Κ, κ	*k*
11 Lambda	Λ, λ	*l*
12 Mu	Μ, μ	*m*
13 Nu	Ν, ν	*n*
14 Xî	Ξ, ξ	*x*, *cs*
15 Omícron	Ο, ο	*o* breve
16 Pi	Π, π, ϖ	*p*
17 Rho	Ρ, ϱ,	*r*
18 Sigma	Σ, ϲ, σ	*s*
19 Tau	Τ, τ	*t*
20 Upsilon	Υ, υ	*u*
21 Fi	Φ, φ	*f*
22 Xi	Χ, χ	*x*
23 Psi	Ψ, ψ	*ps*
24 Omega	Ω, ω	*o* larga

FE DE ERRATAS.

Pág.	Lín.	Dice.	Debe decir.
vj	cabeza	INSTRUCCION	INTRODUCCION.
xv	29	tradados	tratados.
xxij	11	no les	no le
12	21	devide	divide
ib.	38	las pesas y medidas	los pesos y medidas.
19	23	de las dos columnas	de las columnas.
75	27	disminiuir	disminuir.
205	1	exponent es	exponentes.
210	1	el último radical ha de ser de 4.° grado.	
274	34	bórrese el paréntesis.	
346	21	$\frac{p}{a^{qx}}$	$\frac{p}{a^q}x$
ib.	34	$a^{x(z-u)}$	$a^{x(z-n)}$

INTRODUCCION.

Desde nuestra primera edad se nos hace conocer que tenemos cinco sentidos, y por lo mismo partiremos de este principio para establecer quanto necesitamos.

En primer lugar observaremos que damos el nombre de *cuerpo* á todo lo que es capaz de hacer impresion en nuestros sentidos. Las impresiones que los cuerpos hacen en nosotros se llaman *sensaciones*. Nuestras sensaciones, consideradas como representando los objetos, se llaman *ideas*; y la facultad por medio de la qual podemos retener aquellas sensaciones, quando los objetos no estan presentes, se llama *memoria*. Si el objeto ó cuerpo que causa en nosotros la sensacion es simple (*), la idea se llama *simple*; y si compuesto, la idea se llama *compuesta*. Ademas la idea puede ser *singular* y *universal ó abstracta*; es singular ó individual quando solamente conviene á un individuo, y es abstracta ó universal si conviene á muchos; de manera que para formar una idea abstracta ó universal, no hay mas que advertir aquello que es comun á muchos objetos, y prescindir de lo demas en que se diferencian. Por exemplo: saliendo al campo, se advierte que hay perales, manzanos, olmos, &c., y que todos estos objetos convienen en tener raices, tronco, ramas, hojas, &c., y por convenir todos en esto les damos una denominacion que á todos los comprende, que es *árbol*: con lo qual hemos formado una idea abstracta, que al mismo tiempo es compuesta, porque en la idea de árbol entran todas estas: raiz, tronco, ramas, &c.

Las ideas abstractas no exîsten sino en nuestro entendimiento; pues no puede haber un árbol sin que sea ó manzano, ó peral, ó &c. Al mirar la nieve, el papel, &c. advertimos que tienen de comun el color *blanco*; y si prescindimos de que este color se halla

(*) *Se dice que una cosa es simple quando para darla á conocer no hay otro medio que presentarla al sentido á que pertenece: v. g. la blancura, picante &c. que se han de presentar á la vista, gusto &c.*

en la nieve, papel, &c. nos formaremos la idea de la *blancura* que es una idea abstracta; pero simple, pues que únicamente representa una cosa sola.

La operacion por cuyo medio concebimos la blancura como separada de la nieve, papel, &c. en que se halla, se llama *abstraccion*; de manera que abstraccion *es una operacion del alma, por medio de la qual concebimos como separadas, cosas que realmente no lo estan.*

Quando se nos presentan muchos objetos á un mismo tiempo, nuestra alma para hacerse cargo de ellos, los va considerando cada uno separadamente, y esto lo hace por medio de la *atencion*; de manera que atencion *es una operacion del alma, por medio de la qual de muchos objetos que se nos presentan, elegimos uno para hacernos cargo de él, y executando lo mismo con los demas venimos en conocimiento de todos ellos.*

Como la mayor parte de los objetos que se nos presentan son compuestos, no basta el que por medio de la atencion elijamos uno para considerarle separadamente, sino que necesitamos descomponerle en sus partes, para ver qué relacion tienen entre sí y con el todo que forman, y esto se hace por medio de la *análisis*; de manera que análisis *es una operacion del alma, por medio de la qual descomponemos un todo en las partes de que consta, para ver qué relacion tienen entre sí y con el mismo todo, y volverlas otra vez á juntar paraque compongan el mismo todo.*

Estas dos operaciones, á saber, atencion y análisis, las exerceríamos, si, por exemplo, tubiésemos que hacernos cargo de los muebles que habia en una sala; entonces por medio de la atencion elegiríamos uno de ellos tal como un *relox*, para hacernos cargo de él; y como esta máquina se compone de muchas piezas, por medio de la análisis la descompondríamos en las partes de que constaba, para ver qué relacion tenian entre sí y con el total de la máquina: y luego reuniríamos todas estas partes para volver á formar el relox; haciendo lo mismo con todos los demas objetos, podríamos dar razon individual de los muebles que habia en dicha sala.

Segun hayamos analizado mas ó menos los objetos, así serán mas ó menos exâctas nuestras ideas, y con relacion á esto hacen los Lógicos varias divisiones de ellas; pero nosotros con un exemplo manifestaremos los grados de análisis que se pueden hacer. Su-

pongamos que de muchos sujetos que han estado en una casa, el uno de ellos solamente se acuerda de la calle en que está dicha casa: este habrá analizado muy poco, y la idea que tiene de la casa en que estubo se llama *obscura*; otro que no solamente se acordase de que la casa estaba en tal calle, sino que solamente dudase entre dos ó tres casas, habrá analizado mas, y la idea que de la casa tiene la podremos llamar *confusa*; otro que no solamente supiese esto, sino que entrando en la calle se iba derechamente á la casa sin preguntar á nadie, este habrá analizado mas, y la idea que tiene de la casa la llamaremos *clara*; y otro que no solamente se entrase en la casa, sino que estando lejos de ella era capaz de dar las señas á otro, paraque sin preguntar á nadie se dirija á dicha casa, este ya habrá analizado mas, y la idea que tenga de la casa la podremos llamar *distinta ó exâcta*. De manera que siempre que nosotros seamos capaces de dar á conocer á otros aquello mismo que sabemos, entonces habremos analizado lo suficiente, y esto es lo que debemos procurar en todas las ideas que adquiramos.

Si despues de haber exâminado dos reloxes, por exemplo, prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á ambos, en este momento se dice que los *comparamos*; de manera que comparacion *es una operacion del alma, por medio de la qual prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á dos objetos*. De esta comparacion resultará que el uno será mayor, mejor, &c. que el otro; y este grado de mayoría, mejoría, &c. que el uno lleva al otro, se llama *relacion*; de manera que relacion *no es mas que el resultado de la comparacion de dos objetos*. La facultad por medio de la qual podemos comparar una cosa con otra se llama *razon*.

Quando al comparar dos ideas hallamos que la una conviene ó no conviene á la otra, é interiormente nos convencemos de ello, la operacion por que lo hacemos se llama *juicio*; de manera que juicio *es una operacion del alma, por medio de la qual afirmamos ó negamos una cosa de otra*. Así, quando al comparar la idea que tenemos de la nieve con la de la blancura, advertimos que la blancura conviene á la nieve, é interiormente nos convencemos de que *la nieve es blanca*, entonces formamos lo que se llama *juicio*.

Si este juicio lo expresamos por palabras se llama *proposicion*; de manera que proposicion *no es mas que un juicio expresado por palabras*. Así, quando yo á otro le diga *la nieve es blanca*, esta es

una proposicion. La proposicion consta de tres partes: de *sujeto*, *cópula* y *predicado* (*); en la anterior, la *nieve* es el sujeto, *es* la cópula, y *blanca* el predicado, que es lo que se afirma ó niega en el sujeto.

Quando por la comparacion de dos ideas no podemos averiguar si convienen ó no, y necesitamos para esto compararlas con otra ú otras, entonces usamos del *raciocinio*; y quando, para hacer comprender á otro este raciocinio lo expresamos con proposiciones, se llama *razonamiento*: este razonamiento recibe el nombre de *demostracion* de la proposicion, en que se enuncia si convienen ó no dichas ideas. A la tripla facultad de adquirir ideas, compararlas y raciocinar sobre ellas, se le llama *entendimiento*; y á la facultad por medio de la qual nos representamos todas las cosas baxo imágenes corporeas, de donde resulta que muchas veces combinamos ideas que reunidas no pueden exîstir, se llama *imaginacion*: por esta facultad es por la que podemos suponer que exîstió el *centauro*, que suponian los gentiles era mitad hombre y mitad caballo, y todos los otros objetos de la fábula.

Quando se reconoce una verdad en varios casos particulares, y de aqui se pasa á generalizarla para todos los de la misma especie, se dice que se infiere por *induccion* ó *analogía*.

Las proposiciones pueden ser *evidentes*, *ciertas* y *probables*. Evidentes son aquellas en que solo por la consideracion de las ideas que entran en ellas, se conoce su verdad, esto es, que la una idea está comprendida ó no lo está en la otra; á estas proposiciones se les da el nombre de *axîomas*; de manera que axîoma *es una proposicion que no necesita de demostracion para convencer de que es verdadera*, como por exemplo, *el todo es mayor que cada una de sus partes*; *cosas que son iguales á una tercera son iguales entre sí*. Nadie dudará de la verdad de estas proposiciones si tiene las ideas que comprenden; pero sino las tiene no advertirá su verdad, y me ha sucedido el que mis discípulos digan que no la perciben, por lo que yo he sido siempre de la opinion de Leibnitz, que queria que *hasta los axîomas se demostrasen*; esto es, que se explicasen, paraque

---

(*) *Se llama en general* sujeto *la cosa de que se habla ó trata en la proposicion*; predicado *la cosa que se afirma ó niega en el sujeto*; y cópula *el verbo que une ó separa el predicado con el sujeto*.

adquiridas las ideas que contienen, se vea que la una está contenida en la otra; por eso nosotros solo tomaremos por verdadero axîoma este: *una cosa es igual á ella misma*, que está á los alcances de todos, y de él deduciremos los demas de que debemos hacer uso en lo sucesivo.

Esta proposicion y todas aquellas en que el sujeto es el mismo que el predicado se llaman *idénticas*; de manera que solo son evidentes para todo el mundo las proposiciones idénticas; y paraque haya evidencia en un razonamiento es indispensable el proceder de proposicion idéntica en proposicion idéntica.

De que una cosa sea igual con ella misma, resulta que en vez de la misma cosa podremos tomar lo que equivalga á ella: ahora, quando esta cosa se compone de otras, resulta que es igual al conjunto de las que la componen; pero las cosas componentes toman en este caso el nombre de *partes*, y la cosa compuesta el de *todo*, y por lo mismo tenemos este

2.º Axîoma. *El todo es igual al conjunto de sus partes.*

Si es lo mismo *todo* que *conjunto de partes*, se deduce este

3.er Axîoma. *Lo que hagamos con el todo quedará hecho con el conjunto de sus partes, y lo que hagamos con el conjunto de sus partes quedará hecho con el todo.*

Esta proposicion es de la mayor importancia, pues en ella estriban las mas de las demostraciones que se han de dar en lo sucesivo; porque en la práctica no pudiendo desde luego executar lo que deseamos con el todo, lo executamos con cada una de sus partes, y por medio de esta observacion nos convencemos de que lo que hemos practicado con cada una de las partes que componen el todo, queda executado con el mismo todo.

Si del conjunto de estas partes quitamos una, dos, tres, quatro, &c., lo que quede ya no equivaldrá al mismo todo, y por lo mismo *el todo será mayor que lo que ha quedado*; pero en este caso podemos considerar al todo como compuesto de dos partes, una el conjunto que se le ha quitado, y la otra las que quedan; y por lo mismo tendremos el

4.º Axîoma. *El todo es mayor que qualquiera de sus partes.*

El qual se puede enunciar al contrario diciendo que

La parte es menor que el todo.

Tambien tenemos que si una cosa A es igual ó es la misma que

otra cosa B, y sabemos que esta cosa B es igual ó equivale á otra cosa C, resulta que como en vez de una cosa podemos poner qualquiera otra que le equivalga, en vez de la cosa B de la primera proposicion, podremos poner la cosa C que le es igual ó equivalente por la proposicion segunda, y tendremos que la cosa A es igual ó equivalente tambien á la cosa C; de donde resulta este

5.º Axîoma. *Cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

Que nos quiere decir que siempre que haya dos ó mas cosas, tales como A y C, que sean iguales con otra B, inferimos inmediatamente que A es igual con C. Así es que como sabemos que un duro es lo mismo que dos medios duros, y que el mismo duro equivale tambien á cinco pesetas ordinarias, tenemos aqui dos cosas, á saber, *dos medios duros* y *cinco pesetas*, que son iguales con otra tercera cosa que se llama *peso duro*, y por lo mismo inferimos que *dos medios duros equivalen á cinco pesetas*; los Lógicos enuncian este axîoma de este modo: *cosas que convienen ó se identifican con una tercera, convienen ó se identifican entre sí.*

En este axîoma consiste la fuerza del raciocinio; porque si tenemos dos ideas, como aqui la de dos *medios duros* y *cinco pesetas*, y queremos averiguar si estas dos ideas convienen ó no, como no vemos desde luego esta conveniencia ó disconveniencia, necesitamos elegir una idea ó cosa media para ver si ambas convienen con ella ó no; en la eleccion de esta idea media consiste la mayor ó menor felicidad de los ingenios para percibir desde luego el espíritu de la demostracion; y por eso les diremos que la eleccion de la idea media no suele ser arbitraria, pues solo se debe buscar una que sea idéntica con una de las que se comparan; y así, para hallar si convienen ó no estas dos ideas, hemos escogido por idea ó por cosa media el peso duro, cuyo valor es idéntico con *dos medios duros*, y como el peso duro equivale á *cinco pesetas* tambien, inferimos inmediatamente que lo mismo es dos medios duros que cinco pesetas.

Proposiciones *ciertas* son aquellas que para convencernos de su verdad necesitamos compararlas con las evidentes ó axîomas, y hacer ver que estan comprendidas en ellas. A estas proposiciones las llamaremos nosotros *teoremas*; y al razonamiento por el qual se hace ver que dicha proposicion va conforme con las evidentes ó axîomas, lo caracterizaremos con el nombre de *demostracion*. De

manera que teorema *es una proposicion que necesita de demostracion para convencer de que es verdadera*; y demostracion del teorema *es aquel razonamiento seguido*, *en que se hace ver que la proposicion enunciada ó la asercion que se hizo*, *de tal modo concuerda con los principios mas ciertos y evidentes*, *que no dexa duda de su verdad.*

Seria muy importante el que se tubiesen reglas generales para demostrar, sobre lo qual no se ha hecho nada; pero con todo eso observaremos que para esto no hay mas que fundarse en el conjunto de ideas que entran en el sujeto de la proposicion; ver qual es la que mas relacion tiene con el predicado, y despues ver esta de que otras ideas se compone, y elegir la que mas relacion tenga con el predicado de la proposicion, y continuar del mismo modo hasta que se llegue á una idea en que entre como componente la que formaba el predicado del teorema; y por lo mismo habiendo ido caminando por una sucesion de identidades, se infiere que la última conviene con la primera. Siguiendo estas reglas, y cotejándolas con las demostraciones que daremos en adelante, se llegará á adquirir de tal modo el giro de las demostraciones, que enunciado un teorema, se hallará uno en disposicion de dar la demostracion.

Esta demostracion de que acabamos de hablar se llama *directa ó â priori*; porque fundándose en las ideas que entran en ella y en los principios establecidos antes, se hace ver la verdad de que se trata; hay tambien otro género de demostracion que se llama *indirecta*, que solo hace patente la verdad, ó por medio de verificaciones, ó haciendo ver que de admitirse lo contrario se sigue un absurdo ó una cosa que se opone al comun sentir de los hombres; en el primer caso la demostracion se suele llamar *â posteriori*, y en el otro demostracion *ad absurdum.* Las primeras proposiciones no hay otro modo de demostrarlas que el *ad absurdum.* Quando se emplea, se usa generalmente del método de *exhaucion*, que consiste en averiguar de quantas maneras diferentes pueden tener relacion aquellas ideas, y demostrando que es un absurdo el suponer que se verifique en particular cada una hasta que quede una sola, se sigue que de este modo solo será verdadera.

Se conoce que hay absurdo quando se cae en una contradiccion, y de aqui nace el que se haya elegido por *criterio* de la verdad el principio de contradiccion, quando no se puede percibir la identi-

dad de las dos ideas: este principio de contradiccion es que *una cosa no puede ser y no ser á un mismo tiempo.*

Proposiciones *probables* son aquellas que pueden ser verdaderas en unas ocasiones, y falsas en otras; de estas no trataremos nosotros, sin embargo de que lo que expongamos servirá de medio para averiguar su misma probabilidad.

Segun las diferentes cosas que se enuncian en una proposicion, recibe esta diferentes nombres, como son: *definicion*, *problema*, *corolario*, *postulado*, *escolio* y *lema*.

Definicion *es una proposicion en que se da una idea clara y distinta de la cosa que se quiere dar á entender*; como por exemplo, todas las que hemos dado de la *atencion*, *análisis*, *abstraccion*, &c. Paraque una definicion sea buena se deben observar varias reglas; pero las principales son: el que la palabra que se define no entre en la definicion; que la definicion sea mas clara que el definido; y que sea lo mas corta posible. El mayor vicio que cometen los principiantes es el de introducir el definido en la definicion, y por lo mismo lo advertimos desde ahora paraque lo eviten.

En la definicion no se viene á hacer otra cosa que enunciar el conjunto de ideas que se comprenden baxo aquella palabra ó cosa que se define; de donde se infiere que una palabra que expresa una idea simple no se puede definir; así es que no se puede definir la *blancura*, sino lo mas decir que *es el color que tiene la nieve quando cae*, *ó indicar otro objeto en que se halle.*

Quando con el objeto de probar una proposicion, se enuncia en otros términos la conclusion que se ha de deducir, y se toma por definicion, se dice que se comete una *peticion de principio*, *ó un círculo vicioso*: lo que siempre se debe evitar, por ser el orígen principal de que se perpetúen los errores.

Problema *es una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas*, *debemos averiguar alguna otra desconocida.* Todas las proposiciones que son problemas llevan el distintivo de empezar por el infinitivo del verbo si se enuncian en general, y por el imperativo si se enuncian paraque otro halle lo que se pide. El problema consta de dos partes, de *resolucion* y *demostracion*; en la resolucion se dan las reglas que se deben practicar para hallar lo que se pretende; y en la demostracion se hace ver que practicando aquellas reglas, llegaremos á tener lo que se pedia.

Corolario ó conseqüencia *es una proposicion que se infiere de otra que se acaba de demostrar.*

Postulado *es un axîoma enunciado en particular*, y por lo mismo todos conocen su verdad; por exemplo: es un axîoma, como hemos dicho antes, que *en vez de una cosa qualquiera se puede substituir ó tomar qualquiera otra que sea igual con ella*; pero quando decimos: *en vez de un peso duro podemos tomar cinco pesetas ó veinte reales*, es un postulado, y no viene á ser mas que el axîoma anterior contraído aqui al peso duro.

Escolio *es una proposicion en que se explica ó advierte alguna cosa.*

Finalmente lema *es una proposicion que perteneciendo á otro asunto que aquel de que se trata, se enuncia con el objeto de que sirva de ilustracion ó principio de lo mismo que se trata.*

Hay proposiciones cuyo sujeto y predicado son tambien proposiciones, siendo una de ellas precedida de alguna de las partículas condicionales *si*, *quando*, *con tal que*, &c. por cuya razon á esta especie de proposiciones se les llama *proposiciones condicionales.* En ellas lo que se asegura como cierto ó como falso se llama *tesis*, y las suposiciones que se han de verificar paraque resulte lo que se pretende, ó la parte que va precedida de la partícula condicional, se llama *hipótesis.* Se debe advertir que, hablando con todo rigor, no se asegura la tesis, ni que se verifique la hipótesis, sino la mutua dependencia que tienen entre sí. V. g. *Si suelto un libro se cae.* Aqui la hipótesis es *si suelto un libro*, y la tesis es *se cae*; donde se ve que ni afirmo que soltaré el libro, ni que se caerá, sino la conseqüencia necesaria de su caida, si se ha verificado antes el soltarlo.

Ahora, si se reunen entre sí con cierta dependencia todas las proposiciones evidentes y ciertas que corresponden á un mismo asunto, este conjunto forma la *ciencia* de aquel asunto. Para llegar á conocer el orígen de la que va á formar por ahora el objeto de nuestras investigaciones, observaremos que al conjunto de todos los cuerpos que podemos concebir que hay, se le da el nombre de *naturaleza*; que como estos cuerpos se han de hallar en alguna parte, el parage comun donde se hallan todos los cuerpos que forman la naturaleza, se llama *espacio*; y que á este espacio junto con los cuerpos que en él se hallan colocados, se le da el nombre de *firmamento* ó de *universo.* Interesa mucho el percibir la idea del espacio, y por tanto observaremos que vemos todos los objetos terrestres, vemos la

luna, el sol, las estrellas, &c.; pues el parage donde se hallan estos cuerpos, todo lo que se ve baxo el color azulado que se llama *cielo*, y lo que nosotros concebimos que hay debaxo de la tierra donde nos hallamos, es lo que se llama *espacio*. El espacio no podemos concebir que tenga fin, esto es, que se acabe por algun parage; pues si suponemos esto, donde acabe él, habrá ó el espacio mismo ú otra cosa que por precision ha de ocupar una parte del espacio; luego si el espacio no tiene fin, ó nosotros no podemos concebir que lo tenga, podremos decir que es *infinito*, palabra con que denotamos que una cosa no tiene fin (1).

Por pocas que sean las ideas que hasta ahora hayamos adquirido, siempre serán suficientes para conocer que hay una gran diversidad de cuerpos en la naturaleza, y que un hombre no podrá adquirir de ningun modo un conocimiento exâcto de todos ellos. Por esta causa, de la ciencia de la naturaleza es necesario hacer ciertas divisiones, paraque unos se dediquen á una parte y otros á otra; y de este modo se puede tener entre muchos hombres el conocimiento mas exâcto de ella que sea posible.

En primer lugar, á la parte de esta ciencia que se limita á describir las producciones de nuestro globo, para dividirlas, darlas nombres y clasificarlas, pero sin mezclar jamas las operaciones del arte con las de la naturaleza, se le da el nombre de *Historia Natural*. El primer resultado de esta ciencia es el dividir en tres grandes porciones todos los cuerpos; porque entre ellos hay algunos que sin ninguna causa extraña se mueven hácia donde quieren, cuya circunstancia se llama tener *movimiento espontáneo*; y todos los cuerpos que le tienen se denominan con el nombre de *animales*. Hay otros cuerpos tales como las *plantas*, las *yerbas*, los *árboles*, que nacen, á cierta época florecen, despues echan fruto y luego se secan, y por esta particularidad de nacer y volver á desaparecer á cierto tiempo, se dice que tienen *vida*; pero que carecen del movimiento espontáneo: y todos ellos los caracterizamos con el nom-

---

(1) *Pascal decia que* el espacio era una esfera infinita, cuyo centro se hallaba en todas partes y la circunferencia en ninguna. *Aunque esta definicion no se puede entender por ahora, no obstante, quando se sepa lo que es esfera, se advertirá que esta definicion da una idea muy elegante del espacio indefinido ó infinito.*

bre de *vegètales.* Hay finalmente otros, como las *piedras* por exemplo, que sin tener movimiento espontáneo carecen de esta diversidad de variaciones de los vegetales, y que siempre los vemos de un mismo modo; que no tienen tampoco la facultad de reproducirse como los animales y vegetales, y á estos se les caracteriza con el nombre de *minerales.* Por esta causa se dice què la naturaleza se divide en tres reynos: el *mineral*, el *vegetal* y el *animal.* La ciencia que trata del reyno mineral se llama *Mineralogia*; la que del vegetal *Botánica*, y la que del animal *Zoologia.* Despues se hacen otras subdivisiones de estas ciencias, de que por ahora no trataremos; porque su conocimiento estriba en gran parte en el de otras que tratan de lo que hay de comun en todos los cuerpos, y que vamos á dar á conocer.

Para esto, observaremos que despues de seco un individuo del reyno vegetal, y muerto uno del reyno animal, queda todavía una cosa que es comun con la del reyno mineral, y que todavía es un cuerpo, por quanto hace impresion en nuestros sentidos; y en este caso, á los cuerpos privados ya de vida se les denomina con los nombres de *materia* ó de *substancia.*

Tambien se suele usar de la voz cuerpo en el sentido algo restringido de la de *materia* ó de *substancia*; y entonces se llaman *seres* de la naturaleza á todos los cuerpos, tengan ó no vida.

Todos los cuerpos, de qualquier reyno que sean, despues de prescindir de que tengan vida los que son susceptibles de ello, nos ofrecen varias cosas que son constantes y uniformes, ya sea en su modo de exîstir, ya en su modo de obrar; de manera que de esto resulta en nuestro espíritu una idea clara y distinta: cada una de aquellas cosas que observamos constantemente en ellos, decimos que es una *propiedad* suya, y la ciencia que tiene por objeto las propiedades de los cuerpos se conoce con el nombre de *Física.*

Entre las propiedades de los cuerpos, tomada esta voz en el sentido de materia ó de substancia, hay algunas que son comunes á todos ellos, como la de ocupar un espacio que se llama ser *extenso*, y el espacio ocupado *extension*; la de no poder ocupar otro cuerpo el mismo espacio que él á un mismo tiempo, que se llama *impenetrabilidad*; la de serle indiferente el moverse ó estarse quieto, que se llama *inercia*, de donde resulta la de poderse mover que se llama *movilidad*, y la de poderse estar quieto que se llama *quies-*

cibilidad; y la de caerse sobre la tierra, luego que se levanta y se le abandona á sí mismo, que se llama *gravedad*.

Todas estas gozan de la propiedad de convenir no solo á todos los cuerpos, sino á la mas mínima de sus partes que se llaman *moléculas*. Hay otras que son particulares á cada cuerpo, como el tener tal color, tal sabor, el ser duros, blandos, ó que aunque convengan á todos los cuerpos en general, no convienen á sus moléculas, como el ser porosos, elásticos, &c. Por esta causa se divide la Física en *Física general* y *Física particular*; la primera trata de las propiedades generales de los cuerpos, y la segunda de las particulares.

En la Física particular se pueden considerar tantos ramos, como afecciones ó propiedades variables hay en los cuerpos: así es que se llama *Magnetologia* á la ciencia que trata de las propiedades del iman; *Afinitologia* á la que trata de las afinidades, ó de aquellas propiedades que tienen los cuerpos, en virtud de las quales sus moléculas se dirigen las unas á unirse con las otras; la *Pirologia* trata de las propiedades de los cuerpos con relacion al calórico; la *Óptica* con relacion á la luz, y la *Electrologia* con relacion al fluido eléctrico.

Todo cuerpo se puede hallar en tres estados diferentes: en su estado de *solidez*, que es quando sus moléculas tienen tanta adherencia que con dificultad se separan, y agarrados por una parte se vienen con ella las demas; en su estado de *liquidez*, que es quando despues de adquirido cierto grado de calor, tienen tan poca adherencia que se separan las unas de las otras sino se las contiene en vasijas; y finalmente, adquiriendo mayor grado de calor llegan á tener aun menor grado de adhesion, de tal manera que si las vasijas donde estan no se hallan tapadas ó comprimidas por otros cuerpos, se escapan; en esta forma son invisibles por lo regular, y se dice que estan en estado *gaseoso* ó de *gases*, ó de *fluidos aeriformes*.

Quando los cuerpos sólidos aparecen constantemente baxo ciertas formas particulares, se dice que estan cristalizados, y la ciencia que trata de estos cristales se llama *Cristalografia*.

Quando se hallan en el estado de líquidos, segun la mayor ó menor propiedad que tengan de unirse á ciertos tubos muy estrechos que se llaman *capilares*, resulta la ciencia que se puede llamar *Capilarologia* ó *teoría de los tubos capilares*.

En este mismo estado se pueden introducir por los poros de otros cuerpos y mojarlos, lo que da orígen á la *Higrometría*, que enseña á conocer los grados de sequedad y de humedad de los cuerpos, y particularmente de la gran masa de ayre que rodea la tierra y que se llama *atmósfera.*

Finalmente, quando se hallan en el estado de gases, el tratar de su teoría forma la *Gasologia.*

Se da el nombre de *fenómeno* á qualquier hecho que nos presenta la naturaleza; y á todos los que se advierten en la atmósfera como los relámpagos, la lluvia, el granizo, la nieve, &c. se les llama *metéoros*, y la ciencia que trata de estos se llama *Meteorología.* Quando se consideran en movimiento las partes de la atmósfera, resulta que ó se mueven en gran masa, ó solo son vibraciones de las moléculas de este fluido: en el primer caso dan orígen á la ciencia que se llama *Anemologia*, ó que trata de la teoría de los vientos; y en el segundo dan orígen al sonido, y la ciencia que trata de este se llama *Acústica.* Quando se considera la atmósfera en estado de quietud ó de equilibrio, se origina la ciencia que se llama *Pneumatologia*, ó ciencia que trata de los fenómenos que tienen por causa el peso del ayre, su compresibilidad y elasticidad.

En estos últimos tiempos se ha considerado ademas de la Física general y particular, la *Física analítica* ó la *Química*, que es *la ciencia que enseña á conocer la naturaleza de los cuerpos, los resultados de sus combinaciones, los diversos principios que entran en su composicion*, y en una palabra, *la accion que exercen recíprocamente los unos sobre los otros.*

Para poder exâminar bien todas estas propiedades, es necesario ante todas cosas conocer otra que no solo es comun á todos los cuerpos, sino que es tambien comun á nuestras mismas sensaciones é ideas. Esta es la de poder ser *mayor ó menor*, y á esta propiedad la caracterizamos con el nombre de *cantidad*; de manera que entendemos por cantidad *todo aquello que puede ser mayor ó menor, ó todo lo que es susceptible de aumento ó de diminucion.* Pues que la cantidad no depende de ninguna otra propiedad de los cuerpos, es sumamente adequada para formar el objeto de una ciencia abstracta que se conoce con el nombre de *Matemáticas*; de manera que Matemáticas *son las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad*; y siendo esta susceptible solo de au-

mento ó de diminucion, se sigue que *las Matemáticas solo podrán dar medios para expresar, componer y descomponer las cantidades*; y quando se executa alguna de estas operaciones se dice que se *calcula*. Como la idea de la cantidad entra como parte en la composicion de todas las demas ideas, resulta que las verdades de las Matemáticas es indispensable que formen parte de todos los ramos de nuestros conocimientos, y sean en ellos de la mayor importancia. Por cuyo motivo no se puede dar un paso sin tropiezo en ninguna facultad, sino se tienen algunos conocimientos de esta ciencia.

De las Matemáticas se hace una division en *puras* y *mixtas*; se llaman Matemáticas puras á las que *tratan de la cantidad con la mayor abstraccion*, esto es, solo en quanto es susceptible de aumento ó de diminucion; y mixtas *quando se considera la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos.*

La cantidad considerada con toda generalidad puede ser de dos modos, *discreta ó continua*: se llama discreta quando sus partes no tienen entre sí ninguna trabazon ni enlace, y continua quando se verifica lo contrario. Por exemplo: un monton de pesos duros que hay sobre una mesa es una cantidad de pesos duros, porque dicho monton puede sufrir aumento poniendo mas duros, y puede sufrir diminucion quitando; pero es una cantidad discreta, porque un peso duro no tiene ninguna trabazon con otro. Pero las partes de plata que componen el mismo peso duro estan unidas entre sí, y como estas partes pudieran ser mas ó menos, forman una cantidad que es continua. Por esta causa se puede decir que las Matemáticas puras no contienen sino dos tratados, á saber, el que trata de la cantidad continua que se llama *Geometría*, y el que de la discreta que se puede llamar *Aritmética universal*, y se divide en *Aritmética propiamente dicha, que trata de la cantidad en quanto está representada por números, y en Álgebra que trata de la cantidad en general.*

Tambien se puede considerar como tratado de las Matemáticas puras la ciencia que trata del movimiento y se llama *Dinámica*, si se prescinde de la causa que lo origina; porque hay cierta analogía entre la extension y el movimiento; pero hasta ahora se ha considerado este tratado como propio de las mixtas.

Los tratados de las Matemáticas mixtas (que tambien se llaman tratados *Físico-matemáticos*, porque consideran la cantidad en las

propiedades de los cuerpos que ha dado á conocer ya la Física) son tantos como propiedades hay en los cuerpos.

Aplicados todos los medios de cálculo á las propiedades de la Física general, resulta la ciencia que se llama *Mecánica*; pero como entre los cuerpos hay unos cuyas partes tienen tanto enlace las unas con las otras, que agarrándolos por una parte, esta trae consígo las demas, y cuerpos en que esto no se verifica; se da á los primeros el nombre de cuerpos *sólidos*, y á los segundos el de *fluidos*, y la Mecánica se divide en dos partes: *Mecánica de los sólidos*, y *Mecánica de los fluidos*, entendiendo aun por fluidos no solo los que propiamente lo son, sino tambien los líquidos, pues para ambos es una misma la teoría. Cada una de estas se subdivide en otras dos: la primera en *Estática* que trata del equilibrio de los sólidos, y en *Dinámica* que considera su movimiento; la segunda en *Hidrostática*, que trata del equilibrio de los fluidos, y en *Hidrodinámica* que trata de su movimiento, á la que se suele llamar tambien *Hidráulica.*

La gravedad que observamos á primera vista en los cuerpos terrestres, se verifica tambien en todos los del universo, de manera que los unos se dirigen hácia los otros; y á esta propiedad de que la gravedad no es sino un caso particular, se le da el nombre de *atraccion* ó *gravitacion*, y la aplicacion del cálculo para la investigacion de sus leyes constituye la ciencia que se conoce con el nombre de *Astronomía Física.*

Aplicando el cálculo á cada uno de los ramos de la Física particular, se originan otros tantos tratados Físico-matemáticos: y observaremos que mientras mas conocimientos de cálculo apliquemos, mas progresos haremos en dichos tratados; y se debe decir con bastante certeza que jamas se han hecho progresos en ellos, tratados puramente como Físicos, sino como Físico-matemáticos.

Han sido tantos los adelantamientos que las Matemáticas han hecho en la ciencia de la naturaleza, que matemáticamente se han llegado á descubrir los principios que entran en la composicion de los cuerpos. Neuton dixo que en la composicion del agua y del diamante entraba un cuerpo combustible: y en estos últimos tiempos lo primero que demostró Lavoisier, haciendo que la Química fuese una verdadera ciencia, fue esta verdad en el agua; y nuestro Feijó, habiendo sido el primero que empezó á llamar la atencion de los

sabios acerca del diamante, hizo que los Químicos lo reputasen como carbon en un estado de pureza. Más aplicando el cálculo aun á la teoría de la naturaleza, Biot y Aragó han dado á conocer que los Químicos se han equivocado en esto, y que debe entrar como principio en su composicion el agua, y aunque no tenga noticia de que los Químicos hayan hecho experimentos directos para comprobar esta proposicion, la reputo por enteramente verdadera; puesto que debiendo encontrarse en toda cristalizacion parte de agua, y siendo el diamante una cristalizacion, la analogía nos conduce á la verdad de esta asercion.

Quando los Químicos franceses analizaron el ayre, encontraron que en cien partes de él, se contenian 27 de un gas que se llama *oxîgeno* y 73 de otro que se llama *azóe*; y un amigo mio (*) aplicando el cálculo á lo mismo que ellos decian, deduxo que debia haber menos de 24 partes de oxîgeno, y que lo que debia haber de menos no lo podia determinar, porque le faltaba hacer un experimento; posteriormente otro sabio español (**) hizo análisis del ayre, y encontró que solo se hallaban de 21 á 22 partes de oxîgeno, lo que despues comprobaron los Franceses aunque sin decir á quien se debia esto.

Otros muchísimos hechos pudiera citar para dar á conocer la influencia que tienen las Matemáticas en las demas ciencias, ademas de la recomendacion que adquirieron desde el tiempo de *Platon que no permitia que nadie entrase en su escuela sino estaba iniciado en ellas*; más porque no se crea que hay alguna parcialidad mia por ser la ciencia que profeso, los omitiré, contentándome con los que dexo expuestos, que tienen todo el grado posible de fuerza, por quanto los confiesan los mismos que tenian un interes para decir lo contrario, si se dexasen llevar de lo que acostumbran hacer los que solo tienen conocimientos vulgares (***).

(*) *D. Juan de Peñalver, director de los canales de Aragon y de Castilla, &c.*

(**) *D. Antonio Marti.*

(***) *Hé aqui sin embargo como se expresa nuestro sabio y eloqüente Vargas en su excelente elogio hecho á nuestro rey D. Alfonso el sabio, y premiado por la Academia Española en Junta de 15*

Aun hay todavía una idea mas abstracta que la de cantidad, y esta es la de *exîstencia*; porque paraque haya mayoría ó menoría es necesario que se tenga alguna cosa que sea mayor ó menor; y por consiguiente debe haber otra ciencia aun mas general que las Matemáticas, y que trate de manifestar la exîstencia de nosotros mismos, de los cuerpos que nos rodean, y de los medios por los quales nos cercioramos de ella, recurriendo para esto al exâmen y naturaleza de nuestras operaciones y facultades intelectuales y morales. Á esta ciencia la llamaron los antiguos *Metafísica*, y la embrollaron en gran manera; porque los Griegos, privados de observaciones anteriores que les fuesen conocidas, careciendo de medios fáciles de comunicacion con las otras partes del globo, y dotados de un carácter tan vivo como enérgico, cedieron á su impaciencia natural, y para abreviar procuraron mas bien el adivinar la naturaleza que el exâminarla. *Bacon*, conociendo la importancia de esta ciencia, y viéndola tan desfigurada por los sueños ó pretensiones exâgeradas de los antiguos filósofos, por las locas disputas de las sectas, por los numerosos absurdos de los escolásticos, y por el perjudicial artificio de abusar de las palabras, trató de refundirla en la parte de su *instauratio magna* ó *gran renovacion*, á que él llama *Filosofía primera*. *Descartes*, poco tiempo despues de Bacon, escribió tambien absolutamente las mismas cosas que él con menos aparato y ostentacion, ciñéndose á describir lo que habia pasado en su cabeza, y á dar cuenta de la marcha que habia seguido. Aunque estos dos genios sublimes no consiguieron del todo lo que intentaban, hicieron mucho en desacreditar lo que ya exîstia, y segun dice un escritor de nota: *sino nos pagaron en buena*

---

de Octubre de 1782, en la página 116 de la coleccion de premios de dicha Academia.

" *Aquella ciencia (las Matemáticas) á quien todas las naturales*
" *se subalternan, que forma el entendimiento, que enseña á dis-*
" *currir, á buscar la verdad y analizarla, á sacar conseqüencias*
" *legítimas y demostrarlas; aquella ciencia, delicias del hombre,*
" *bienhechora de la sociedad, fecunda en descubrimientos no en*
" *voces, llena de realidades no de precisiones; la que en dos siglos*
" *ha dado á la sociedad mas frutos que en dos mil años el abultado*
" *esquadron de nuestros quiméricos discursos.* " &c.

moneda, *hicieron bastante en manifestar que toda la que corria era falsa*. *Locke*, en su admirable *Ensayo del Entendimiento humano*, es el primero que ha profundizado en esta ciencia; sin embargo dexó muchas cosas que desear. *Condillac* lo conoció, y trató de remediarlo como en efecto lo consiguió en gran parte, en su primera obra *sobre el orígen de los conocimientos humanos*: y finalmente con los trabajos de *Bonnet*, *Cavanis*, *Lancelin*, *Maine-Viran*, y *Destutt-Tracy* que ha querido mudarle el nombre en *Ideologia*, ha llegado la Metafísica á un grado de perfeccion mucho mas considerable de lo que se podia esperar.

Como la Metafísica tiene una influencia considerable en todas las demas ciencias, no puedo menos de recomendar su estudio aun para los que estudian las Matemáticas; pues esta ciencia es la hija primera de la Metafísica; y aunque es rival de la misma Metafísica, porque se halla en un grado de perfeccion mucho mayor que ella, y su doctrina es tan exâcta que sirve de guia al que la estudia, no obstante yo creo que es mucho mejor ponerse uno en estado de conducir la ciencia, que no dexarse uno conducir siempre por ella.

No se sabria recomendar bastante el estudio de la verdadera Metafísica; pero no puedo menos de advertir que su objeto es tan delicado, que sino está tratado por hombres verdaderamente sabios, se puede caer con mucha facilidad en el inconveniente de ocuparse de qüestiones inútiles, y que hagan mas bien dudar de lo que se trata de probar que de convencerse de ello.

Á la Metafísica le corresponde manifestar el órden que se debe seguir en la adquisicion de los conocimientos; y así como en esta introduccion hemos tratado la parte de Metafísica que es indispensable para la inteligencia de las Matemáticas, diremos algo acerca de esto, porque tal vez es el punto que mas han tratado los autores, y que menos han entendido.

Por lo qual observaremos que al órden que se sigue en la adquisicion de los conocimientos de una ciencia particular, ó de las diversas ciencias á que nos podemos aplicar, se llama *método*.

La circunstancia indispensable que se ha de verificar en todo método, es que se proceda siempre de lo conocido á lo desconocido. Pero en unas ocasiones se nos presenta conocido el todo, y tratamos de averiguar la naturaleza y relacion de sus partes: y en otras nos son mas conocidas las partes, y por medio de ellas tratamos de ave-

riguar las propiedades del todo que componen; por esta causa se dice que en la adquisicion de nuestros conocimientos se pueden seguir dos métodos: uno de descomposicion que se llama *analítico*, y otro de composicion que se llama *sintético*; de donde se deduce que no se pueden aplicar indistintamente ambos métodos en toda clase de conocimientos; pues esto depende de que sean mas conocidos para nosotros ó el todo ó sus partes componentes.

Sin embargo, el que en general tiene mas aplicaciones es el analítico, por proceder desde los objetos ó desde las sensaciones que nos causan, hasta la deduccion de los principios generales; pero la análisis queda incompleta si despues no retrocedemos de los principios generales hasta las mismas sensaciones; de manera que para que el método analítico fuese completo, se deberia hacer la recomposicion; pero como en este caso seria demasiado largo, se omite por lo regular una parte de él.

Si se omite la 2.ª parte que es la *síntesis*, como el último resultado es el principio general, de cuya combinacion con otros resulta la verdad de lo que tratamos, no queda nuestro entendimiento muy satisfecho; pues aun le queda la duda de si resultará en efecto la verdad que indagaba, de la combinacion de estos principios que él ha descubierto; si se omite la descomposicion, y se parte de estos principios combinándolos hasta llegar á la verdad de que tratábamos, por este medio queda nuestro entendimiento muy convencido; pero no hemos averiguado nosotros porque debemos usar de estos principios y no de otros. Por esta causa se ha dicho que *el método analítico es el propio para inventar*, porque él descubre los principios de que se debe hacer uso; y *el sintético para enseñar*; porque por él queda nuestro entendimiento mas convencido de la verdad de lo que aprende; y lo que principalmente se necesita es que los principiantes queden bien radicados en los principios que han de ser la base de todo lo que han de hacer y saber en lo sucesivo. No obstante, combinando convenientemente estos dos métodos, se puede usar en la enseñanza de un método alternado, que sin ser largo concilie la claridad y exâctitud con el método de invencion.

Por esta causa, en estos elementos hemos usado en general del método analítico, pero ayudado muchas veces del sintético; porque aunque lo pudiéramos haber hecho todo analíticamente, esto seria en algunos casos por un esfuerzo del ingenio que perjudicaria al jóven

que hubiese de estudiar, por oponerse á alguna de las quatro circunstancias: *claridad*, *sencillez*, *facilidad en las operaciones*, y la *exâctitud* que manifesté en otro lugar (*) debia tener una obra elemental como la presente. Y así, he procurado conciliar estas quatro máxîmas, y he seguido en todas ocasiones el órden que va mas conforme con ellas.

Pero como el analítico es un método general, que sirve para inventar en toda clase de ciencias, importa formar de él una justa idea, y acostumbrarse á ponerlo en práctica: por esta causa, despues de hecha una comparacion exâcta de ambos métodos, contrayéndolos á unos mismos exemplos en la aplicacion del Álgebra á la Geometría, pasamos á exponer la teoría de las secciones cónicas, y la resolucion de los triángulos esféricos que siempre se han tratado sintéticamente, por un método puramente analítico; y estoy seguro que de este modo, y leyendo mi memoria citada en que con el mismo fin expongo por ambos métodos la teoría que contiene, se llegará á tener unas justas ideas sobre este punto, mucho mas tratado que entendido.

Expuesta ya la parte de Metafísica indispensable para el estudio de las Matemáticas, y hechas las observaciones convenientes sobre el método que hemos preferido; solo falta manifestar el que debe observar el principiante para entender estos elementos. Esto me parece muy importante, porquanto la mayor parte de los que no adelantan en esta ciencia es por usar de mal método en su estudio.

Nada hay mas fácil que el estudio de las Matemáticas si se procede con órden; *pero nada mas difícil que él si se estudia sin él*; porque en este caso es de todo punto imposible sacar ningun fruto. En efecto, todas las verdades de esta ciencia se suceden las unas á las otras sin interrupcion ninguna, lo que origina que la misma dificultad hay en pasar de la primera á la segunda, que de la quarenta á la quarenta y una, y de la ciento á la ciento y una.

El adquirir su conocimiento no cuesta mas trabajo que el subir una escalera, cuyos escalones son todos iguales; de donde resulta que el mismo esfuerzo se necesita para subir el último que el primero. Más, así como la altura de los escalones se debe proporcio-

---

(*) *Pág. 5 de la introduccion de mi* Memoria sobre la Curvatura de las lineas, &c.

nar á la de los sujetos que los han de subir, así es que en estos elementos se ha procurado que el que aprende no encuentre violento el tránsito de una proposicion á otra; y puede estar seguro de que el mismo trabajo que le haya costado pasar de lo que se llama *sensacion* á lo que se llama *idea*, de lo que se llama *juicio* á lo que se llama *proposicion*, le costará el pasar de una verdad qualquiera de esta ciencia á su inmediata. Y si alguna vez encuentra violento el tránsito, será por no haber entendido algunas de las que anteceden; en cuyo caso para poder continuar es preciso procure antes de pasar adelante, el llenar los huecos que dexó; porque sino, de ningun modo se puede pasar adelante, así como no se puede llegar al octavo escalon de una escalera sin haber pasado sucesivamente por todos los inferiores. Y así, paraque no se quede ningun hueco, deberán usar los principiantes del método siguiente.

Deberán estudiar esta obra párrafo por párrafo, procurando percibir bien las ideas que en cada uno se contienen; lo que conocerán si despues de leídos tres ó quatro veces, sin mirar el libro ven ellos que el órden con que se suceden las ideas en su entendimiento es el mismo que el que tienen en el libro; pero de ningun modo se ha de creer que esto lo tienen conseguido aprendiendo de memoria las palabras, sino lo que se ha de procurar es conservar en la memoria la sucesion de las ideas; y quando se necesite expresarlas, cada uno usará de las palabras que juzgue mas convenientes.

Ahora, en los párrafos en que esten contenidas las reglas para executar alguna operacion, no le hace que despues de entendidas dichas reglas se encomienden á la memoria, por lo qual se presentan con letra bastardilla; despues deben leer bien los exemplos en que dichas reglas estan contraídas, executando en un papel ó pizarra todas las operaciones que se van expresando; despues, sin mirar al libro han de procurar aplicar por sí dichas reglas generales, que ya han aprendido, á los mismos exemplos en que estan contraidas, para comparar despues su operacion con la que tienen en el libro, y corregir las equivocaciones que hayan padecido; y esto lo deben executar tantas veces como se necesite, paraque hallen por sí mismos el resultado de la operacion del libro; luego, deben contraer las reglas á los demas exemplos, y comparar su resultado con el que encuentren en el libro: y en caso de no encontrar el mismo, deben comparar su operacion con la del libro para advertir donde está la

equivocacion, enmendarla y volverla á executar las veces que se necesite, hasta que lleguen á sacar el mismo resultado. Y despues de conseguido, pueden estar seguros de que saben aquella operacion tan bien como qualquiera otro.

Esta prerogativa que tienen las Matemáticas, no la tiene ninguna otra ciencia; pues en ninguna de ellas se puede lisongear el discípulo de saber lo que ha estudiado con tanta exâctitud como el profesor que le ha dirigido. Esto anima mucho al discípulo, y por lo mismo ha de poner todo su conato en percibir el espíritu de la ciencia, procurando que quanto antes se corra el velo que tiene el entendimiento de todo principiante; pues en este caso ya no les costará ningun trabajo el continuar.

ADVERTENCIA.

Quando se encuentre un número dentro de un paréntesis, da á entender que la operacion que se necesita practicar para hallar el resultado que se busca, está explicada en el párrafo que tiene dicho número. Lo qual sirve paraque si á alguno se le ha olvidado como se practica alguna operacion auxîliar de aquella en que se halla, sepa adonde debe recurrir para volverla á aprender. Quando sea necesario poner alguna cita en medio de un cálculo se pondrá ademas § dentro del paréntesis para mayor claridad.

TRATADO ELEMENTAL
DE ARITMÉTICA.

NOCIONES PRELIMINARES, NUMERACION, DIVISION Y SUBDIVISION de las unidades de pesos y medidas.

1 La palabra *Aritmética* se deriva de la palabra griega *aritmos* que significa *número*; y por esto hemos dicho en la introduccion que por Aritmética se entiende *la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad en quanto está expresada por números.*

2 La idea de número se presenta á nuestro entendimiento desde que vemos á un mismo tiempo uno y muchos objetos ó individuos de una misma especie, como quando se ve un hombre y muchos hombres, un niño y muchos niños, un árbol y muchos árboles, &c.; porque en este caso concebimos lo que es *unidad* y *pluralidad* ó *muchedumbre.* Si despues comparamos la pluralidad con la unidad, lo que resulta de esta comparacion se llama *número*; de manera que número *es el resultado de la comparacion de la pluralidad ó muchedumbre con la unidad, ó el que expresa la reunion de muchos individuos ó unidades.*

3 Importa mucho adquirir una idea exâcta del número; y por tanto advertiremos que si sobre una mesa tenemos un monton de pesos duros, este monton forma entonces una cantidad, porque puede ser mayor ó menor; pero si queremos averiguar quantos hay, elegiremos un peso duro paraque sirva de término de comparacion, y luego que respondamos *tantos*, entonces ya el resultado de esta comparacion es lo que se llama *número*; si hay muchos pesos duros, para evitar el que por qualquier motivo de distraccion se nos olvide los que llevamos contados, y no tener que empezar de nuevo, luego que se ha llegado á tener un número regular de ellos (*), se ponen en columna y se van formando columnas como aquella; y despues, contando los montones, se viene en conocimiento del número total de pesos duros que hay.

(*) *En el comercio estos montones suelen ser de* veinte ó veinticinco. *No lo decimos en el texto porque aun no se han explicado las ideas que estan unidas á estas palabras.*

En este segundo caso sirve de unidad el número de pesos duros que contenia la columná; de manera que por *unidad* en general debemos entender *una cantidad que se elige*, *las mas veces á arbitrio*, *paraque sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de su especie.*

4 Como las Matemáticas solo pueden hacer (Introd.) con las cantidades tres cosas, á saber, *expresarlas*, *componerlas* y *descomponerlas*, tampoco puede la Aritmética executar otra cosa con los números; y así, lo primero que vamos á manifestar es el modo de expresar los números, cuya operacion sa llama *numeracion.* La numeracion se puede considerar baxo dos aspectos: ó como *hablada* ó como *escrita*; y como la primera debe preceder á la segunda, ante todas cosas debemos aprender los nombres con que se determinan las unidades que hay en cada conjunto. El expresar los números con nombres es una operacion indispensable; pues aunque la naturaleza no nos presenta sino individuos ó unidades, si tubiésemos que dar razon de los hombres ó árboles que habíamos visto en algun parage, y lo executásemos diciendo que los hombres ó árboles que habíamos visto, eran: *uno*, *uno*, *uno*, &c., no lo podríamos hacer sin confusion nuestra y del que lo oyese, por ser muy difícil, y aun imposible, conservar en la memoria las veces que está repetida la palabra *uno*; y así, el entendimiento se ve precisado á caracterizar con palabras á cada una de estas colecciones de unidades.

5 Si á cada coleccion de unidades se le diese un nombre particular, no bastaria la vida del hombre sino para aprender muy pocos números; y así, hay un admirable artificio, aunque sumamente sencillo, por medio del qual se expresan con muy pocas palabras todos los números de que podemos necesitar.

6 Para manifestarlo, observaremos en primer lugar que qualquier objeto es en sí *uno*, porque la naturaleza presenta la consideracion de la unidad en cada individuo: despues, quando se quiere expresar el agregado de *uno y uno* se usa de la palabra *dos*, y por tanto *dos* equivale á uno y uno; para expresar el conjunto de *dos y uno* se usa de la palabra *tres*; para el de *tres* y *uno* de la palabra *quatro*; *quatro y uno* se expresa con la palabra *cinco*; *cinco y uno* con la palabra *seis*; *seis y uno* con la palabra *siete*; *siete y uno* con la palabra *ocho*; *ocho y uno* con la palabra *nueve*; *nuevè y uno* con la palabra *diez.*

7 Para contar de aqui en adelante, se toma esta coleccion de diez unidades por una nueva unidad, que se llama *unidad de decena*, y se van repitiendo las palabras anteriores diciendo: *diez y uno*, *diez y dos*, &c.; pero á causa de una irregularidad de nuestra lengua, en vez de *diez y uno* se dice *once*, en vez de *diez y dos* se dice *doce*, en vez de *diez y tres* se dice *trece*, en vez de *diez y quatro* se dice *catorce*, en vez de *diez y cinco* se dice *quince*; luego, se sigue ya regularmente diciendo *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho* y *diez y nueve*; y para expresar *diez y*

diez se usa de la palabra *veinte*, que es lo mismo que *dos dieces ó decenas*; despues se sigue contando veinte y uno, veinte y dos, &c. que tambien se dice *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*, *veintiquatro*, *veinticinco*, *veintiseis*, *veintisiete*, *veintiocho*, *veintinueve*; y para expresar *veintidiez* ó *tres dieces ó decenas*, se usa de la palabra *tres* modificada y se dice *treinta*: continuando despues *treinta y uno*, *treinta y dos*, *treinta y tres*,.... *treinta y nueve*; luego, para expresar *quatro dieces ó decenas*, *cinco dieces ó decenas*, &c. se modifican las palabras *quatro*, *cinco*, &c. con la terminacion *enta*; y se sigue contando *quarenta*, *quarenta y uno*, *quarenta y dos*, *quarenta y tres*,.... *quarenta y nueve*; *cincuenta*, *cincuenta y uno*, *cincuenta y dos*,.... *cincuenta y nueve*; *sesenta*, *sesenta y uno*, *sesenta y dos*,.... *sesenta y nueve*; *setenta*, *setenta y uno*, *setenta y dos*,... *setenta y nueve*; *ochenta*, *ochenta y uno*, *ochenta y dos*,.... *ochenta y nueve*; *noventa*, *noventa y uno*, *noventa y dos*,.... *noventa y nueve*; de modo que solo con las diez palabras primeras modificadas y combinadas entre sí, se pueden expresar hasta *noventa y nueve unidades*, ó nueve decenas y nueve unidades.

8 Si á noventa y nueve se le añade una unidad, se convierte en *noventa y diez*, ó *nueve dieces y otro diez mas* que son *diez dieces*; este conjunto de *diez dieces ó decenas de unidades* se expresa con la palabra *ciento*; y se vuelve á tomar por unidad, que se llama *unidad de centena*, y se continúa diciendo: *ciento y uno*, *ciento y dos*, *ciento y tres*,.... *ciento y diez*, *ciento y once*,.... *ciento y veinte*, *ciento veintiuno*,.... *ciento y treinta*,.... *ciento y cincuenta*,.... *ciento y noventa*, *ciento noventa y uno*,.... *ciento noventa y nueve*, *ciento y ciento ó doscientos*,.... *doscientos cincuenta*,.... *doscientos noventa y nueve*, *trescientos*,.... *quatrocientos*,.... *quinientos*,.... *seiscientos*,... *setecientos*,.... *ochocientos*,.... *novecientos*,.... *novecientos noventa y nueve*; despues, para expresar *novecientos noventa y nueve y uno mas*, que componen *diez cientos*, se usa de la palabra *mil*, y se vuelve á tomar este conjunto por unidad que se llama *unidad de millar*. Luego se continúa *mil y uno*, *mil y dos*,.... *mil y cincuenta*,.... *mil y ciento*,.... *mil y doscientos*,.... *mil novecientos*,.... *mil y mil ó dos mil*, *dos mil y uno*,.... *dos mil y ciento*,.... *dos mil novecientos*,.... *tres mil*,... *quatro mil*,.... *diez mil*,.... *veinte mil*,.... *cien mil*,.... *doscientos mil*,... *trescientos mil*,.... *novecientos mil*; y para expresar el conjunto *de diez cientos de miles ó mil miles* se usa de la palabra *millon ó cuento*, el qual conjunto se vuelve á tomar por unidad y se llama *unidad de millon* ó de *cuento*, y se sigue contando: *millon y uno*, *millon y dos*,.... *millon y ciento*,.... *millon y mil*,.... *millon y diez mil*,.... *millon y cien mil*,.... *millon y novecientos mil*,.... *dos millones*,.... *tres millones*,.... *diez millones*,.... *cien millones*,.... *mil millones*,.... *diez mil millones*,.... *cien mil millones*,.... *millon de miles ó billon*. Despues se continúa contando del mismo modo hasta que se tiene un *millon de billones*, á que se llama *trillon*; á un *millon de trillones*, *quadrillon*; y así se

continúa en adelante, diciendo *quillon*, *sextillon*, &c; de manera que solo con las trece palabras *uno*, *dos*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *ciento*, *mil* y *millon*, se pueden expresar todos los números de que puede necesitar el hombre (*).

9 La numeracion escrita consiste en expresar todos estos números con pocos signos; á cada conjunto de signos por cuyo medio se puede conseguir esto se llama *sistema*, y cada nacion ha tenido uno diferente. En efecto, los Griegos tubieron dos métodos para esto: el primero consistia en la combinacion de solo seis letras mayúsculas que eran las iniciales de las palabras *uno*, *cinco*, *diez*, *ciento*, *mil* y *diez mil*. Esto les era muy engorroso y lo abandonaron, eligiendo otro que consistia en dividir las letras de su alfabeto en unidades, decenas y centenas, poniendo un acento debaxo de ellas quando se queria que expresasen millares.

10 Los Romanos tubieron un sistema muy parecido al primero de los Griegos, usando de las siete letras I, V, X, L, C, D, M, y del qual se dan bastantes luces en la primera educacion. El método de los Hebreos era semejante al segundo de los Griegos; y tambien usaron de otro semejante los Árabes, hasta que abrazaron el que ellos mismos confiesan tomaron de la India. Este sistema es el mas perfecto de todos quantos se han inventado y pueden inventarse (**); por cuyo motivo los

---

(*) *En efecto, con dichas palabras se pueden expresar todos los números comprendidos hasta el que se escribiese con un número de guarismos expresado por las unidades que hay en el número* seis millones y seis; *y hasta ahora el mayor número que ha ocurrido escribir solo se compone de ciento quarenta y un guarismos, que es la relacion mas aproxîmada del diámetro á la circunferencia, que se halla en la obra de Vega intitulada* Thesaurus Logaritmicus.

(**) *La primera parte de esta proposicion no necesita demostracion, pues basta el que se halle adoptado en todas las naciones civilizadas; pero queriendo Buffon y otros hacer que se variase el sistema, y se eligiese el que constase de doce cifras, manifesté en una Memoria que remití á la Academia de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, de que tengo el honor de ser individuo, que esto no estaba fundado en razon, por quanto el actual procede en sus modificaciones de diez en diez, así como proceden las palabras de la numeracion hablada; y de aqui resulta la facilidad con que en él se puede escribir todo número baxo el dictado de otro; lo que no se podria executar en ningun otro sistema sin practicar antes operaciones dificultosas, á menos que no se variase el lenguage, lo que es imposible.*

En dicha memoria hice ver que la significacion de las trece palabras de que usamos en la numeracion hablada, sacada de las lenguas antiguas, era la siguiente: la de uno *llevaba la idea de aquella causa particular que hacia que este objeto no fuese otro diferente de él; la de* dos

Árabes lo introduxeron en España, donde lo aprendió Gerberto, que despues fue Papa con el nombre de Silvestre II, y lo divulgó por toda la Europa.

11 Este sistema consta solo de diez figuras ó caractéres que se llaman *cifras* ó *guarismos*; y por consiguiente dirémos que nuestro sistema de numeracion es el *arte de expresar con solo diez caractéres todos los números posibles.*

Estos caractéres son : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0;

el primero expresa *uno*, esto es, la palabra *uno* está representada por el primer guarismo 1; la palabra *dos* por el 2; la *tres* por el 3; la *quatro* por el 4; la *cinco* por el 5; la *seis* por el 6; la *siete* por el 7; la *ocho* por el 8; la *nueve* por el 9; y finalmente la cifra 0, que se llama *cero*, es el símbolo de la *nada*, y solo designa en qualquier parage donde se halle, que no hay nada de lo que debia haber donde ella está.

12 El artificio con que por medio de estas diez cifras se pueden expresar todos los números posibles, estriba en considerar en ellos, ademas del valor propio que se les acaba de fixar, otro valor relativo al lugar que ocupan contando de derecha á izquierda. Así, un guarismo qualquiera, tal como el 3, expresará siempre *tres* cosas; pero si está en el primer lugar contando de derecha á izquierda, serán tres unidades las que exprese; si está en el segundo, tres decenas; si en el tercero, tres centenas; si en el quarto, tres millares; &c.

13 De manera que *el primer lugar, contando siempre de derecha á*

---

llevaba en su orígen la idea de division ó apartamiento, *la de aquello que está separado de otra cosa y no hace parte de ella*: *la de* tres *lleva la idea de* interposicion, la de una cosa que está entre otras dos, *es decir*, en medio de ellas; *la* quatro *lleva la idea de* quadrado, *esto es*, de una figura de tres lados mas uno; *la* cinco *llevaba la idea de* reunion, *de* monton *de cosas*, *esto es*, *de un cúmulo ó conjunto de ellas*, *como el número de dedos de la mano*; *la* seis *lleva la idea de* dexar á un lado, poner aparte; *la* siete *lleva la idea de* abundancia, muchedumbre, muchos; *la* ocho *lleva la de* tiempo fixo, prescrito, dia de fiesta; *la* nueve *lleva la de* nuevo, *de* reciente *ó de* último; *la* diez *llevaba la idea del* número de dedos de las manos. *La significacion de esta palabra, y la de las* cinco y seis, *manifiesta que los hombres contaron al principio por los dedos de las manos*; *la* ciento *lleva la idea de* muchedumbre, de gran número; *la* mil *la de* plenitud, complemento ó innumerabilidad; *y la* millon *la de muchos miles. La significacion de estas tres últimas palabras manifiesta que se usaron al principio en el mismo sentido que las nuestras* muchos, varios, &c; *y que se fueron determinando al paso que se multiplicaban las necesidades de los hombres.*

izquierda, está destinado para colocar en él las unidades sencillas; el segundo para las decenas; el tercero para las centenas; el quarto para los millares; el quinto para las decenas de millar; el sexto para las centenas de millar; el séptimo para los millones; el octavo para las decenas de millon; el noveno para las centenas de millon; el décimo para los millares de millon; el undécimo para las decenas de millar de millon; el duodécimo para las centenas de millar de millon; el décimotercero para los millones de millones ó billones; el décimoquarto para las decenas de billon; el décimoquinto para las centenas de billon; el décimosexto para los millares de billon; el décimoséptimo para las decenas de millar de billon; el décimoctavo para las centenas de millar de billon; el décimonono para los trillones; los cinco lugares siguientes para las decenas, centenas, millares, decenas de millar, centenas de millar de trillon; el vigésimoquinto para los quadrillones, y así de seis en seis lugares para los quillones, sextillones, &c. Y el cero sirve para ocupar un lugar, si en un número falta alguna de las unidades de especie inferior.

14 Para hacer esto mas claro, nos valdremos de este exemplo: supongamos que se nos den, ó que nos propongamos los diez guarismos de que acabamos de hablar, combinados en esta forma: 4 6 3 8 5 1 7 0 9 2. Inmediatamente advertimos que el 2, ocupando el primer lugar de derecha á izquierda, expresa dos unidades; el 9 que ocupa el segundo, nueve decenas ó noventa unidades; el 0 que ocupa el tercero, expresa ninguna centena, y quiere decir que en el número propuesto no hay ninguna centena, porque el cero sirve únicamente para ocupar un lugar quando en un número falta alguna de las unidades de especie inferior; el 7 que ocupa el quarto, expresa siete millares ó siete mil unidades; el 1 que ocupa el quinto, expresa una decena de millar ó diez mil unidades; el 5 que ocupa el sexto, expresa cinco centenas de millar ó quinientas mil unidades; el 8 que ocupa el séptimo, expresa ocho millones; el 3 que ocupa el octavo, expresa tres decenas de millones, ó treinta millones; el 6 que ocupa el noveno, expresa seis centenas de millones, ó seiscientos millones; y finalmente, el 4 que ocupa el décimo, expresa quatro millares de millon ó quatro mil millones; y así se procederia si hubiese mas guarismos.

15 Para hacerlo aun mas palpable, pondremos aqui un número en que al lado de cada guarismo esté escrita la especie de unidades que expresa, como aqui se presenta:

&c.	&c.
9	decenas de trillon ó de tricuento.
0	trillones ó tricuentos.
3	centenas de millar de billon ó de bicuento.
5	decenas de millar de billon ó de bicuento.
8	millares de billon ó de bicuento.
6	centenas de billon ó de bicuento.
1	decenas de billon ó de bicuento.
2	billones ó bicuentos.
2	centenas de millar de millon ó de cuento.
7	decenas de millar de millon ó de cuento.
5	millares de millon ó de cuento.
8	centenas de millon ó de cuento.
3	decenas de millon ó de cuento.
7	millones ó cuentos.
2	centenas de millar.
6	decenas de millar.
9	millares.
3	centenas.
3	decenas.
5	unidades.

16 Entendido esto, ya no puede haber dificultad en escribir los números que otro qualquiera nos dicte; pues para esto no hay mas que *colocar sucesivamente los guarismos que expresan el número de unidades de cada órden, los unos al lado de los otros, empezando por la izquierda, y tener presente la sucesion de estos órdenes de unidades para no omitir ninguno, ocupando con ceros los lugares de los órdenes de unidades que pueden faltar.*

17 Hemos dicho que se ha de empezar á escribir por la izquierda, porque la unidad de especie superior es la que está mas hácia este lado; y como al enunciar los números se empieza siempre por la unidad de especie superior, se debe principiar á escribir por la izquierda, segun se acostumbra en nuestro modo de escribir.

18 Y así, si me propongo escribir el número *treinta y seis mil quatrocientos y dos*, lo executaré del modo siguiente. Como la primera palabra que tengo que escribir es *treinta*, ó lo que es lo mismo tres decenas, el primer guarismo que deberé poner es el 3, porque este representa siempre tres cosas; pero como aqui han de ser decenas, concibo inmediatamente que paraque el 3 ocupe el lugar de las decenas, que es el segundo de derecha á izquierda, despues del 3 debe haber otro guarismo, y que este debe ser el que exprese las unidades; por consiguiente sigo á ver en el número que se me ha propuesto lo que dice despues de la palabra *treinta*, y advierto que es la palabra *seis*; de donde infiero que el guarismo que debo poner despues del 3 es el 6, y tendré 36: con

lo qual estan ya escritas las dos primeras palabras *treinta y seis.* Despues sigue la palabra *mil*, la qual nos dice que estos treinta y seis son millares, y por consiguiente si el último guarismo 6 ha de expresar millares, es forzoso que ocupe el quarto lugar, contando de derecha á izquierda; luego debe haber despues del 6 tres guarismos mas, y el primero que debe seguir es el que exprese las centenas que contenga el número propuesto: por lo que veré lo que dice despues de la palabra *mil*, y hallo que continúa *quatrocientos*; luego despues del 6 debo poner un 4, que es el que expresa las centenas que hay, y tendré 364; despues del 4 que debe expresar centenas, se ha de colocar el guarismo que exprese las decenas que hay en el número propuesto: y como este no contiene ninguna decena, porque despues de quatrocientos dice *dos*, debo colocar el 0 que es el que expresa que no hay ninguna unidad del órden correspondiente al lugar que ocupa, y aqui expresará que no hay decenas; de modo que tendré ya 3640. Y como todavía falta un guarismo, porque este 0 paraque esté en el lugar de las decenas debe ocupar el segundo lugar, voy á ver lo que sigue en el número propuesto: hallo que dice *dos*, y por consiguiente pondré 2 despues del 0, y tendré 36402 que expresará el número que me propuse.

19 Con igual facilidad se escribirian los números aunque fuesen mas complicados; y así, si me propusiese escribir el número *quatro mil quinientos noventa y tres millones*, *doscientos diez y seis mil*, lo primero pondria un 4 para escribir la primera palabra *quatro*; como dice despues que estos quatro han de ser millares, veo que despues del 4 debe haber lo menos otros tres guarismos, y que le debe seguir inmediatamente el que exprese las centenas; y como despues de quatro mil dice *quinientos*, pondré 5 que expresa las centenas que hay, y tengo 45. Dice despues *noventa*, por lo qual pongo despues del 5 un 9 que expresa las nueve decenas que significa el noventa, y tendré 459; y colocando luego el 3 que expresa la palabra *tres* que sigue á la *noventa*, tengo 4593. Hasta ahora solo hay escrito *quatro mil quinientos noventa y tres*, que si fuesen unidades sencillas no habria ya mas que hacer; pero como dice despues *millones*, y los millones deben estar en el séptimo lugar, despues del 3 advierto que debe haber seis guarismos, y que el primero que debe seguir es el que exprese las centenas de millar, que como aqui dice doscientos pondré el 2, y tendré 45932; como luego deben seguir las decenas de millar y aqui hay una, pondré 1 y será 459321; y poniendo ahora un 6, que es el que expresa los millares que hay, tendré 4593216; que como han de ser millares, faltan todavía otros tres guarismos, porque el 6 para expresar millares debe hallarse en el quarto lugar; y como despues en el número propuesto no dice mas, es señal de que no hay unidades de la especie inferior á los millares, y por lo mismo aquellos tres lugares que faltan se ocuparán con tres ceros, y tendré 4593216000 que expresa el número propuesto.

20 Como importa mucho el que los principiantes se adiestren en escribir los números, les pondremos aun aqui algunos exemplos.

1.° El número *doscientos setenta* se escribe 270.

2.° El número *dos mil treinta y nueve* se escribe 2039.

3.° El número *ochenta mil quinientos y siete* se escribe 80507.

4.° El número *quatrocientos mil y trescientos* se escribe 400300.

5.° El número *quince millones quatro mil doscientos treinta* se escribe 15004230.

6.° El número *veinte millones* se escribe 20000000.

21 Para leer un número quando está escrito, no hay mas que observar el lugar que ocupa cada guarismo, y la especie de unidades que le corresponde; y expresar cada guarismo con la palabra correspondiente, bien sea modificada con la terminacion *enta* si expresa decenas, ó bien añadiendo despues la palabra que exprese la especie de unidades. Pero quando el número es muy complicado, no se ve á primera vista la especie de unidades que corresponde á cada guarismo, por cuyo motivo *se divide en porciones de seis en seis guarismos, empezando por la derecha; en la primera separacion se pone un* 1, *bien por la parte de arriba bien por la parte de abaxo; en la segunda un* 2; *en la tercera un* 3; *&c.: despues se divide cada porcion de seis guarismos en dos de á tres con una coma; y se empieza leyendo por la izquierda, pronunciando siempre* mil *donde se encuentre una coma, y donde se halle un* 1, *un* 2, *un* 3, *&c.* millon, billon, trillon, *&c.*, *y luego al fin se pronuncia unidades.*

Executando esto con el número:

$$35792690050293178440358$$

tendré:

$$35,792_{3}690,050_{2}293,178_{1}440,358.$$

Que se lee: *treinta y cinco mil setecientos noventa y dos trillones, seiscientos noventa mil y cincuenta billones, doscientos noventa y tres mil ciento setenta y ocho millones, quatrocientos quarenta mil trescientas cincuenta y ocho unidades.*

22 Aunque este sistema está adoptado en todas las naciones civilizadas, debemos advertir que los Franceses no usan las palabras *billon*, *trillon*, &c. en el mismo sentido que nosotros y los Ingleses; pues llaman *billon* á lo que nosotros y los Ingleses llamamos *millar de millon*; *trillon* á lo que nosotros y los Ingleses *billon*; *quadrillon* á nuestro *millar de billon*, y así en adelante.

De todo esto resulta que si á un número qualquiera se le pone á su derecha un cero, queda dicho número hecho diez veces mayor, porque su último guarismo que antes expresaba unidades, ahora expresará decenas, que son diez veces mayores que unidades; las decenas, centenas, &c. del primitivo se habrán hecho tambien diez veces mayores; luego ha-

biéndose hecho cada parte diez veces mayor, lo habrá quedado el todo. Del mismo modo demostraríamos que añadiendo dos ceros queda hecho el número cien veces mayor, y que añadiendo un número qualquiera de ceros quedaba hecho tantas veces mayor como expresa la unidad seguida de tantos ceros como se añadieron al número.

23 Los sistemas de numeracion que han tenido alguna fama son el *binario* ó de dos caractéres, que inventó Leibnitz con el fin de explicar un enigma del Emperador Fohi de los Chinos; y lo publicó en las memorias de la academia de ciencias de Paris, año de 1703; el *tetráctico* ó de quatro caractéres, que se dice haber sido inventado por los Pitagóricos; y el de doce caractéres que Buffon y d'Alembert prefieren al nuestro. A todo sistema se le suele dar, quando se habla de él en general, el nombre de *escala aritmética*, y al número que expresa los guarismos de que se compone la escala se le llama *raiz de la escala*; así, la raiz de nuestro sistema es 10, y por esto se le llama sistema *décuplo*. En mi memoria citada (nota del § 10) dí métodos generales para reducir un número qualquiera de un sistema á otro, y para dar aqui alguna idea manifestaré como se escriben los números en el sistema *binario*. Este solo consta de dos caractéres, á saber, 1 y 0; y con ellos se pueden expresar todos los números en el supuesto de que el carácter 1 signifique en el segundo lugar dos veces mas que en el primero; en el tercero dos veces mas que en el segundo; y en un lugar qualquiera dos veces mas que en el anterior á su derecha; así es, que para escribir uno se pone solo 1; para dos 10; para tres 11; para quatro 100; para cinco 101; para seis 110; para siete 111; para ocho 1000; para nueve 1001; para diez 1010; para once 1011; para doce 1100; para trece 1101; para catorce 1110; para quince 1111; para diez y seis 10000, y así en adelante.

24 En todo lo que llevamos expuesto hasta aqui, hemos prescindido de la especie de unidades que expresa cada número; pero como en muchas ocasiones se determina, nos vemos precisados á dividir el número en dos clases, á saber, en *abstracto* y *concreto*; abstracto es aquel que no determina la especie de unidades, como todos los que hasta ahora hemos nombrado: *cinco*, *seis*, &c., ó quando se dice *cinco veces*, *seis veces*, &c.; y el concreto es el que expresa la especie de unidades, como *cinco hombres*, *seis manzanas*, &c.

25 Ahora, los números abstractos, como no se refieren á ninguna unidad, ó se refieren á la unidad abstracta, se dice que son todos de una misma especie; pero como los concretos pueden referirse cada uno á diferente unidad, los dividiremos en *homogéneos* y *heterogéneos*; y decimos de dos ó mas números que son homogéneos quando *se refieren á una misma unidad*, y heterogéneos quando *se refieren á diferentes unidades*; v. g. *cinco hombres* y *sesenta hombres* son números homogéneos; *cinco hombres* y *sesenta manzanas* son números heterogéneos. De un número solo no se puede decir si es homogéneo ó heterogéneo,

porque esta es una cualidad relativa, que resulta de compararle con otro.

El número, con relacion á los guarismos que tiene, se divide en *simple ó dígito*, y en *compuesto*; se llama simple ó dígito quando solo consta de un guarismo, y compuesto quando de mas.

Hasta ahora solo hemos considerado números en que la unidad está contenida exâctamente; pero si en vez de comparar la pluralidad ó muchedumbre con la unidad, comparásemos la unidad con la muchedumbre, ó una muchedumbre con otra muchedumbre mayor, entónces resulta otra clase de números, que se llaman *números quebrados*, ó simplemente *quebrados*. Por exemplo: quando veo quatro árboles, y quiero comparar un árbol con los quatro, advertiré que este árbol no equivale ninguna vez á quatro árboles, sino que solo es una parte de aquellas que la cantidad con que comparo tiene quatro, y así digo que *un árbol es la quarta parte de una vez quatro árboles*. Si quisiera comparar tres árboles con quatro, hallaria que no equivalian á ninguna vez quatro árboles, sino que solo eran *tres quartas partes de quatro árboles*. A estos números *una quarta parte* ó *un quarto*, *tres quartas partes* ó *tres quartos*, se les da el nombre de *quebrados*, porque no expresan unidades, sino partes de la unidad á que se refieren.

Y pues que ya hemos dado á conocer estos números, harémos otra division del número en *entero*, *quebrado*, *mixto fraccionario*, y *quebrado de quebrado*. Entero es aquel que se compone exâctamente de unidades, como todos los que hemos considerado hasta aquí; quebrado el que expresa partes de la unidad, como *tres quartos, dos quintos*, &c; mixto el que se compone de entero y quebrado como *quatro y medio*; fraccionario es aquel en que contando por partes de la unidad se llega á tener una unidad ó mas de una unidad, como *quatro quartos*, *siete quartos*; y por último quebrado de quebrado es aquel que expresa partes de partes de la unidad, como *los dos tercios de un medio*, *los tres quartos de dos quintos*, &c.

26 Así como todas las naciones han seguido un método particular para expresar los números, tambien han tenido diferente sistema en la division de las unidades que sirven en los usos comunes para medir y pesar; y así como luego que se descubrió el sistema décuplo, lo recibieron en todas las naciones civilizadas, así tambien resultó que luego que se conocieron las ventajas que resultarian á la sociedad de la uniformidad de pesos y medidas, en todas las naciones se trató de efectuarla: á este efecto se reunieron en Paris el año de 1798 sabios de todas las naciones (*); y en efecto eligieron un sistema muy filosó-

(*) *La nuestra comisionó para esto á D. Agustin Pedralles, y á D. Gabriel Ciscar; y este último publicó una memoria en castellano, explicando el sistema que se habia elegido.*

fico; mas que en virtud de serlo tanto se debia esperar que jamas tuviese efecto, como al fin se ha verificado; porque el querer que el vulgo mude de lenguage, y en vez de aquel corto número de palabras que conoce reciba de otras, todas en griego, era una cosa imposible; sin embargo, la reunion de los sabios nombrados para esta comision ha traido muchas ventajas á las ciencias y á la sociedad. Nuestro Gobierno conoció esta imposibilidad muy desde los principios; y por esto lo que hizo fue tratar de uniformar los pesos y medidas en todo el reyno, tomando para ello las providencias mas acertadas, nombrando una Junta con la autoridad del Consejo, la qual, empezando por lo que presenta menos dificultades, y tratando de conciliar el bien general, hará que se efectúe esta uniformidad; cosa que no se ha conseguido por espacio de muchos siglos, que se ha estado mandando establecer (*).

27 Por esta causa debemos conocer todas las divisiones y subdivisiones de nuestros pesos y medidas, lo que manifestarémos ateniéndonos á la sabia pragmática de 26 de Enero de 1801.

Lo primero que observarémos es que hay quatro clases de medidas: medidas longitudinales ó de intervalos; medidas de superficie ó agrarias; medidas de capacidad para los granos y demas cosas secas; y medidas de capacidad para los líquidos.

28 La raiz de todas las medidas longitudinales, y á la que se refieren tambien las otras, es el *pie*; se divide en 16 dedos, y el dedo en mitad, quarta, ochava y diez y seisava parte: tambien se divide en 12 pulgadas, y la pulgada en 12 lineas.

La *vara* y la *legua* tambien son medidas longitudinales la vara, que es aquel liston de madera con que los mercaderes miden el paño, lienzo, &c. se compone de tres pies, y la legua que sirve para medir distancias grandes, como las que hay entre los pueblos, ciudades, &c. se compone de 20000 pies, que es el camino que se anda regularmente en una hora.

(*) *Exâminando las causas que podian haber retardado el poner en execucion esta sabia providencia desde el tiempo del rey D. Alonso el sabio, que está sin obedecer, aunque mandada tantas veces observar en el Fuero Real y en varias Córtes; hallé que una providencia que los mismos pueblos pedian, no pudo dexarse de poner en práctica, sino por la ignorancia de los pueblos que ocasionó el no haberlo podido poner en execucion. Enterado á fondo del buen estado en que se hallaba este asunto, y debiendo como buen vasallo contribuir con mis cortas luces para que se verifiquen tan sabias intenciones; quise proporcionar á los pueblos la instruccion necesaria para entender y poner expedita la uniformidad de las pesas y medidas, quando la Junta tenga á bien mandarla; y este fue uno de los principales motivos que tuve para la publicacion de mi Aritmética de niños.*

En dicha pragmática mandó el Rey que todas estas medidas se llamasen *medidas españolas*, y que se eligiesen para patrones las que estubiesen en uso mas generalmente; por esto se ha adoptado paraque sirva de norma la que se conservaba en el archivo de la ciudad de Búrgos, que ahora se llama *vara española*, y se divide como antes en mitad, quarta, media quarta ú ochava, y media ochava.

29 La primera de las medidas agrarias es el *estadal quadrado*, que es un quadro de 4 varas ó 12 pies de largo y otro tanto de ancho, que componen 16 varas quadradas ó 144 pies quadrados. Despues sigue la *aranzada*, que se compone de 20 estadales en quadro ó 400 estadales quadrados; y luego *la fanega de tierra* que se compone de 24 estadales en quadro, ó 576 estadales quadrados. La fanega de tierra se divide en 12 celemines, y el celemin en 4 quartillos.

30 Para los granos, la sal y demas cosas secas, la unidad de especie superior es el *cahiz* que se compone de 12 fanegas, y la fanega de 12 celemines. En el comercio no hay medida en que quepa el cahiz ni tampoco la fanega, porque serian muy grandes y no se podrian manejar; y así, las medidas que hay son la media fanega, que es la que se conservaba en el archivo de la ciudad de Avila; la quartilla que es la mitad de la media fanega ó la quarta parte de la fanega; el celemin ó almud que es la dozava parte de la fanega; el medio celemin que es la mitad del celemin; el quartillo que es la mitad del medio celemin, ó la quarta parte del celemin; el medio quartillo que es la octava parte del celemin; el ochavo que es la quarta parte del quartillo, ó diez y seisava parte del celemin; el medio ochavo que es la treinta y dosava parte del celemin; y el ochavillo que es la sesenta y quatroava parte del celemin.

31 Para los líquidos, excepto el aceyte, se usa de la *cántara ó arroba*, cuyo patron es el que se conservaba en el archivo de la ciudad de Toledo; se divide en dos medias cántaras; la media cántara en dos quartillas; la quartilla en dos azumbres; la azumbre en dos medias azumbres; la media azumbre en dos quartillos; el quartillo en dos medios quartillos; el medio quartillo en dos copas; de modo que la cántara se compone de 32 quartillos. El *moyo* se compone de 16 cántaras.

Exceptuamos el aceyte, porque sus medidas estan arregladas al peso: y así se usa de la arroba, media arroba, quartilla ó quarto de arroba, media quartilla ó medio quarto de arroba, libra, media libra, quarteron ó quarta parte de la libra, que tambien se llama panilla, y de la media panilla.

32 Para las cosas que se venden al peso se usa de las pesas del marco que se custodiaba en el archivo del Consejo de Castilla. La unidad de especie superior es el *quintal*, que se compone de 4 *arrobas*; la arroba de 25 *libras*; la libra de 16 *onzas*; la onza de 16 *adarmes*; el adarme de tres *tomines*, y el tomin de 12 *granos*. La libra se divide en dos medias libras, en quatro quarterones y en 8 medios quarterones; la onza en dos medias onzas, en quatro quartas, y en 8 ochavas ó drácmas.

33 Tambien importa mucho conocer la ley que se sigue en la division y subdivision de la moneda; y por eso pondremos aqui la que se halla establecida entre nosotros. La de especie superior es el *doblon*, que tiene 4 *pesos*, el peso 15 *reales*, y el real 34 *maravedíses*. De todas estas unidades no hay monedas: el doblon, el peso, y el *ducado* que vale 11 reales, son monedas imaginarias: porque no hay en la actualidad ninguna pieza de oro ni de plata que las represente, y solo sirven en los tratos de comercio.

De las demas, sí hay monedas y de mayor valor. Las monedas se hacen de oro, de plata y de cobre; la mayor de oro es el *doblon de á ocho*, que es una onza de oro y vale ocho *escudos de oro* ó 320 reales; despues sigue el *doblon de á quatro escudos de oro*, que es media onza de oro y vale 160 reales; luego sigue el *doblon de oro*, que vale dos escudos de oro ú 80 reales: despues sigue el *escudo de oro* que vale 40 reales, y el *medio escudo*, *escudito* ó *veintén* que vale 20 reales. La mayor de plata es el *peso duro*, que es una onza de plata y vale 20 reales; el *medio duro* que vale 10 reales; la *peseta columnaria* ó *mexicana* que vale 5 reales; la *media peseta columnaria* ó *real de plata mexicano* que vale dos reales y medio; y el *real columnario* que vale diez quartos y medio. Tambien hay otra peseta que es la *ordinaria* ó *provincial* y vale 4 reales; la *media peseta* ó *real de plata provincial* 2 reales, y el real sencillo ó de *vellon* equivale á ocho quartos y medio de la moneda de cobre. La moneda mayor de cobre en la actualidad vale 2 *quartos* ú 8 maravedíses; la que sigue un quarto, que vale 4 maravedíses; y la otra un *ochavo*, que vale 2 maravedíses; el maravedí, aunque hay moneda que lo represente, no corre en el comercio regularmente.

34 El tiempo se divide de este modo: el *siglo* se compone de 100 *años*; el año de 12 *meses* ó de 365 *dias* y algo mas; el dia de 24 *horas*; la hora de 60 *minutos primeros*; el minuto primero de 60 *minutos segundos*; el minuto segundo de 60 *minutos terceros*. &c.

De la operacion de sumar ó de la adicion.

35 Como la cantidad solo es susceptible de aumento ó de diminucion, y todo número es cantidad, resulta que con los números no se podrán executar en realidad sino dos operaciones; pero segun los diferentes modos que hay de aumentar ó de disminuir, resultan seis, que son las de *sumar*, *restar*, *multiplicar*, *dividir*, *elevar á potencias* y *extraer raices*. Sumar es *juntar ó reunir en un solo número el valor de dos ó mas homogéneos*: la operacion por medio de la qual se executa esto, se llama *adicion*: los números que se dan para sumar, *sumandos*: y lo que resulta de la operacion, *suma*. Los sumandos han de ser homogéneos, porque no se pueden reunir hombres, por exemplo, con caballos; pues un número qualquiera de caballos no aumentará el número de los hombres, ni el de los hombres aumentará el de los caballos.

Se indica esta operacion poniendo este signo + entre los sumandos, el qual se lee *mas*; así, la expresion 3+2 se lee *tres mas dos*, y para indicar que despues de hecha esta suma resulta 5, se pone el signo = que se lee *igual*; de manera que la expresion 3+2=5, se lee *tres mas dos igual ó es igual á cinco.*

36 Para poder sumar, lo primero que se debe saber es lo que componen juntos, de dos en dos, los números dígitos ó de un solo guarismo; en lo qual no habrá dificultad, porque sabiendo ya la numeracion hablada, se añadirá al uno de ellos una unidad, y se verá qué número resulta; despues se volverá á añadir otra unidad, y se verá el número que resulta; y así se continuará hasta haber añadido tantas unidades como habia en el segundo número dígito. Para no equivocarse, convendrá al principio que á cada unidad que se vaya añadiendo, se vaya abriendo un dedo, teniendo las manos cerradas; y quando se tengan ya tantos dedos abiertos como unidades tenia el número que se queria añadir, diremos que el número en que nos hayamos parado será el verdadero. Este es un método seguro, y que ninguno que sepa la numeracion hablada dexará de comprender; el qual aunque algo largo, se deberá practicar al principio hasta que ya se sepan hacer todas estas sumas de repente; más con el fin de suministrar á los principiantes todos los auxîlios posibles, pondremos aqui una tabla donde estan todas estas sumas, con el objeto de que la verifiquen por medio de sus dedos, y despues la aprendan de memoria.

Tabla para sumar.

1 y 1 son 2	2 y 2 son 4	3 y 3 son 6
1 y 2. . . 3	2 y 3. . . 5	3 y 4. . . 7
1 y 3. . . 4	2 y 4. . . 6	3 y 5. . . 8
1 y 4. . . 5	2 y 5. . . 7	3 y 6. . . 9
1 y 5. . . 6	2 y 6. . . 8	3 y 7. . . 10
1 y 6. . . 7	2 y 7. . . 9	3 y 8. . . 11
1 y 7. . . 8	2 y 8. . . 10	3 y 9. . . 12
1 y 8. . . 9	2 y 9. . . 11	
1 y 9. . . 10		
4 y 4 son 8	5 y 5 son 10	6 y 6. . . 12
4 y 5. . . 9	5 y 6. . . 11	6 y 7. . . 13
4 y 6. . . 10	5 y 7. . . 12	6 y 8. . . 14
4 y 7. . . 11	5 y 8. . . 13	6 y 9. . . 15
4 y 8. . . 12	5 y 9. . . 14	
4 y 9. . . 13		

7 y 7 son 14	8 y 8 son 16
7 y 8. . . 15	8 y 9. . . 17
7 y 9. . . 16	9 y 9. . . 18

37 Por el mismo procedimiento podrémos añadir un número dígito qualquiera á otro compuesto; y así, si quiero añadir á 25 el número 3, diré: 25 mas 1 son 26, 26 mas 1 son 27, 27 mas 1 son 28; y como ya he añadido tres veces la unidad, resulta que el 28 es la suma del 25 con el 3. Ahora, si al 25 quisiera añadir 7, diria: 25 y 1 son 26, 26 y 1 son 27, 27 y 1 son 28, 28 y 1 son 29, 29 y 1 son 30, 30 y 1 son 31, 31 y 1 son 32; y como ya he añadido siete veces la unidad ó siete unidades al 25, resulta que 32 es la suma de 25 y de 7. En la práctica se irán abriendo ó cerrando los dedos á cada unidad que se añada para tener un medio sencillo de conocer las veces que se ha añadido la unidad, que serán tantas como dedos abiertos hay si las manos estaban cerradas, ó como dedos cerrados si estaban abiertas.

Como es muy útil el saber hacer las sumas de un número compuesto de dos guarismos y de uno dígito, pondrémos aqui algunos otros exemplos paraque los principiantes los sumen por sí mismos, y se propongan otros. Así, sumando 15 con 4 resulta 19; 13 y 8 son 21; 27 y 9 son 36; 45 y 5 son 50; 48 y 9 son 57; 52 y 9 son 61; 63 y 8 son 71; 75 y 2 son 77; 83 y 8 son 91; 95 y 9 son 104.

38 Entendido esto, pasemos á manifestar las reglas generales que se deben observar para sumar; y con el fin de executarlo con la mayor claridad, enunciarémos esta operacion en el siguiente:

PROBLEMA: *Sumar números enteros.*

Resolucion. Colóquense todos los sumandos, ó números que se dan para sumar, los unos debaxo de los otros, de modo que se correspondan unidades debaxo de unidades, decenas debaxo de decenas, &c.; tírese despues una raya, y empiécese á sumar por la columna de las unidades, que es la que está mas á la derecha, y súmense todas las unidades de los sumandos: esta suma se compondrá ó de unidades solas, ó de decenas solas, ó de decenas y unidades: si se compone solo de unidades, se ponen estas debaxo de la raya; pero de modo que se correspondan con las unidades de los sumandos: si se compone solo de decenas, se pondrá o debaxo de las unidades de los sumandos, y las decenas se guardarán para sumarlas con las de la columna siguiente: si hay decenas y unidades, se colocan las unidades debaxo de la columna de las unidades, y se guardan las decenas para sumarlas con las de la columna inmediata. Despues se pasa á sumar la columna de las decenas, teniendo cuidado de sumar con el primer guarismo las decenas que resultaron de la suma de las unidades; esta suma de decenas se compondrá ó de decenas solamente, ó solo de centenas, ó de centenas y decenas: quando solo contiene decenas, se ponen debaxo de la columna de las decenas: si tiene solamente centenas, se pone o debaxo de la columna de las decenas, y se guardan las centenas que resulten para su-

marlas con las que haya en la columna inmediata de la izquierda: si contiene centenas y decenas, se colocan las decenas debaxo de la columna de las decenas, y las centenas se guardan para sumarlas con las de la columna de la izquierda. Luego, se pasa á sumar las centenas, teniendo cuidado de añadir al primer guarismo las que se llevaban de la suma de las decenas: y si en la suma de las centenas hay millares, se guardan para sumarlos con los de la columna inmediata; y así se continúa hasta llegar á la última columna de la izquierda, de cuya suma si resulta alguna ó algunas unidades de especie superior, se ponen á la izquierda del guarismo que se coloca debaxo de la última columna.

Exemplo: supongamos que se me dan para sumar los números 432, 287, 43 y 572. Lo primero que executo es poner los unos debaxo de los otros, de modo que se correspondan unidades debaxo de unidades, decenas debaxo de decenas, &c.; despues tiro una raya en esta forma:

432
287
43
572
———
1334

Empiezo á sumar por la columna de las unidades, y digo: 2 unidades y 7 unidades son 9 unidades, 9 unidades y 3 unidades son 12 unidades, 12 unidades y 2 unidades son 14 unidades; en 14 unidades hay una decena y 4 unidades, coloco las 4 unidades debaxo de la columna de las unidades, y guardo la decena para sumarla con las de la columna siguiente, en la qual digo: 3 decenas y una decena que llevaba de la suma de las unidades son 4 decenas, 4 decenas y 8 decenas son 12 decenas, 12 decenas y 4 decenas son 16 decenas, 16 decenas y 7 decenas son 23 decenas; en 23 decenas hay 3 decenas y 2 centenas, por lo qual pongo un 3 debaxo de la columna de las decenas, y guardo las 2 centenas para sumarlas con las de la columna inmediata, diciendo: 4 centenas y 2 centenas que llevaba son 6 centenas, 6 centenas y 2 centenas son 8 centenas, 8 centenas y 5 centenas son 13 centenas; en 13 centenas hay 3 centenas y 1 millar, pongo el 3 debaxo de las centenas de los sumandos, y guardo el millar para sumarlo con los millares de la columna inmediata; pero como no los hay, coloco el 1 al lado izquierdo del 3, y tengo que la suma de los quatro números propuestos es *mil trescientos treinta y quatro*.

39 Al sumar cada columna no se necesita ir repitiendo si son unidades, decenas, &c., antes lo hemos hecho para entender bien la operacion; pero en la práctica, que lo que se requiere es mucha prontitud, se suman los guarismos de cada columna como si expresasen unidades: y despues de colocar, debaxo de la columna que se suma, las unidades sencillas que resulten, se llevan para sumar con los guarismos de la columna inmediata de la izquierda, tantas unidades como decenas resultaron en la suma de la columna anterior; por exemplo: si me diesen para sumar los números 47259, 2[illegible]303, 49, 625 y 15903, los pondria los unos debaxo de los otros, como he dicho antes, en esta forma:

Y despues de tirada la raya diria: 9 y 3 son 12, y 9 son 21, y 5 son 26, y 3 son 29; coloco el 9 debaxo de dicha columna y reservo 2 para la inmediata, en la qual digo: 5 y 2 que llevaba son 7, y 0 son 7, y 4 son 11, y 2 son 13; pongo el 3 debaxo de dicha columna y reservo el 1 para la inmediata, en la qual digo: 2 y 1 que llevo son 3, y 5 son 8, y 6 son 14, y 9 son 23; pongo el 3 y llevo 2 para la columna siguiente, en la que digo: 7 y 2 que llevo son 9, y 5 son 14; pongo el 4 y llevo 1 para la columna inmediata, en que digo: 4 y 1 que llevaba son 5, y 2 son 7, y 1 son 8, que pongo debaxo; y tengo en *ochenta y quatro mil trescientos treinta y nueve* la suma de los cinco números propuestos.

47259
20503
49
625
15903
84339

40 Hasta ahora solo hemos manifestado las reglas y las hemos aplicado á dos exemplos; pero esto no basta: es necesario saber que practicando estas reglas, el resultado que hallamos es el verdadero, esto es, nos falta aun dar la demostracion del problema; y lo hemos executado así, porque como aqui hay que aprender quatro cosas, á saber, *el lenguage*, *las reglas que se deben seguir*, *adquirir su práctica*, y *la demostracion de las mismas reglas*: si lo hubiéramos puesto todo junto, los principiantes no podrian aprender estas quatro cosas á un tiempo; y porque por otra parte no perciben la fuerza, ni la necesidad de la demostracion, sino despues de saber executar lo que se les pedia; y así, ahora que ya saben las reglas y su práctica, conviene que les demos la razon de todo lo que han hecho, lo que vamos á executar en la siguiente

Demostracion. Lo primero que hemos dicho es que *se coloquen los sumandos los unos debaxo de los otros*, &c.: esto no es esencial, es solo por comodidad, y pudiéramos executar la suma poniendo los sumandos en qualquiera otra parte. Despues hemos dicho que *se tire una raya*: el objeto de esta raya es la claridad, esto es, el separar los sumandos de la suma que se ha de poner debaxo, porque sino se podria tomar la suma por un sumando. Todo lo demas está reducido á *sumar todas las unidades*, *todas las decenas*, *todas las centenas*, y *en general todas las partes de que se componen los sumandos*: y como al mismo tiempo que lo hemos ido haciendo, hemos ido reuniendo la suma de unidades con la de las decenas, con la de las centenas, &c. pues á la suma de estas le agregábamos las que nos resultaban de la suma de las unidades de la columna anterior, resulta que en el número que tenemos debaxo de la raya estan contenidas la suma de todas las partes de los propuestos: y como (Introd. ax. 3.º) lo que se hace con todas las partes queda executado con los todos, resulta que en el número que hemos obtenido estan contenidos todos los sumandos; y como se llama *suma* al número que expresa el valor de los sumandos, resulta que este expresará la suma

de los números propuestos, que era lo que nos proponíamos hallar (*).

41 Quando se proponen muchos números para sumar, se hacen primero sumas parciales de á seis ó de á ocho sumandos, y despues se suman todas las sumas parciales. Más hay operaciones en que entra la suma como auxîliar, y en que no se pueden hacer con sencillez estas sumas parciales; y por eso quando yo me he hallado en una circunstancia de estas, he puesto debaxo del guarismo de cada columna el número de unidades que conservo para la inmediata, en esta forma: Supongo que se me den para sumar los números que estan aqui ya colocados, y diré: 4 y 8 son 12, y 2 son 14, y 6 son 20, y 6 son 26, y 6 son 32, y 3 son 35, y 7 son 42, y 2 son 44, y 8 son 52, y 7 son 59, y 4 son 63, y 3 son 66, y 8 son 74; pongo el 4, y debaxo de él las 7 decenas que conservo para la columna siguiente, en la qual digo: 7 que llevaba y 8 son 15, y 9 son 24, y 7 son 31, y 8 son 39, y 8 son 47, y 7 son 54, y 9 son 63, y 8 son 71, y 8 son 79, y 9 son 88, y 7 son 95, y 8 son 103, y 9 son 112, y 5 son 117; pongo el 7 y debaxo de él el 11, y continúo la operacion como aqui se ve.

```
  54984
  76698
  85772
  43886
   3786
 243576
 193893
   4987
  87682
    998
   7677
  53084
   2893
  75658
 -------
 935574
 6610117
```

De este modo, aunque uno se distraiga en el discurso de la operacion, no necesita volver á empezar de nuevo para saber las que llevaba de la columna anterior, ni executar la suma de las dos columnas anteriores, que de otro modo es indispensable; con lo qual se executan las operaciones con cierta tranquilidad y sin aquella intension de ánimo que tanto molesta.

42 Entendido ya el modo de practicar esta operacion, solo nos falta el que manifestemos baxo qué aspectos se presentan en la sociedad las qüestiones que conducen á executarla; y quantos sean estos aspectos, tantos son los usos que se dice que tiene.

Las qüestiones que en la sociedad conducen á la operacion de sumar son todas aquellas, en que se trata de averiguar quanto componen juntas muchas cosas de una misma especie; y así, si se nos dixese que averiguásemos la renta que juntaba un sugeto que por su empleo tenia 45249 reales anuales; que una dehesa le producia 79250 reales; que las casas le daban 27200 reales; las demas haciendas 8527 reales, y los rebaños de ganado 15208 reales; advertiríamos que esto se debia executar por la operacion de sumar; por consiguiente colocaríamos los sumandos, y exe-

(*) *Para abreviar usaremos en lo sucesivo de estas letras* L. Q. D. H. *para indicar la última frase de la demostracion de un problema*, *y son las iniciales de esta*: lo que debia hallar ó hacer.

cutaríamos la operacion como hemos dicho (38), y sacaríamos que la renta del sugeto era 175434 reales (*).

De la operacion de restar ó de la sustraccion.

43 Vamos á tratar de la primera operacion de disminuir, que es la de *restar*; y se dice que restar es *averiguar la diferencia que hay entre dos números homogéneos*: la operacion por medio de la qual se executa esto, se llama *sustraccion*; el número de que se ha de restar *minuendo*; el que se resta *subtraendo*; y lo que resulta de la operacion *resta*, *exceso* ó *diferencia*. El minuendo y subtraendo deben ser homogéneos, porque un número qualquiera de caballos, por exemplo, no podria disminuir en nada otro número qualquiera de hombres que tubiésemos, ni al contrario.

Es muy importante conocer quando se nos propone una qüestion qué oficios hace cada número; y así, observaremos que quando se enuncia que se debe executar una operacion de restar, el número que lleve antepuesta la preposicion *de* es el minuendo, y el otro el subtraendo.

Tambien se usa de un signo particular para indicar que un número se debe restar de otro; este signo es el — que se lee *menos*; y para indicar la resta se pone el minuendo, luego el signo —, despues el subtraendo, y para indicar el resultado de la operacion se pone el signo =; así, la expresion $5-3=2$, quiere decir que despues de quitar 3 unidades del 5 quedan 2, y se lee *cinco menos tres igual ó es igual á dos*.

44 Entendido esto, para proceder con claridad reuniremos todas las reglas de esta operacion en el siguiente:

PROBLEMA: *Restar números enteros.*

Resol. Colóquese el subtraendo debaxo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debaxo de unidades, decenas debaxo de decenas, &c.; tírese despues una raya debaxo del subtraendo; véase la diferencia que hay entre las unidades del subtraendo y las del minuendo: ó lo que es lo mismo, véase las unidades que faltan á las del subtraendo paraque tenga las mismas que el minuendo, y las que le falten se ponen debaxo de la raya en la columna de las unidades; executese lo mismo con las decenas, centenas, millares, &c. y el número que salga debaxo de la raya será la resta.

(*) *Si alguno necesitase aun de mas exemplos podrá consultar mi Aritmética de niños; la qual como no contenia la demostracion de las operaciones, era necesario que tubiese muchos exemplos con todos los detalles indispensables para los niños, y por consiguiente para qualquiera que los necesite.*

Exemplo: si me dixesen que restase de 8579 el número 3275, advertiria que el número que lleva antepuesta la preposicion *de* es el 8579: por consiguiente este es el minuendo; y por lo mismo colocaré el subtraendo 3275 debaxo de él, como aqui se ve:

8579
3275
5304

Despues de tirada la raya diré: de 5 unidades á 9 unidades ¿quántas van? esto es, averiguaré quántas unidades faltan al 5 para convertirse en 9; lo qual es fácil, pues teniendo presente la tabla de la operacion de sumar, advertiré desde luego que faltan 4 unidades, ó si esto se me olvida iré añadiendo sucesivamente la unidad al 5 hasta que se convierta en 9, y veré que le tengo que añadir quatro veces dicha unidad; por lo que digo que le faltan 4 unidades, y coloco este guarismo 4 debaxo de la raya en la columna de las unidades; paso despues á las decenas y digo: de 7 decenas á 7 decenas ¿quántas van? y como á 7 decenas no le falta ninguna decena para convertirse en 7 decenas, digo que van 0 decenas, y pongo este guarismo debaxo de la raya en la columna de las decenas; paso ahora á las centenas y digo: de 2 centenas á 5 centenas ¿quántas van? y como á 2 centenas le faltan 3 centenas para convertirse en 5 centenas, coloco el 3 debaxo de las centenas; paso inmediatamente á los millares y digo: de 3 millares á 8 millares ¿quántos van? y como á 3 millares le faltan 5 millares para convertirse en 8 millares, colocaré debaxo de los millares el guarismo 5, y tendré que la diferencia entre los dos números propuestos es 5304.

Dem. El colocar el subtraendo debaxo del minuendo es por comodidad; el tirar la raya es paraque no se confunda el subtraendo con la resta; ahora, las demas reglas se reducen á que por ellas encontramos la diferencia entre las unidades de los dos números propuestos, la de las decenas, la de las centenas, &c., esto es, que hallamos la diferencia que tienen todas las partes de los números propuestos; y como todas estas diferencias las hemos ido colocando unas al lado de otras en sus lugares correspondientes, resulta que en el número que está debaxo de la raya se hallan todas las diferencias que hay entre todas las partes de los números dados; y como todas las diferencias de las partes equivalen á la diferencia de los todos (Introd. ax. 3.º), se sigue que dicho número expresará la resta entre los propuestos. L. Q. D. H.

45 En el exemplo anterior hemos ido nombrando al hallar cada diferencia parcial la especie de unidades que expresaba cada guarismo, porque así lo exìgia la claridad; pero despues de entendido el modo de executar la operacion y sus fundamentos, se consideran todos los guarismos, al executar la operacion, como si solo expresasen unidades. Por exemplo: si me propusiesen que hallase la diferencia que hay entre los números 625867 y 324705, los colocaria como he dicho antes (44) y se ve á la vuelta:



Y despues de tirada la raya diré: de 5 á 7 ¿quántas van? y como á 5 le faltan 2 para convertirse en 7, pongo este guarismo 2 debaxo de la raya en la columna de las unidades; paso á la columna inmediata y digo: de 0 á 6 ¿quántas van? y como á 0 le faltan 6 para convertirse en 6, pongo este guarismo; paso á la otra columna y digo: de 7 á 8 ¿quántas van? advierto que son 1, y pongo debaxo este guarismo; paso á la otra columna y digo: de 4 á 5 ¿quántas van? advierto que son 1, y pongo este guarismo debaxo; paso á la otra columna y digo: de 2 á 2 ¿quántas van? y como no va ninguna pongo 0 debaxo, y luego digo por último: de 3 á 6 ¿quántas van? advierto que son 3, pongo este guarismo debaxo y encuentro que la diferencia es 301162.

625867
324705
301162

46 Con el objeto de no dar saltos que sean violentos para los principiantes, hemos repetido en cada columna de los exemplos anteriores la pregunta *¿quántas van?*; pero conviene omitirla con el fin de abreviar. Así, en la práctica solo se expresan las palabras que son indispensables, como en este exemplo: si de 286187 quiero restar 153064, colocaré los números y tiraré la raya como aqui se presenta:

Y diré: de 4 á 7 van 3; de 6 á 8 van 2; de 0 á 1 va 1; de 3 á 6 van 3; de 5 á 8 van 3; y de 1 á 2 va 1; y colocando cada uno de estos guarismos debaxo de sus correspondientes, hallo que la resta es 133123.

286187
153064
133123

47 Todos los exemplos que hemos resuelto hasta aqui han sido escogidos con el fin de que en ellos se practicasen las reglas sin dificultad ninguna; pero suele suceder que aunque el minuendo sea mayor que el subtraendo, como debe verificarse para poderse executar la resta, no obstante alguno ó algunos de los guarismos del subtraendo sea mayor que su correspondiente en el minuendo; en cuyo caso, para poder executar esta resta parcial se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda: y como vale 10 respecto de aquel que está á su derecha, se añaden estas 10 á las unidades que habia en dicho lugar: de esta suma siempre se podrá restar el guarismo que le corresponde, y se pondrá la resta debaxo; luego, es menester llevar en cuenta aquella unidad que se tomó y rebaxarla del guarismo del minuendo; pero es mas análogo con el modo de proceder en las demas operaciones, el añadir esta unidad al guarismo del subtraendo, dexar el del minuendo conforme era, y hallar la diferencia.

Para hacer esto palpable con un exemplo, nos propondremos hallar la diferencia entre los números 45296 y 31578, que colocaré como he dicho (44) y aqui se ve:

Y despues de tirada la raya diré: de 8 á 6 no puede ser, es decir que al 8 no le faltan ningunas unidades para convertirse en 6, ó que no puedo quitar 8 al que no tiene mas de 6: por lo mismo tomo una unidad del guarismo inmediato que es 9, y como vale 10 respecto de las del 6, las

45296
31578
13718

sumo y tengo 16, de cuya suma ya puedo restar el 8 y digo: de 8 á 16 van 8, que pongo debaxo; ahora podria considerar el 9 como 8, por haberle quitado una unidad, y decir de 7 á 8 va 1; pero es mejor acostumbrarse á añadir dicha unidad al guarismo del subtraendo; y así diré: 7 y 1 que llevo son 8, de 8 á 9 va 1 que coloco debaxo; paso á la columna inmediata y digo: de 5 á 2 no puede ser, tomaré una unidad del guarismo inmediato, y hallaré que de 5 á 12 van 7, que pongo debaxo y llevo 1; 1 y 1 que llevo son 2, de 2 á 5 van 3, que pongo y no llevo nada; de 3 á 4 va 1, que pongo debaxo; y resulta que la diferencia es 13718.

48 Tambien suele ocurrir el que haya ceros en el minuendo, y en este caso para encontrar la resta *se considera el primer cero de la derecha como* 10, *y todos los demas como* 9, *teniendo cuidado de considerar con una unidad menos al primer guarismo significativo que se encuentre*; por exemplo: si de 16037000 quisiese restar 4572695 los colocaria como he dicho (44) y aqui se ve:

16037000
4572695
11464305

Y despues de tirada la raya diria: de 5 á 10 van 5, que pongo; de 9 á 9 no va nada, y pongo 0; de 6 á 9 van 3; de 2 á 6 (porque siendo el 7 el primer guarismo significativo se debe considerar como con una unidad menos, esto es, como 6) van 4; de 7 á 3 no puede ser, y así debo tomar una unidad del guarismo inmediato; pero como este es 0, es preciso irla á tomar al que sigue despues del 0, que es el 6, y como una unidad del 6 vale 100 respecto de las del 3, dexo con el pensamiento 90 ó 9 decenas en el lugar del cero, y tomo 10 unidades para añadirlas al 3 y poder restar de ellas las 7, y digo: de 7 á 13 van 6; ahora considerando el 0 como 9 diré: de 5 á 9 van 4; sigo despues: de 4 á 5, porque quité una unidad al 6, va 1; y como aun queda en el minuendo un guarismo que no tiene correspondiente en el subtraendo, lo coloco debaxo.

Tambien pudiera haber considerado cada 0 como lo que es, y añadir una unidad al guarismo del subtraendo, y entonces hubiera dicho: de 5 á 10 van 5, y llevo 1; 9 y 1 que llevo son 10, de 10 á 10 no va nada, y de 10 llevo 1; 6 y 1 que llevo son 7, de 7 á 10 van 3, y de 10 llevo 1; 2 y 1 que llevo son 3, de 3 á 7 van 4 y no llevo nada; de 7 á 13 van 6, y llevo 1; 5 y 1 que llevo son 6, de 6 á 10 van 4, y de 10 llevo 1; 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 6 va 1; y de nada á 1 va 1; con lo qual veo que me sale la misma resta que por el método anterior. Así, los principiantes elegirán el método que les parezca mas fácil; pero deben tener entendido que el segundo es el mas conforme con las operaciones que se han de executar en lo sucesivo.

49 De esta operacion se usa siempre que se trata de averiguar la diferencia entre dos números, ó de saber quanto le falta á un número paraque sea igual con otro. Así, si yo tratase de averiguar lo que

ahorraba un sugeto que tenia de renta anualmente 56298 reales, y cuyo gasto era solo de 38179 reales, advertiria que lo que ahorraba estaba representado por la diferencia entre estos dos números; pues el ahorro era el sobrante de la renta sobre el gasto; y executando la resta por el método que se acaba de exponer, hallaria que ahorraba 18119 reales.

Prueba de la operacion de sumar y de la de restar.

50 Ya hemos dado las reglas para sumar y restar, y hemos manifestado en la demostracion de los problemas, de que formaban la resolucion, que siguiéndolas se deberá obtener el resultado que deseábamos; pero como, á causa de nuestra limitacion, puede suceder que en la práctica de dichas reglas cometamos algun error, debemos manifestar por qué medios se puede averiguar, lo qual se llama *probar una operacion*; de manera que prueba de una operacion es *aquella otra operacion por medio de la qual nos cercioramos de que la primera está bien executada.* En general la operacion que debe servir de prueba de otra debe ser su opuesta, porque es muy raro el que se compensen los errores; y por esta causa la operacion de sumar se prueba restando, y la de restar sumando, en esta forma:

```
 47259
 20503
    49
   625
 15903
 -----
 84339
 ̶4̶2̶4̶2 0
 0000
```

Si quisiera averiguar si la operacion executada (39) estaba bien hecha, empezaria á sumar por la columna de especie superior, esto es, por la izquierda, y diria: 4 y 2 son 6, y 1 son 7, este 7 lo restaria del 8 que tiene debaxo, con lo que me queda 1 que pongo debaxo del 8; despues paso á la columna inmediata y digo: 7 y 5 son 12, este 12 lo resto del 4 que está debaxo, junto con el 1 que está debaxo del 8, y que expresa 10 respecto del 4, de manera que diré: de 12 á 14 van 2, que pongo debaxo del 4, y borro el 1 anterior ó pongo debaxo de él un 0 en la forma que alli se ve; paso despues á la columna inmediata y digo: 2 y 5 son 7, y 6 son 13, y 9 son 22, y resto este 22 del 3 que tiene debaxo, junto con las dos decenas que hay debaxo del 4, diciendo: de 22 á 23 va 1, que pongo debaxo del 3, y borro el 2 ó pongo un 0 debaxo de él, porque no me ha quedado resta de las decenas: paso á la otra columna y digo: 5 y 4 son 9, y 2 son 11, que resto del 3, junto con el 1 anterior, esto es, de 13, diciendo: de 11 á 13 van 2, que pongo, y borro el 1 anterior ó pongo un 0 debaxo; paso por último á la otra columna y digo: 9 y 3 son 12, y 9 son 21, y 5 son 26, y 3 son 29, y restando este 29 del 9 que está debaxo, junto con las dos decenas que hay debaxo del anterior, esto es, de 29, me resulta 0 que pongo debaxo del 9, y borro el 2 anterior ó pongo debaxo de él un 0; y como de executar todo esto no nos queda por último ninguna resta, es señal de haber practicado bien la operacion.

En efecto; por este procedimiento lo que hemos hecho ha sido quitar de la suma total: 1.º la suma de todas las decenas de millar de los sumandos, despues la de los miliares, luego la de las centenas, luego la de las decenas, y finalmente la de las unidades; luego hemos quitado de la suma total la suma de todas las partes de los sumandos; luego hemos quitado la suma ó el valor de todos ellos; y como en la suma total no debia haber ni mas ni menos que el valor de todos los sumandos, resulta que la resta debe ser igual con cero; pues sino lo fuese, en la suma hallada antes habria mas ó menos que el valor de todos los sumandos, y estaria por consiguiente mal executada la operacion.

51 *Escolio.* Hemos dicho en esta operacion que al restar en la segunda columna el 12 del 14, despues de puesto el 2 que sale por resta, se pueden executar dos cosas: ó borrar el 1 que está debaxo del 8, ó poner un o debaxo de él. Hemos hecho lo primero por conformarnos con lo que dicen todos los autores de Aritmética; pero esto en casos complicados tendria sus inconvenientes, y por eso es mejor poner el o ó la resta que quede, debaxo del 1, que sirve en todas ocasiones, como manifestaremos.

Supongamos que se quiera averiguar si la operacion executada (41) está bien hecha; para esto, colocaremos los sumandos y la suma 935574 por el mismo órden que allí estan y aqui se presenta:

Empiezo á sumar por la izquierda y digo: 2 y 1 son 3, de 3 á 9 van 6, que pongo debaxo del 9; paso despues á la siguiente columna, y la suma 57 la resto del 3, junto con el 6 que está debaxo del 9, esto es, de 63, diciendo: de 57 á 63 van 6, que pongo debaxo del 3, y o debaxo del 6 anterior, porque no me ha quedado ninguna unidad en el lugar de las decenas; ó tambien pudiera hacer esta resta diciendo: de 7 á 13 van 6 que pongo, y de 13 llevo 1; 1 y 5 del 57 son 6, de 6 á 6 del 63 no va nada, y por consiguiente pongo o debaxo del primer 6; paso á la columna inmediata, y su suma 55 la resto del 5, junto con el 6 anterior, diciendo: de 55 á 65 van 10, pongo el o debaxo del 5, y el 1 debáxo del 6 anterior en la forma que allí se ve (aqui es donde no tiene lugar la regla de los demas autores). Paso á la columna inmediata, y su suma 94 la resto del 5, junto con el o y el 1 que hay en las columnas anteriores, esto es, de 105, diciendo: ó bien de una vez de 94 á 105 van 11, y pongo un 1 debaxo del 5, el otro 1 debaxo del o, y un o por la parte inferior del 1 que está debaxo del 6; ó hago la resta diciendo: de 4 á 5 va 1, que pongo debaxo del 5, de 9 á 10 va 1 que pongo debaxo del o, de 10 llevo 1, y de 1 á 1 que está debaxo del 6, no va nada y pongo o; paso á la otra columna, y su suma 110 la resto del 7 con los dos unos anteriores, esto es, de 117 y digo: de 110 á 117 van 7 que pongo debaxo del 7,

54984
76698
85772
43886
3786
243576
193893
4987
87682
998
7677
53084
2893
75658
———
935574
660170
01100
00

y o debaxo de los unos anteriores, porque de 117 llevo 11, y de 11 á 11 no va nada; paso finalmente á la última columna, y su suma 74 la resto del 4 que está debaxo, junto con el 7 anterior, esto es, de 74, y como de 74 á 74 no va nada, pongo o debaxo del 4, y o tambien debaxo del 7, porque de 74 llevo 7, que restado del 7 que está antes da tambien cero; y como todos los guarismos inferiores son cero, se sigue que la operacion está bien executada.

Tambien se pudiera haber probado esta operacion restando sucesivamente de la suma total cada sumando; pero como esto seria mucho mas complicado que la misma operacion, en la práctica jamas se prueba la adicion, pues es mas fácil executarla otra vez.

52 La operacion de restar se prueba *sumando el subtraendo con la resta, y si la suma es igual con el minuendo es prueba de que la operacion está bien hecha, sino no lo estará*; v. g. si quisiera averiguar si la operacion (48) estaba bien executada, no haria mas que tirar una raya debaxo de la resta, y sumar como aqui se ve, el subtraendo 4572695 con la resta 11464305.

16037000
4572695
11464305
16037000

Y saco la suma 16037000 que es igual con el minuendo; por lo que digo que la operacion estaba bien practicada. Esta prueba es tanto mas expedita quanto que no se necesita tampoco tirar ninguna raya; porque se puede ir sumando el subtraendo con la resta, y viendo al mismo tiempo si van saliendo los guarismos del minuendo.

El fundamento de esta prueba es, que como la resta es lo que le falta al subtraendo para ser igual con el minuendo, si esto que falta al subtraendo se lo añadimos, nos vendrá el minuendo. Tambien pudiéramos executar esta prueba, quitando la resta del minuendo, y si nos venia por exceso el subtraendo seria prueba de estar bien executada la operacion: lo qual se funda en que componiéndose el minuendo del subtraendo y de la resta, si le quitamos esta, nos debe venir el subtraendo.

De la multiplicacion ó de la operacion de multiplicar.

53 Vamos ahora á tratar de la segunda operacion de aumentar que es la de *multiplicar*. Esta es un caso particular de la de sumar, que es quando todos los sumandos son iguales: así la suma indicada $4+4+4=12$, da á conocer que si tubiésemos un medio de tomar de un golpe tres veces el sumando 4, tendríamos inmediatamente la suma. Para hallar esto con mucha mas brevedad que por la suma, quando el sumando que se repite es complicado y se ha de sumar un gran número de veces, se ha inventado la *multiplicacion*; y así se dice que multiplicar es *tomar un número tantas veces como unidades tiene otro*. La operacion por medio de la qual se executa esto, se llama *multiplicacion*; el número que se

ha de tomar cierto número de veces se llama *multiplicando*; aquel que con sus unidades expresa las veces que se ha de tomar el multiplicando, se llama *multiplicador*, y lo que resulta de la operacion se llama *producto*; al multiplicando y multiplicador juntos se les da el nombre de *factores* del producto.

La operacion de multiplicar se indica escribiendo el multiplicando, despues un punto ó este signo ×, y luego el multiplicador; de modo que para indicar que se ha de multiplicar el 4 por el 3, lo haremos así: 4. 3 ó 4×3, y para indicar el resultado se usa tambien del signo =; de manera que 4 . 3=12 ó 4×3=12, expresa que el producto de multiplicar 4 por 3 es 12, y se lee: 4 *multiplicado por* 3 *igual* ó *es igual á* 12. Ocurre con mucha freqüencia el hacer oficios de multiplicando ó de multiplicador, sumas ó restas indicadas; y en este caso se encierran en un paréntesis de este modo: (3+1)×(5—2)=12; lo que quiere decir que la suma de 3 con 1 que es 4, se debe multiplicar por lo que queda de restar 2 de 5 que es 3; y por eso hemos puesto el producto 12. Es muy esencial saber hacer uso de los paréntesis, y por eso advertiremos que el signo de multiplicar solo extiende sus facultades tanto á derecha como á izquierda, hasta que encuentre un signo + ó un signo — que no esté dentro de paréntesis.

54 Aqui explicaremos esta operacion, refiriéndonos á números abstractos; pero es necesario advertir que por la naturaleza de la multiplicacion, hace oficios de multiplicando el que servia de sumando, de multiplicador el número que expresa las veces que se habia de sumar el multiplicando; y de producto el que allí era la suma; y como la suma debe ser de la misma especie que los sumandos, resulta que el producto debe ser de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador debe ser un número abstracto, que solo expresa las veces que se ha de tomar ó sumar el multiplicando. En algunas qüestiones conviene distinguir al multiplicando y al multiplicador; más en el producto no influye el que se truequen los oficios del multiplicando y multiplicador, como vamos á manifestar en el siguiente:

55 TEOREMA. *El producto no se altera aun quando se tome por multiplicando al multiplicador y al contrario*; ó lo que es lo mismo: *el órden de los factores no altera el producto.*

Explicacion. Supongamos, por exemplo, que se me pida el producto de multiplicar 4 por 3: voy á demostrar que el producto será el mismo ya multiplique el 4 por el 3, ó ya multiplique el 3 por el 4.

Dem. Pues que la multiplicacion es una suma abreviada, tendré que sumando tres veces el 4 hallaré el producto que busco; pero si descompongo á cada sumando 4 en las quatro unidades de que consta, deberé sacar el mismo resultado de sumar estas unidades que de sumar los tres 4 á que equivalen; por lo mismo indicando y executando la operacion como se presenta á la vuelta:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$
$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$
$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3$$

observo que el conjunto de unidades que estan á la derecha del signo de igualdad, equivalen á los tres 4 que estan en columna; pero estas mismas unidades sumadas equivalen á los quatro 3 que hay debaxo de la raya; luego (Introd. ax. 5.º) los tres 4 de la columna equivalen á los quatro 3 de debaxo de la raya; luego si tres 4 equivalen á quatro 3, será tres veces un 4 igual quatro veces un 3, y por lo mismo tres veces 4 es igual á quatro veces 3 ó $3 \times 4 = 4 \times 3$.

O de otro modo: el conjunto de unidades en que estan descompuestos los 4 es el mismo, ya se considere en lineas que vayan de izquierda á derecha, ya en lineas de arriba abaxo; pero si se considera en lineas de izquierda á derecha hay tres lineas de á quatro unidades, y si se considera en lineas de arriba abaxo hay quatro lineas de á tres unidades; luego tres veces una linea de quatro unidades equivalen á quatro veces una linea de tres; luego tres veces quatro unidades es igual á quatro veces tres unidades; luego tres veces quatro igual quatro veces tres, ó lo que es lo mismo $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Y como podríamos aplicar este raciocinio á qualesquiera otros factores (pues siempre se descompondria el multiplicando en las unidades de que constase, y se pondria por sumando tantas veces como unidades tuviese el multiplicador) resulta en general que el órden de los factores no altera el producto, que era lo que debia demostrar (*).

Esc. Si se executa la operacion se verá que los tres 4 sumados valen 12, y que los quatro 3 sumados valen tambien 12, lo qual servirá para comprobar la operacion, más no para demostrar la proposicion; pues la verdad de esta no depende del valor de los números que entran en la operacion.

Cor. De aqui se deduce que quando se tengan indicadas muchas multiplicaciones, no importa nada la colocacion de los factores; y así, si yo quiero multiplicar el producto 12, de 4 multiplicado por 3, por 2, podré poner $4 \times 3 \times 2$, ó $3 \times 4 \times 2$, ó $2 \times 3 \times 4$, ó $2 \times 4 \times 3$. En efecto, quando indico $4 \times 3 \times 2$, doy á entender que el producto de los dos primeros, le debo multiplicar por 2; y como el producto de estos dos primeros no se altera, ya se coloquen 4×3 ó 3×4, resulta la primera transformacion $3 \times 4 \times 2$; ahora, en estas dos transformaciones con $4 \times 3 \times 2$ y $3 \times 4 \times 2$, quiero

---

(*) *En adelante expresaremos esta frase por la qual debe concluir todo teorema con las letras* L. Q. D. D. *iniciales de* lo que debia demostrar.

indicar que el producto de los dos primeros le debo multiplicar por 2; y como puedo cambiar los oficios de multiplicando y multiplicador, podré tomar al 2 por multiplicando, y al producto indicado 4×3 ó 3×4 que hace oficios de multiplicando, por multiplicador, y por lo mismo tendré:

$$2\times4\times3 \text{ y } 2\times3\times4\,;$$

y como lo mismo se aplicaria quando hubiese mas factores, queda deducida la proposicion.

56 Entendido esto, para poder executar una multiplicacion, es indispensable saber los productos que resultan de multiplicar entre sí un número dígito por otro dígito; sabida ya la operacion de sumar no puede costar esto trabajo; pues si me propusiese multiplicar como antes el 4 por el 3, diria 4 y 4 son 8, y 4 son 12, y como ya he reunido tres quatros, diré que 12 es el producto pedido. Más como conviene acostumbrarse á encontrar de una vez el producto, pondremos aqui una tabla en que esten contenidos todos ellos; la qual, despues de verificada por los principiantes, la deberán encomendar á la memoria.

Tabla de los productos de los números dígitos.

1 por 1 . es. 1	2 por 2 . son 4	3 por 3 . son 9
1 por 2 . . . 2	2 por 3 . . . 6	3 por 4 . . . 12
1 por 3 . . . 3	2 por 4 . . . 8	3 por 5 . . . 15
1 por 4 . . . 4	2 por 5 . . . 10	3 por 6 . . . 18
1 por 5 . . . 5	2 por 6 . . . 12	3 por 7 . . . 21
1 por 6 . . . 6	2 por 7 . . . 14	3 por 8 . . . 24
1 por 7 . . . 7	2 por 8 . . . 16	3 por 9 . . . 27
1 por 8 . . . 8	2 por 9 . . . 18	
1 por 9 . . . 9		
4 por 4 son 16	5 por 5. son 25	6 por 6 son 36
4 por 5. . . 20	5 por 6. . . 30	6 por 7. . . 42
4 por 6. . . 24	5 por 7. . . 35	6 por 8. . . 48
4 por 7. . . 28	5 por 8. . . 40	6 por 9. . . 54
4 por 8. . . 32	5 por 9. . . 45	
4 por 9. . . 36		
7 por 7 son 49	8 por 8 son 64	9 por 9 son 81
7 por 8. . . 56	8 por 9. . . 72	
7 por 9. . . 63		

10 por 10 son.	100
10 por 100.	1000
10 por 1000	10000
10 por 10000	100000
10 por 100000.	1000000

57 Aunque la tabla que acabamos de poner es muy á propósito para aprender estos productos, no obstante vamos á poner otra en donde se hallan, que merece llamar nuestra atencion, tanto por lo ingeniosa que es, y porque á semejanza de ella se necesitan formar otras en lo sucesivo, como para conservar el nombre de Pitágoras su inventor, y del qual ha recibido el nombre de

Tabla Pitagórica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La formacion de esta tabla es la siguiente: primero se escriben los nueve números dígitos por su órden, empezando de izquierda á derecha y separándolos con una raya de arriba abaxo; despues se pone debaxo una raya, se suma cada guarismo consígo mismo, y se pone la suma debaxo de esta raya entre las dos que van de arriba abaxo que comprendian al que se sumó. Despues se tira debaxo de estas sumas otra raya, y se suma cada número de esta segunda fila que va de derecha á izquierda con el de la primera, y la suma se pone debaxo en la columna correspondiente. Luego, se suma cada número de esta fila con el correspon-

diente de la primera, y así se continúa: de manera que todo el artificio de esta tabla consiste en sumar consigo mismo los números de la primera columna, y despues en sumar los números de la última columna formada con los de la primera.

Sirve esta tabla para hallar el producto de dos números dígitos qualesquiera, para lo qual *se busca uno de los factores en la primera columna, que va de izquierda á derecha, y el otro en la primera que va de arriba abaxo; se ve el número que hay en la casilla en que se encuentran las dos columnas, que principian en las casillas donde estan los factores, y este será el producto.* Así, si quiero averiguar el producto de 4 multiplicado por 3, buscaré el 4 en la 1.ª columna que va de izquierda á derecha, y el 3 en la 1.ª que va de arriba abaxo, veré en que casilla se encuentran la columna que de arriba abaxo empieza por el 4, y la que de izquierda á derecha empieza por el 3: y como en esta casilla hallo 12, digo que 12 es el producto de 4 por 3. El producto de 7 por 6 es 42; el de 9 por 4 es 36, &c.

Cuya práctica se funda en que el número de cada casilla se compone de tantas veces el correspondiente de la superior, como unidades tiene el que está á su izquierda en la primera columna.

58 Ahora, los casos que pueden ocurrir en la multiplicacion son tres: *multiplicar un número dígito por otro dígito*; *un compuesto por un dígito, ó un dígito por un compuesto* (que es lo mismo, porque nada importa (55) el cambiar los oficios de los factores); *y un compuesto por otro compuesto.*

Para multiplicar un número dígito por otro dígito no se necesita mas regla que saber la tabla de memoria: para multiplicar un número compuesto por un dígito ó un dígito por un compuesto, reuniremos las reglas en el siguiente:

59 PROBLEMA. *Multiplicar un número compuesto por un dígito, ó un dígito por un compuesto.*

Res. Colóquese el dígito debaxo de las unidades del compuesto, tírese una raya por la parte inferior, y empiécese á multiplicar por la derecha, esto es, por las unidades de inferior especie; y así, lo primero que se debe hacer es multiplicar el guarismo que expresa las unidades del multiplicando, que es el compuesto, por el multiplicador que es el dígito; si en este producto hay solo unidades, se colocan debaxo de las unidades de los factores; si contiene solo decenas, se pone o en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata; y si contiene decenas y unidades, se ponen las unidades debaxo de las unidades de los factores, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata.

Despues, se multiplican las decenas del multiplicando por el mismo multiplicador; á su producto se añaden las que se llevaban del producto

de las unidades, y se colocan las decenas que resulten debaxo de las decenas, guardando las centenas, si las hay, para añadirlas al producto de las centenas de la columna inmediata. Luego, se multiplican por el mismo multiplicador las centenas del multiplicando, á cuyo producto se añaden las que se llevaban del producto de las decenas, y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicando.

EXEMPLO. Supongamos que se quiere multiplicar el número 356 por 4 ó 4 por 356; como al executar esta operacion no importa nada el que se tome por multiplicando al multiplicador, y al contrario, siempre se toma por multiplicador el mas sencillo, que aquí es el número dígito 4, y así lo colocaré debaxo del 356, como acabamos de decir, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 356 \\ 4 \\ \hline 1424 \end{array}$$

Tiro debaxo una raya, y empiezo á multiplicar por las unidades del multiplicando, diciendo: 6 por 4 son 24; y como en 24 hay 2 decenas y 4 unidades, coloco el 4 debaxo de las unidades de los factores, y guardo las dos decenas para añadirlas al producto de las decenas, y digo: 5 por 4 son 20, y 2 que llevaba son 22; y como en 22 que son decenas, hay dos centenas y dos decenas, pongo las 2 decenas debaxo de las de los factores, y guardo las 2 centenas para añadirlas al producto de la columna siguiente, en la qual digo: 3 por 4 son 12, y 2 que llevaba son 14 que son centenas, porque el multiplicando 3 expresaba centenas, y como en 14 centenas hay un millar y 4 centenas, coloco las 4 centenas debaxo de las de los factores, y guardo el 1 millar para añadirlo al producto de la columna siguiente; pero como ya no hay mas guarismos en el multiplicando, no se puede executar otra multiplicacion; y así este 1 millar le coloco hácia la izquierda del 4 en el producto, y saco que 356 multiplicado por 4 da 1424.

Dem. La colocacion de los factores no es esencial, solo se executa por comodidad; la raya se tira para separar el multiplicador del producto que se ha de colocar debaxo: todas las demas reglas estan reducidas á multiplicar las unidades, las decenas, las centenas, &c. esto es, todas las partes del multiplicando por el multiplicador; y como al mismo tiempo vamos reuniendo el producto de las unidades con el de las decenas, porque añadimos á este las decenas que llevábamos del producto anterior, y estas dos con el de las centenas, &c. nos resulta al fin que en el número que tenemos debaxo de la raya, se halla el producto de todas las partes del multiplicando; luego en virtud del 2.º axîoma (Introd.) tenemos el producto de todo el multiplicando. L. Q. D. H.

60 En la práctica no se necesita ir diciendo la especie de unidades que expresa cada producto particular: en el exemplo anterior se han puesto todas las palabras, porque como es el primero, es preciso comprender bien lo que se hace; pero en la práctica no se necesitan mas palabras que las que se ven en el exemplo siguiente: supongamos que quiera multiplicar 28974 por 7: colocaré los números como he dicho (59) y se presenta en la página siguiente:

Y despues de tirada la raya diré: 4 por 7 son 28, pongo el 8 y llevo 2; 7 por 7 son 49, y 2 que llevaba son 51, pongo 1 y llevo 5; 9 por 7 son 63, y 5 que llevaba son 68, pongo 8 y llevo 6; 8 por 7 son 56, y 6 que llevaba son 62, pongo 2 y llevo 6; 2 por 7 son 14, y 6 que llevaba son 20, pongo 0 y llevo 2; que como no hay mas guarismos en el multiplicando, pongo 2 á la izquierda del 0, y tengo en 202818 el producto de 28974 por 7.

$$\begin{array}{r} 28974 \\ 7 \\ \hline 202818 \end{array}$$

61 Antes de pasar al tercer caso, haremos algunas observaciones que aclararán mucho su procedimiento. En primer lugar, quando uno de los factores sea igual con la unidad, el producto será igual con el otro factor; porque si la unidad es el multiplicador, quiere decir que solo es sumando una vez el multiplicando, y en este caso no habiendo mas de un sumando, la suma que aqui es el producto será igual con él. Si la unidad hiciese oficios de multiplicando, de colocarle por sumando tantas veces como unidades hay en el multiplicador, resultará una suma con tantas unidades como el multiplicador. Si uno de los factores es cero, el producto será tambien cero; porque de tomar un número ninguna vez, ó de tomar muchas veces nada, resultará siempre nada.

62 Ahora, atendiendo al sistema de numeracion, advertimos que á un número se le hace diez veces mayor (22) de lo que era, ó equivale á diez veces él mismo, solo con añadirle un cero; luego para multiplicar un número qualquiera por 10 basta añadirle un cero; por la misma razon se tendrá un número multiplicado por 100 quando se le añadan dos ceros; y en general resulta del sistema de numeracion que para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, no hay mas que añadir á dicho número tantos ceros como habia despues de la unidad.

63 De aqui se sigue que la multiplicacion de un número qualquiera por otro que se componga de un guarismo solo significativo y de ceros, se reduce á la de por uno dígito; pues en este caso se multiplica el número compuesto por el guarismo significativo, y al producto se le añadirán tantos ceros como habia despues del guarismo significativo en el multiplicador.

En efecto; si tengo que multiplicar 728 por 300, indicaré la operacion de este modo:

$$728 \times 300;$$

pero el 300 es lo mismo que 3×100 por la observacion anterior, luego poniendo en vez de 300 este valor, la expresion de arriba será:

$$728 \times 3 \times 100;$$

pero aqui tengo indicado que el producto de 728 por 3 que es 2184, le debo multiplicar por 100; y como para multiplicar por 100 basta solo añadir dos ceros, resulta que si al 2184 le añadimos dos ceros, tendremos que 218400 es el producto de 728 por 300.

64 Comprendido esto, tenemos ya lo suficiente para entender los fundamentos de la resolucion del tercer caso, que daremos en el siguiente:

PROBLEMA. *Multiplicar un número compuesto por otro compuesto.*

Res. Tómese por multiplicador el que tenga menos guarismos, y póngase debaxo del multiplicando que es el otro número, de modo que se correspondan en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, &c.; tírese una raya, multiplíquese todo el multiplicando por el primer guarismo de la derecha del multiplicador (60), cuyo producto se pondrá debaxo de la raya, de modo que caigan las unidades, decenas, &c. debaxo de las unidades, decenas, &c. de los factores; multiplíquese despues todo el multiplicando por el segundo guarismo del multiplicador, contando siempre de derecha á izquierda, y colóquese este producto un lugar mas hácia la izquierda, de modo que el último guarismo de la derecha de este segundo producto parcial (*), esté debaxo del segundo guarismo del primer producto. Luego, multiplíquese todo el multiplicando por el guarismo siguiente del multiplicador, y colóquese este producto parcial debaxo del antecedente, corriéndole tambien un lugar hácia la izquierda; y continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador. Despues se tirará debaxo de estos productos parciales otra raya, y se sumarán todos ellos poniendo la suma debaxo de dicha raya; con lo qual queda executada la multiplicacion, expresando la suma el producto total.

EXEMPLO. Supongamos que hay que multiplicar 9658 por 734; tomaré por multiplicador el 734, porque es el menor, y lo colocaré debaxo del multiplicando 9658, en esta forma:

```
   9658
    734
-------
  38632
 28974
67606
-------
7088972
```

Y despues de tirada la raya, empezaré multiplicando el 9658 por 4, que es el primer guarismo del multiplicador, diciendo: 8 por 4 son 32, pongo 2 y llevo 3; 5 por 4 son 20, y 3 que llevaba son 23, pongo 3 y llevo 2; 6 por 4 son 24, y 2 que llevaba son 26, pongo el 6 y llevo 2; 9 por 4 son 36, y 2 que llevaba son 38, pongo 8 y llevo 3; que como no hay mas guarismos coloco el 3 á la izquierda del 8. Paso ahora á multiplicar todo el multiplicando 9658 por el segundo guarismo del multiplicador, que es el 3, y digo: 8 por 3 son 24, pongo el 4 debaxo del segundo guarismo del primer producto parcial 38632, que es el 3 (porque he dicho que se debe correr un lugar mas hácia la izquierda cada producto parcial) y de 24 llevo 2; 5 por 3 son 15, y 2 que llevaba son 17, pongo el 7 y llevo 1;

(*) *A cada producto que resulta de multiplicar el multiplicando por un guarismo del multiplicador, se le llama producto* parcial, *porque proviene de multiplicar por una parte: de manera que siempre que de aquí en adelante usemos de la voz* parcial, *será con el objeto de manifestar que aquella operacion ó resultado á que se aplique, se ha executado en parte.*

6 por 3 son 18, y 1 que llevaba son 19, pongo el 9 y llevo 1; 9 por 3 son 27, y 1 que llevaba son 28, pongo el 8 y llevo 2; que como no hay mas guarismos en el multiplicando, le coloco á la izquierda del 8. Paso despues á multiplicar todo el multiplicando por el tercer guarismo del multiplicador, que es el 7, y digo: 8 por 7 son 56, pongo el 6 debaxo del 7, segundo guarismo del producto parcial antecedente, y llevo 5; 5 por 7 son 35, y 5 que llevaba son 40, pongo 0 y llevo 4; 6 por 7 son 42, y 4 que llevaba son 46, pongo el 6 y llevo 4; 9 por 7 son 63, y 4 que llevaba son 67, pongo el 7 y llevo 6, que coloco á la izquierda del 7, por no haber mas guarismos en el multiplicando. Tiro una raya, porque ya no hay mas guarismos en el multiplicador, y sumo todos estos productos parciales, diciendo: 2 es 2 que pongo debaxo de la raya en la misma columna; 3 y 4 son 7, que pongo debaxo; 6 y 7 son 13, y 6 son 19, pongo el 9 y llevo 1; 8 y 1 que llevaba son 9, y 9 son 18, pongo el 8 y llevo 1; 3 y 1 que llevaba son 4, y 8 son 12, y 6 son 18, pongo el 8 y llevo 1; 2 y 1 que llevaba son 3, y 7 son 10, pongo el 0 y llevo 1; 6 y 1 que llevaba son 7, que pongo debaxo, y tengo en la suma 7088972 el producto total de los dos números propuestos.

Dem. La colocacion de los factores es por comodidad; el tirar la raya es para separar el multiplicador del producto de multiplicar el multiplicando por las unidades del multiplicador; todas las demas reglas estan reducidas á multiplicar todo el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y hemos de colocar este producto debaxo del guarismo de las decenas del anterior, porque de multiplicar por decenas (63) debe resultar al fin un cero, y los guarismos significativos deben empezar desde las decenas en adelante, y por consiguiente se deben colocar debaxo de las decenas del primer producto parcial para poder executar despues la suma; despues hemos multiplicado por las centenas, y así sucesivamente hasta haber multiplicado por todos los guarismos ó partes del multiplicador; pero todos estos productos de haber multiplicado el multiplicando por las partes del multiplicador, los hemos sumado, y reunido por consiguiente en un solo número, que es el que sale debaxo de la raya; luego (Introd. ax. 3.º) este número que contiene la suma de los productos del multiplicando por todas las partes del multiplicador, contendrá el producto de todo el multiplicando por todo el multiplicador. L. Q. D. H.

65 Hemos prometido en la introduccion que combinaríamos la análisis con la síntesis para conciliar la claridad, la sencillez, la exâctitud, y la facilidad en las operaciones, con el método de invencion; y así vamos á resolver este caso analíticamente.

Supongamos que tengo que multiplicar el número 9658 por el 734; por lo que indicaremos el producto de esta manera 9658×734; pero en virtud del sistema de numeracion, tenemos que el multiplicador se compone de 7 centenas, 3 decenas y 4 unidades; luego lo podremos poner

baxo esta forma 700+30+4; y por lo mismo la operacion que tenemos arriba indicada se convertirá en 9658×(700+30+4).

Ahora, quedará hecha esta multiplicacion, si multiplicamos el multiplicando por cada parte del multiplicador; luego será:

$$9658\times(700+30+4)=9658\times700+9658\times30+9658\times4;$$

que efectuando la multiplicacion, teniendo presente lo advertido (63), se convierte en 6760600+289740+38632;

y para executar esta suma colocaremos los sumandos como se ha dicho (38), y tendremos:

pero como los ceros últimos no hacen al caso, podremos concebir que no estan, y entonces quedará la colocacion de los productos parciales como antes (64), y podremos deducir por consiguiente la regla expuesta en la resolucion del problema sintéticamente.	386 3 2 2897 4(0 67606(0 0 ——————— 70889 7 2

Con esto se advertirá bien claramente la excelencia de uno y de otro método, y se echará de ver la ventaja del analítico; sin embargo, si le hubiéramos usado en la resolucion de los problemas anteriores, los principiantes en la práctica querrian hacer el mismo raciocinio, lo que los detendria sobremanera; y sino le hacian no quedarian satisfechos, porque al fin las reglas que se dan generalmente se han deducido de un exemplo particular; y aunque el argumento de analogía tiene mucha fuerza, no obstante no tiene tanta como aquel que directamente llega desde las reglas generales á convencer de que conseguirá su objeto en general. Por esta causa seguiremos siempre con nuestro método alternado, de manera que resulte la mayor utilidad y brevedad posible al principiante, que es para quien escribimos; pues, atendiendo al número de cosas que tenemos necesidad de saber, no podemos ver sin un particular sentimiento el que los autores quieran sostener sus caprichos ú opiniones en perjuicio de los principiantes, cuyo tiempo de estudio jamas se economizará lo suficiente.

66 Por esta misma razon vamos á manifestar todos los casos de abreviacion de que es susceptible esta operacion.

Ya hemos dicho que quando el multiplicador consta de un solo guarismo significativo y de ceros, queda hecha la multiplicacion con multiplicar por dicho guarismo y añadir despues los ceros; ahora vamos á probar que en general, *quando uno qualquiera de los factores ó ambos terminan en ceros, se abrevia mucho la operacion, multiplicando solo por los guarismos significativos y añadiendo al producto tantos ceros como hay al fin en ambos factores juntos.*

En efecto, si tengo que multiplicar 5800 por 37, será en virtud de lo expuesto (§ 63) 5800×37=58×100×37=(§ 55) 58×37×100; luego si multiplico al 58 por 37, y añado al producto dos ceros (62), tendré en 214600 el producto de estos tres factores ó de los dos primitivos.

Del mismo modo si fuese 43500 multiplicado por 230, tendria

$43500.230=435.100.23.10=435.23.100.10=435.23.1000=10005000$.

Luego multiplicando el 435 por el 23, y despues por 1000, lo que se consigue añadiendo tres ceros, tendremos efectuada la operacion y manifestada la regla de la abreviacion.

En la práctica se executa la colocacion y operacion como aqui se presenta: (*A*), (*B*).

(*A*)	(*B*)	(*C*)
43500	5800	742000
230	37	3500
1305	406	3710
870	174	2226
10005000	214600	2597000000

Del mismo modo, si tubiese que multiplicar 742000 por 3500, lo executaria como se ve en (*C*).

Tambien se abrevia esta operacion quando los ceros se hallan entre los guarismos significativos del multiplicador; en cuyo caso *se multiplica el multiplicando por los guarismos significativos que hay en el multiplicador hasta llegar á los ceros; en llegando á los ceros, no se multiplica por ellos, porque el producto de un número qualquiera por* 0 *siempre es* 0, *y así se pasa á multiplicar por los demas guarismos significativos; pero teniendo cuidado de correr el primer producto hácia la izquierda tantos lugares mas uno, quantos ceros hay*; es decir, que si hay un cero se debe colocar el primer producto dos lugares; si dos ceros, tres lugares, &c. mas hácia la izquierda.

Por exemplo: si tubiese que multiplicar 2576924 por 1000503, colocaria los factores de esta forma:

2576924
1000503
7730772
12884620
2576924
2578220192772

Multiplicaria todo el multiplicando por 3, que es el primer guarismo de la derecha del multiplicador, lo que me da el producto parcial 7730772; como despues del 3 hay un 0 en el multiplicador, paso á multiplicar por el primer guarismo significativo que encuentro que es el 5, y coloco este producto de modo que su último guarismo 0 cayga debaxo del segundo 7 del producto parcial antecedente, esto es, corriéndole dos lugares hácia la izquierda, porque solo hay un cero. Como despues vuelvo á encontrar ceros, paso á multiplicar por el guarismo significativo que hay despues de ellos que es el 1, coloco el producto quatro lugares mas hácia la izquierda respecto del producto parcial antecedente, porque aqui hay tres ceros; sumo despues estos productos, y saco que el número 2576924 multiplicado por 1000503 da 2578220192772 por producto.

La razon de esta práctica es, que como de multiplicar por cero resultaria cero, que no influye nada en la suma, se omite esta operacion; y como al multiplicar por cada cero se debia correr el producto un lugar hácia la izquierda respecto del anterior, el producto del primer guarismo significativo no solo se deberá correr un lugar, que por sí le correspondia, sino tantos mas quantos ceros hay.

Quando se tiene que multiplicar por 11, se puede executar inmediatamente poniendo el último guarismo; despues se suma este con el anterior, y la suma si se puede expresar con un número dígito se pone; sino, se ponen las unidades y se guarda la decena para añadirla á la suma del penúltimo con su anterior, y así se continúa. Así, si quiero multiplicar 7890356 por 11, diré: 6 es 6, que pondré en un lugar separado, y luego diré: 6 y 5 son 11, pongo el 1 á la izquierda del 6, y llevo 1 para añadir á la suma siguiente; continúo: 5 y 3 son 8, y 1 que llevaba son 9 que pongo á la izquierda; luego, 3 y 0 son 3 que pongo y sigo: 0 y 9 son 9 que pongo tambien siempre á la izquierda del último; 9 y 8 son 17, pongo el 7 y guardo el 1, y digo: 8 y 7 son 15, y 1 son 16, pongo el 6 y guardo el 1, diciendo: 7 que es el último guarismo y 1 que llevaba son 8, que pongo á la izquierda y saco el producto 86793916. La razon de esta práctica es que al hacer la multiplicacion, los productos parciales serian iguales con el multiplicando, y quedarian colocados como aquí se ve:

```
 7890356
      11
--------
 7890356
7890356
--------
86793916
```

De modo que está reducido á sumar los guarismos como dice la regla. Del mismo modo hallaríamos las reglas para quando el multiplicador fuese 111, y 1111, &c.

En la sociedad ocurre con bastante freqüencia el tener que contar por docenas, de manera que se llegan á tener en la memoria las unidades què componen hasta 9 docenas; pero por si acaso algunos no tienen esta costumbre diremos que:

1	docena ó 1 vez 12 son	12 unidades.
2	. . . .	24.
3	. . . .	36.
4	. . . .	48.
5	. . . .	60.
6	. . . .	72.
7	. . . .	84.
8	. . . .	96.
9	. . . .	108.

Con lo qual tendremos que si el multiplicador fuese 12, podríamos hallar el producto como si fuese número dígito; porque si tubiéramos que multiplicar 587 por 12 diríamos como se ve en (*A*): 7 por 12 son 84, pondríamos el 4 y guardaríamos las 8 decenas para añadirlas al producto siguiente, diciendo: 8 por 12 son 96, y 8 que llevaba son 104, pondria el 4 y reservaria las 10 decenas; despues diria: 5 por 12 son 60, y 10 que llevaba son 70, que pongo, y tengo executada la operacion como si el multiplicador fuese un número dígito.

(*A*)

```
 587
  12
----
7044
```

Quando el multiplicador tiene solo dos guarismos significativos, y el uno es la unidad, se indica la operacion y solo se multiplica por el guarismo que no es la unidad, cuidando poner este producto debaxo del multiplicando corriéndole un lugar hácia la izquierda, si el 1 se halla en el lugar de las unidades, ó hácia la derecha si en el de las decenas, en esta forma:

Donde se ve que la abreviacion solo consiste en ahorrarse el escribir una vez el multiplicando.

```
 435×71     435×17
3045        3045
-----      -----
30885       7395
```

Quando ambos factores son muy crecidos se abrevia la operacion de este modo: se forma del multiplicando una tabla análoga á la pitagórica, esto es, se pone aparte el multiplicando, y á su izquierda un 1, separándole con una raya que vaya de arriba abaxo; despues se suma consígo mismo dicho multiplicando, y esta suma se pone debaxo, colocando enfrente y á la izquierda de la raya un 2; despues se suma esta columna con el mismo multiplicando poniendo un 3 á su izquierda, y luego esta que resulte tambien con el mismo multiplicando poniendo un 4 á su izquierda, y así se continúa hasta haber formado nueve de estas columnas; despues, para hacer la multiplicacion, no se hace mas que sacar de esta tabla el número que está enfrente del guarismo que está á la izquierda de la raya, igual con el del multiplicador; despues se busca el del segundo guarismo, y se coloca un lugar mas hácia la izquierda (y si hubiese ceros se correrá tantos lugares mas uno como ceros hay) y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador; en cuyo caso se suman todos estos productos, y queda hecha la operacion.

EXEM. Si tubiese que multiplicar 3875693209037 por 46907403153, formaria una tabla del primero 3875693209037 como aqui se presenta:

1	3875693209037
2	7751386418074
3	11627079627111
4	15502772836148
5	19378466045185
6	23254159254222
7	27129852463259
8	31005545672296
9	34881238881333

```
                3875693209037
                  46907403153
          ---------------------
               11627079627111
              19378466045185
             3875693209037
            11627079627111
           15502772836148
          27129852463259
        34881238881333
       23254159254222
      15502772836148
      -----------------------
      181798703853642861893661
```

Despues, coloco los números para hacer la multiplicacion: y como el primer guarismo del multiplicador es el 3, veo en la tabla qué número

hay enfrente del 3, y le coloco debaxo de la raya de modo que se corresponda con las unidades; despues veo qual es el que está en la tabla enfrente del 5, segundo guarismo del multiplicador, y le coloco debaxo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda; y así continúo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador, en cuyo caso sumo todos estos productos parciales, y tengo executada mi operacion con mucho descanso, sin tener aquella intension de espíritu que es necesaria para conservar en multiplicaciones largas las unidades que se llevan; y sin temor de tener que volver á empezar de nuevo la multiplicacion parcial, si uno se distraxo por alguna casualidad.

67 Las qüestiones que conducen á la operacion de multiplicar se presentan baxo tres aspectos diferentes, que se llaman usos de esta operacion: 1.º *quando se quiere hacer á un número un cierto número de veces mayor*; 2.º *quando, conocido el valor de una unidad, se quiere averiguar el de muchas*; y 3.º *quando se quieren reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior.*

Para hacer á un número un cierto número de veces mayor, *se le multiplica por aquel que expresa con sus unidades las veces que se le quiere hacer mayor*: v. g. si al 586 le quiero hacer 47 veces mayor, multiplicaré el 586 por 47, y tendré que el producto 27542 es un número 47 veces mayor que el 586. Quando el número de veces que se quiere hacer mayor un número, es pequeño, no se dice claramente en el lenguage vulgar; y así se debe advertir que estas palabras *tomar el duplo de un número*, *el triplo*, *el quádruplo*, *el quíntuplo*, &c. ó *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar*, *quintuplicar*, &c. equivalen á multiplicar dicho número por 2, por 3, por 4, por 5, &c. Tambien se dice *céntuplo* de un número ó *centuplicar* un número, quando se le multiplica por 100.

Quando se conoce el valor de una unidad y se quiere averiguar el de muchas, *se multiplica el valor de la unidad por el número de ellas.*

Por exemplo: si quiero averiguar lo que valen 891290 varas de paño á 50 reales la vara, multiplicaré el número de varas 891290 por el valor de una de ellas que es 50 reales, y hallaré que valen 44564500 reales.

La razon de esta práctica es, que por cada unidad que haya se debe tomar una vez su valor; luego se deberá tomar tantas veces el valor de una, como unidades hay.

Para reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior, *se multiplica el número de unidades de especie superior, por aquel número que con sus unidades expresa las unidades de especie inferior de que se compone la mayor.*

1.er exemplo. Quiero saber quántos pies tienen 8 varas; como la vara es la unidad de especie superior y se compone de 3 pies, multiplicaré el número 8 de varas por 3, y tendré en el producto 24 los pies que hay en 8 varas.

2.º exemplo. Quiero averiguar quántos maravedíses hay en 83 do-

blones; para esto multiplicaré el 83 por los maravedíses que tiene un doblon, que son 2040, y sacaré que son 169320 maravedíses; pero como no es fácil conservar en la memoria las unidades de especie inferior de que se compone otra superior quando hay otras unidades intermedias, y lo que se conserva con facilidad es el órden con que se suceden las unidades, es mas cómodo irlas reduciendo sin interrupcion; y así, en el exemplo propuesto veré primero quántos pesos hay en los 83 doblones; despues los pesos que saque, veré los reales que componen, y luego este número de reales veré los maravedíses que tienen en esta forma:

Primero multiplico los 83 doblones por 4, que son los pesos que tiene un doblon, y saco que en 83 doblones hay 332 pesos; multiplico despues estos 332 pesos por 15, que son los reales que tiene un peso, y saco que los 83 doblones ó los 332 pesos tienen 4980 reales; luego multiplico este número de reales por 34, que son los maravedíses que tiene un real, y saco que los 83 doblones contienen 169320 maravedíses.

```
   83 doblones
    4
   ----------
   332 pesos
    15
   ----------
  1660
  332
   ----------
  4980 reales
    34
   ----------
 19920
14940
   ----------
169320 maravedíses.
```

3.er exemplo. Quiero averiguar quánto importan 87 quintales de seda á 12 reales la onza. Aqui primero tengo que ver las onzas que hay en 87 quintales, y luego multiplicar el número de onzas por 12 reales que es su valor; lo que haré del modo siguiente:

Multiplico los 87 quintales por 4, que son las arrobas que hay en el quintal, y saco 348 arrobas; multiplico despues estas arrobas por 25, que son las libras de que se compone la arroba, y saco 8700 libras; multiplico despues este número de libras por 16, que son las onzas de que se compone la libra, y saco que los 87 quintales tienen 139200 onzas; y multiplicando ahora este número de onzas por 12 reales, valor de la onza, tendré 1670400 reales, que será el valor de los 87 quintales de seda á 12 reales la onza.

```
     87 quintales.
      4
    ---------
    348 arrobas.
     25
    ---------
   1740
   696
    ---------
   8700 libras.
     16
    ---------
  52200
  8700
    ---------
 139200 onzas.
     12
    ---------
 278400
139200
    ---------
1670400 reales.
```

4.° exemplo. Si quisiera saber quántos quartillos habia en 63 cahices de trigo, primero multiplicaria por 12 y sacaria 756 fanegas; este número de fanegas le multiplicaria por 12 y sacaria 9072 celemines; y multiplicando esto por 4 sacaria 36288 quartillos, que serán los que habrá en los 63 cahices.

De la operacion de dividir ó de la division.

68 Vamos ahora á tratar de la segunda operacion de disminuir que se origina de la resta, quando intentamos averiguar quántas veces se puede restar el subtraendo del minuendo; y como tantas veces como se pueda restar, de tantas veces el subtraendo se compondrá el minuendo, ó tantas veces estará contenido el subtraendo en el minuendo, queda reducida entonces esta operacion de restar á la de *dividir*; y se dice que dividir *es averiguar quántas veces un número contiene á otro.* La operacion por medio de la qual se executa esto, se llama *division*; el número que ha de contener, ó lo que es lo mismo, el que se ha de dividir, se llama *dividendo*; el que ha de estar contenido, ó aquel por quien se ha de partir, se llama *divisor*; y lo que resulta *quociente*; al dividendo y divisor juntos se les da el nombre de *términos de la division.*

Así, si quisiese averiguar quántas veces podia restar el 4 del 12, diria: 12—4=8, y ya lo tengo restado una vez; ahora lo restaria del 8, diciendo: 8—4=4, y lo tengo executado dos veces; y finalmente volviéndole á restar de esta segunda resta 4, tendria 4—4=0; con lo que veo que lo he podido restar tres veces, y que está contenido por consiguiente el 4 en el 12 tres veces.

De aqui se deduce que como el dividendo hace oficios de minuendo, y el divisor de subtraendo, los dos términos de la division deben ser homogéneos (43); y el quociente que expresa las veces que se puede restar el uno del otro, será por precision un número abstracto.

69 De esto mismo se deduce tambien que se puede dar orígen á la division, considerando que hay que repartir un cierto número de cosas entre un cierto número de personas; en este caso, el método mas sencillo que hay para executarlo, es ver en abstracto quántas veces el número que expresa las personas, se puede restar del número que expresa las cosas; pues por cada vez que se pueda restar le tocará á cada persona una cosa, en cuyo caso el quociente es de la misma especie que el dividendo; y el divisor, al executar la operacion, se considera como un número abstracto.

Tambien pudiéramos haber dado orígen á la division de su inversa la multiplicacion, diciendo que *dividir es buscar un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo*; *ó que es una operacion por medio de la qual, dado un producto y uno de los factores, venimos en conocimiento del otro factor.*

Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se pone el dividendo, debaxo una raya, y luego el divisor; ó se pone el dividendo, despues dos puntos, y luego el divisor. Así, si me propongo indicar la division de 12 por 4, lo executaré en esta forma $\frac{12}{4}$, ó 12:4 que se lee: 12 *dividido por* 4; y para indicar el resultado usaremos del signo =,

que es el que sirve para dar á conocer el resultado de toda operacion indicada; de manera que como el 4 está contenido tres veces en el 12, diré: $\frac{12}{4}=3$, ó $12:4=3$.

70 Tres casos pueden ocurrir en la division, á saber: *dividir un número dígito por otro dígito*; *dividir un número compuesto por un dígito*, *y dividir un compuesto por otro compuesto.*

Para dividir un número dígito por otro dígito, y aun uno compuesto solo de dos guarismos por uno dígito, que sea mayor que el guarismo de especie superior del compuesto, no hay mas que saber los productos que resultan de multiplicar entre sí los números dígitos; porque considerando al dividendo como un producto, no hay mas que averiguar por qué número se necesita multiplicar el divisor paraque el producto sea igual al dividendo, ó el producto inmediatamente inferior á él; y si de repente no ocurre, se va multiplicando mentalmente el divisor por los números dígitos, hasta que se llegue á tener en el producto el dividendo, ó el producto inmediatamente inferior al dividendo; y aquel número por qué se haya multiplicado el divisor, será el quociente.

1.er exemplo. Quiero saber quántas veces el 8 contiene al 2, ó quánto vale ocho dividido por 2; sino veo desde luego por qué número debo multiplicar el 2 paraque produzca 8, empezaré multiplicando mentalmente el 2 por todos los números dígitos hasta que encuentre por producto el 8, ó el inferior que mas se le acerque, y así diré: 2 por 1 es 2, y como 2 no es igual con 8, sigo: 2 por 2 son 4, que como 4 no es tampoco igual con 8, continúo diciendo: 2 por 3 son 6, que como no es igual con 8, sigo: 2 por 4 son 8, y como este producto 8 es igual con el dividendo que se me dió, y para hallar este producto he multiplicado el divisor 2 por 4, digo que el quociente de dividir 8 por 2 es 4.

2.o exemplo. Si quisiera averiguar qual era el quociente de dividir 9 por 4, diria, si desde luego no advertia qual era: 4 por 1 es 4, que como 4 no es igual con 9, sigo: 4 por 2 son 8, que como tampoco es igual con 9, continúo: 4 por 3 son 12, y como 12 es mayor que 9, advierto que no cabe un número exâcto de veces el 4 en el 9, y siendo el producto próxîmo inferior al 9 el 8, digo que cabe dos veces y algo mas. Lo que el quociente debe ser mayor que el número que le corresponde, se indica de este modo: *al lado del quociente se pone la diferencia que hay entre el dividendo y el producto que resulta de multiplicar el divisor por el quociente, debaxo se pone una raya, y debaxo de la raya el divisor.* Así, como aqui la diferencia entre el producto 8 y el dividendo 9 es 1, y el divisor es 4, el verdadero quociente se indica $2\frac{1}{4}$, y se lee: *dos y un quarto.* Para leer todas estas expresiones, *se lee el número que está encima de la raya, que es la resto que queda de haber quitado del dividendo el producto del divisor, inmediato inferior, con los nombres numerales absolutos, y el que está debaxo de la raya con los nombres numerales partitivos, sino llega á 10, ó con los abso-*

lutos, *si llega ó pasa de diez*; *pero se añade despues de todo la partícula* avos; y así la expresion $2\frac{5}{16}$ se lee : *dos y cinco diez y seisavos.*

3.er exemplo. Si quisiese dividir 56 por 7, y no viese desde luego quántas veces estaba el 7 contenido en 56, ó por qué número debia multiplicar el 7 paraque resultase el 56, empezaria diciendo mentalmente: 7 por 1 es 7, veo que le falta mucho para ser igual con 56, por lo que advierto que no tengo necesidad de multiplicar por 2, por 3, ni aun por 4; y así paso á ver si multiplicándole por 5 produce el 56; y como 7 por 5 son 35, y al 35 le falta mucho para el 56, no multiplicaré por 6, sino que pasaré á multiplicar por 7, y tendré que 7 por 7 son 49; que como no es igual con 56, paso á multiplicar por 8, y tengo que 7 por 8 son 56; y como 56 es el dividendo, digo entonces que el 7 está contenido 8 veces en 56.

4.º exemplo. Si tuviese que dividir 78 por 9, como no tengo que tantear para ver si le contiene una, dos, tres, ni aun quatro veces, porque el 78 se ve inmediatamente que es bastante grande con relacion al 9, veré si le contiene 5 veces; pero 9 por 5 son 45, que es menor que el 78; y así paso á multiplicar por 6, y digo: 9 por 6 son 54, que como es mucho menor que el 78, sigo: 9 por 8 son 72, que como es menor que 78, continúo: 9 por 9 son 81, y como 81 es mayor que el 78, noto que el producto inmediatamente inferior al 78 es 72, y que así el quociente es 8; y la diferencia 6 entre 72, producto del divisor por el quociente, y 78 que es el dividendo, la pondré como dixe en el exemplo segundo, y tendré que el quociente verdadero es $8\frac{6}{9}$, que se lee : *ocho y seis novenos.*

71 Para el segundo caso reuniremos las reglas en el siguiente:

PROBLEMA. *Dividir un número compuesto por un dígito.*

Res. Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, de modo que se correspondan en un mismo renglon; tírese entre los dos una raya de arriba abaxo, y otra debaxo del divisor. Hecho esto, se toma el guarismo de especie superior del dividendo, que es el que está mas hácia la izquierda; se ve quántas veces en este guarismo está contenido el divisor, y se pone este quociente debaxo de la raya que está por la parte inferior del divisor; si el primer guarismo del dividendo es menor que el divisor, no se puede contener este en aquel, y por lo mismo se debe tomar otro guarismo mas del dividendo; y paraque se sepa los que se han tomado se pone una coma, y se ve quántas veces en aquel número de dos guarismos se contiene el divisor, conforme se ha dicho (70), poniendo por quociente lo que resulte. Despues se multiplica este quociente por el divisor, y se coloca el producto debaxo del guarismo, ó de los dos guarismos que se separaron con la coma en el dividendo; se tira debaxo una raya y se resta este producto del guarismo ó guarismos separados. Al lado de esta resta, ó al lado de 0 sino quedó ninguna, se baxa

el guarismo siguiente, y se ve quántas veces en este segundo dividendo parcial está contenido el divisor, y el número que resulte se pone en el quociente, á la derecha del guarismo hallado antes; se multiplica este segundo quociente parcial por el divisor, se coloca el producto debaxo del segundo dividendo parcial, se tira una raya y se resta. Al lado de la resta se baxa el siguiente guarismo, y así se continúa hasta que no queden mas guarismos que baxar en el dividendo, apuntando con una coma el guarismo que se baxa para no equivocarse. Si al fin quedase alguna resta se pone á la derecha del quociente con una raya y el divisor debaxo.

EXEMPLO. Si tubiese que dividir 735 por 5 pondria el divisor á la derecha del dividendo, separándolos con una raya tirada de arriba abaxo, y tiraria otra raya debaxo del divisor en esta forma:

7,3,5	5
5	——
—	147
2 3	
2 0	
——	
0 3 5	
3 5	
——	
0 0	

Empiezo la operacion separando con la coma el primer guarismo de la izquierda del dividendo, que es el 7, y digo: el 5 en el 7 ¿quántas veces está contenido? veo que es una vez, por lo que pongo 1 debaxo de la raya del divisor; multiplico este primer quociente parcial 1 por el divisor 5, y digo: 1 por 5 es 5, que pongo debaxo del dividendo parcial 7; tiro una raya y resto 5 de 7 diciendo: de 5 á 7 van 2, que coloco debaxo de la raya. Al lado de este 2 baxo el guarismo siguiente del dividendo, que es 3, le apunto arriba y digo: el 5 en 23 ¿quántas veces está contenido? hallo que son 4, y pongo este segundo quociente parcial hácia la derecha del primero, le multiplico por el divisor 5, diciendo: 4 por 5 son 20, que pongo debaxo del segundo dividendo parcial 23, y resto diciendo: de 0 á 3 van 3, de 2 á 2 va 0; baxo al lado de la resta 3 el guarismo siguiente y digo: 5 en 35 ¿quántas veces está contenido? veo que son 7, pongo este guarismo en el quociente á la derecha del 4, y le multiplico por el divisor 5, diciendo: 7 por 5 son 35, que pongo debaxo del tercer dividendo parcial, y le resto de él diciendo: de 5 á 5 no va nada, de 3 á 3 no va nada; y como no hay mas guarismos que baxar, digo que el quociente de dividir 735 por 5 es 147.

Dem. La colocacion de los dos términos es por comodidad, y algunos colocan el divisor á la izquierda del dividendo; la primera raya se pone paraque no se confunda el divisor con el dividendo, ni el quociente con las restas que van quedando del dividendo; y la segunda raya paraque no se confunda el quociente con el divisor.

Ahora, para hacer ver la exâctitud de lo demas de la regla, nos contraeremos al exemplo anterior; por el qual vemos que hemos dividido primero 7 centenas por 5, ó hemos visto 7 centenas entre 5 á como les toca, y hemos hallado que es 1; pero como el 7 expresa centenas, este quociente es 1 centena (69), y debe hallarse en el tercer lugar del quociente, empezando de derecha á izquierda, ó lo que es lo mismo, des-

pues del 1 debe haber en el quociente otros dos guarismos; en las 7 centenas, no solo habia lo necesario paraque tocase á 1 centena, sino que habia algo mas, y por esto hemos multiplicado el quociente por el divisor y le hemos restado de lo que nos servia de dividendo: á su lado hemos baxado el guarismo inmediato 3, y vemos que estas 23 son decenas, y hemos continuado diciendo: el 5 en 23 ¿quántas veces está contenido? ó 23 decenas entre 5 ¿á cómo les toca? hemos hallado que es á 4, y como estas deben ser decenas (69), las coloco en el quociente á la derecha del 1 que habia de expresar centenas; ahora, para ver si despues de tocarles á 4 decenas quedan aun algunas decenas, se multiplica este segundo quociente parcial por el divisor, y se resta del segundo dividendo parcial 23; la resta 3 que resulta expresa 3 decenas, que junto con las 5 unidades que se baxan, son 35 unidades, que entre 5 les toca á 7 unidades, que pongo á la derecha del 4 que expresaba decenas; y como he visto quánto cabe el divisor en todas las partes del dividendo, y tengo reunidos en un solo número todos los quocientes parciales, resulta por lo dicho (Introd. ax. 3.º) que este es el quociente total. L. Q. D. H.

72 Al executar esta operacion se debe tener presente: 1.º que no se puede poner de una vez en el quociente nada mas que 9; 2.º que quando se baxa un guarismo, y en él, junto con la resta si la hay, no cabe el divisor, se debe poner 0 en el quociente; 3.º que todo número cabe en sí mismo una vez, ó lo que es lo mismo, que si se tiene que dividir un número por sí mismo, el quociente es 1; 4.º que todo número dividido por la unidad da por quociente el mismo número; y 5.º que 0 dividido por qualquier número siempre da 0 por quociente.

Para hacer uso de estas advertencias, supongamos que quiera dividir 420723 por 7; colocaré el dividendo y el divisor segun he dicho, en esta forma:

42,0,7,2,3	7
42	60103 $\frac{2}{7}$
—	
00 0 7	
7	
—	
0 2 3	
2 1	
—	
0 2	

Como en el primer guarismo de la izquierda, que es 4, no se contiene ninguna vez el divisor 7, necesito tomar los dos guarismos primeros y separarlos con la coma; despues digo: 7 en 42 ¿quántas veces? veo que son 6, y pongo 6 en el quociente; multiplico el 6 por el divisor 7, y pongo el producto 42 debaxo del dividendo parcial 42, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 00 baxo el guarismo siguiente que es 0; y como el 0 no contiene ninguna vez al 7 ni á ningun otro número, pongo 0 en el quociente á la derecha del 6, y baxo el guarismo siguiente que es 7, y digo: el 7 ¿quántas veces está contenido en 7? veo que una vez, y pongo 1 en el quociente; le multiplico por el divisor, y pongo el producto 7 que saco debaxo del dividendo parcial 7, y resto. Al lado de la resta 0 baxo el guarismo siguiente 2, y digo: el 7 en 2 ¿quántas veces? advierto que no cabe

ninguna vez; pongo 0 en el quociente, baxo el guarismo siguiente 3, veo que en 23 cabe tres veces el 7, pongo 3 en el quociente, le multiplico por el divisor 7, y el producto 21 le coloco debaxo del 23, y resto. Como ya no hay mas guarismos en el dividendo, pongo la resta 2 á la derecha del quociente con la raya y el divisor debaxo, segun he dicho (69) y aqui se ve; y digo que el quociente de dividir 420723 por 7 es *sesenta mil ciento y tres unidades y dos séptimos.*

Quando se ha adquirido ya cierta destreza, se executa la operacion con mucha expedicion, escribiendo directamente el quociente por el siguiente método; supongamos que quiera dividir 45685 por 6, diré: la 6.ª parte de 4, guarismo de especie superior, no puede ser; la 6.ª parte de 45 es 7, que será el primer guarismo de especie superior del quociente; y como despues de tomada la 6.ª parte del 45 quedan 3, las reuniré consideradas como decenas al guarismo siguiente y diré: la 6.ª parte de 36 es 6, dexando 0 por resta, y 6 será el segundo guarismo del quociente; despues diré: la 6.ª parte de 8 es 1 y me quedan 2, que reunidas con el último guarismo dan 25; la 6.ª parte de 25 es 4, y queda 1 por resta, de donde infiero que el quociente es $7614\frac{1}{6}$.

73 Las reglas para el tercer caso las reuniremos en el siguiente:

PROBLEMA. *Dividir un número compuesto por otro compuesto.*

Res. Colóquese el divisor á la derecha del dividendo separándolos con una raya, y poniendo otra debaxo del divisor, segun se ha dicho en el caso anterior; tómense á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se necesiten paraque el divisor esté contenido alguna vez en dicho número de guarismos, separándolos de los demas con una coma; el mayor número de guarismos que se puede tomar es uno mas de los que tiene el divisor, y el menor son tantos como tiene el divisor; de modo que se separarán á la izquierda tantos guarismos como hay en el divisor, y si en este número que queda separado con la coma, no cabe el divisor, se tomará otro mas. Separados ya estos guarismos, se ve quántas veces el primer guarismo de la izquierda del divisor está contenido en el primero del dividendo, ó en los dos primeros si se tomó para el primer dividendo parcial un guarismo mas de los que tenia el divisor; y el número de veces que está contenido se pone en el quociente; se multiplica este quociente por todo el divisor, y el producto se coloca debaxo del dividendo parcial, se tira una raya y se resta de él. Al lado de la resta se baxa el guarismo siguiente, teniendo cuidado de apuntarle con la coma en el dividendo, y se ve quántas veces el primer guarismo del divisor está contenido en el primero ó dos primeros del dividendo; se pone este guarismo en el quociente á la derecha del primer quociente parcial, se multiplica por el divisor, se tira la raya y se resta; al lado de la resta se baxa el guarismo siguiente, y así se procede hasta que no haya mas

guarismos que baxar; y si al fin queda alguna resta, se pone á la derecha del quociente con una raya y el divisor debaxo.

1.er exemplo. Si quiero dividir 775 por 31, colocaré el divisor 31 á la derecha del dividendo 775, separándolos con una raya, en esta forma:

```
7 7,5 | 31
6 2   | ——
———   | 25
1 5 5
1 5 5
—————
0 0 0
```

Y despues de haber tirado otra debaxo del divisor, separo á la izquierda del dividendo dos guarismos, y veo quántas veces está contenido en el primero que es 7, el primero del divisor que es 3; hallo que son dos veces, y pongo este guarismo 2 en el quociente; ahora debo multiplicar este quociente 2 por todo el divisor 31, y así diré: 2 por 1 es 2, que como he de colocar el producto debaxo del dividendo parcial 77, pongo este 2 debaxo del 7 y digo: 2 por 3 son 6 que coloco debaxo del otro 7; tiro la raya y resto diciendo: de 2 á 7 van 5, que pongo; de 6 á 7 va 1 que tambien pongo. Al lado de la resta 15 baxo el guarismo siguiente que es 5; y como ahora tengo por segundo dividendo parcial un número que tiene un guarismo mas que el divisor, averiguaré quántas veces en los dos primeros guarismos de este dividendo está contenido el primero del divisor, y así diré: el 3 en 15 ¿quántas veces está contenido? hallo que son 5, le pongo en el quociente á la derecha del 2, y le multiplico por todo el divisor diciendo: 5 por 1 es 5, que pongo debaxo del último guarismo del dividendo parcial, 5 por 3 son 15, que pongo debaxo de los demas guarismos de dicho dividendo; tiro la raya y resto diciendo: de 5 á 5 no va nada, de 5 á 5 no va nada, de 1 á 1 tampoco va nada; y como no hay mas guarismos que baxar, digo que el quociente de dividir 775 por 31 es 25.

2.º exemplo. Si quiero averiguar quántas veces cabe el 523 en 388066, colocaré los números como aqui se presenta:

```
3 8 8 0,6,6 | 5 2 3
3 6 6 1     | —————
———————     | 7 4 2
0 2 1 9 6
  2 0 9 2
  ———————
  0 1 0 4 6
    1 0 4 6
    ———————
    0 0 0 0
```

Separaré quatro guarismos en el dividendo y diré: 5 en 38 ¿quántas veces? son 7, que pongo en el quociente; multiplico el 523 por 7, diciendo: 3 por 7 son 21, pongo 1 debaxo del 0 del dividendo parcial, y de 21 llevo 2; 2 por 7 son 14, y 2 que llevaba son 16, pongo el 6 y llevo 1; 5 por 7 son 35, y 1 que llevaba son 36, que pongo debaxo del 38; tiro una raya y resto. Al lado de la resta 219 baxo el 6. hallo que el 5 se contiene quatro veces en 21, pongo 4 en el quociente: multiplico este quociente 4 por el divisor 523, y el producto 2092 le coloco debaxo del dividendo parcial 2196, y executo la resta. Al lado de la resta 104 baxo el guarismo siguiente 6, veo que el 5 está dos veces contenido en el 10, pongo 2 en el quociente, multiplico por el divisor y resto el producto del dividendo parcial 1046; y como no queda resta, ni hay mas guarismos que baxar, infiero que el quociente de dividir 388066 por 523 es 742.

Dem. La colocacion de los términos y las rayas se hace por comodidad como ya hemos dicho (71). Despues tomamos á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se necesitan paraque esté contenido el divisor, y hallamos, contrayéndonos al segundo exemplo, que se necesitan quatro guarismos, y que en ellos está contenido el divisor siete veces, ó que 3880 entre 523 que es el divisor, les toca á 7; pero como el 3880 expresaba centenas, resulta (69) que estas 7 serán centenas. Hago la multiplicacion y resta, para saber si ademas de tocarles á 7 centenas queda aun algo que repartir, como sucede en efecto, pues quedan 219 que son centenas; y baxando el guarismo 6 de las decenas, he visto quántas veces cabe el 523 en las 2196 decenas, ó quántas decenas les toca repartiendo 2196 entre 523, y hallo 4, que como son decenas, las coloco á la derecha del 7 que expresaba centenas; hago la multiplicacion y resto con el mismo objeto que antes, y veo quántas veces en la resta junto con el último guarismo 6, está contenido el divisor 523, ó á quánto les toca repartiendo 1046 unidades entre 523, hallo que es á 2, que pongo á la derecha del 4 para expresar unidades; hago la multiplicacion y resta para ver si quedan aun algunas unidades por repartir, veo que no; y como todos los quocientes que me han resultado de dividir todas las partes del dividendo por el divisor, los tengo reunidos en un solo número, resulta (Introd. ax. 3.°) que este es el quociente total, que era L. Q. D. H.

Si quisiera dividir 1736952 por 834, executaria la operacion en esta forma (*A*):

(*A*)

1736,9,5,2	834
1668	2082 $\frac{564}{834}$
006895	
6672	
02232	
1668	
0564	

(*B*)

7590,8,5,2	6053
6053	1254 $\frac{390}{6053}$
15378	
12106	
032725	
30265	
024602	
24212	
00390	

Y como al fin me queda por resta 564, pondré este número al lado del quociente con la raya y el divisor debaxo, y diré que el quociente de esta division es *dos mil ochenta y dos, y quinientos sesenta y quatro ochocientos treinta y quatroavos.*

Si me propongo dividir 7590852 por 6053, executaré la operacion como se ve en (*B*), y saco el quociente 1254 $\frac{390}{6053}$.

74 Los exemplos resueltos hasta aqui se han elegido de modo que no haya que hacer ningun tanteo; pero suele ocurrir que en el quociente no se debe poner siempre el número que resulta de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, sino que muchas veces se necesita hacer algun tanteo para averiguar las unidades que se le deben poner de menos; lo qual detiene mucho á los principiantes, y hace que muy pocas personas sepan executar una division, quando apenas se hallará una que no sepa practicar hasta una multiplicacion.

Aunque esta no es gran dificultad, no obstante cuesta mucho trabajo á los principiantes el vencerla, quando á un tiempo se les explica el modo de executar la division, y el de hallar el verdadero quociente; pero como nos hemos propuesto el suministrarles todos los auxîlios posibles, hemos presentado antes las reglas generales y se han aplicado á exemplos, que no presentando ninguna dificultad por parte de los quocientes, manifiestan claramente la aplicacion de las reglas generales de la division.

Estos tanteos ocurren en general quando el segundo guarismo del divisor es 5 ó mayor que 5, ó siempre que es mayor que el primero.

Pero el principiante no debe quedarse parado aunque se encuentre con un divisor de esta especie; pues lo que debe hacer inmediatamente es poner en el quociente el número de veces que el primer guarismo del divisor está contenido en el primero ó dos primeros del dividendo, executar la multiplicacion, y si este producto no es mayor que el dividendo parcial, es prueba de que el quociente no es mayor que el que le corresponde; si es mayor dicho producto, el guarismo puesto en el quociente es mayor que lo que debe, y se le quitará lo menos una unidad; en caso de no ser el producto del divisor por el quociente hallado mayor que el dividendo parcial, lo que es prueba de no haber puesto un quociente mayor que el verdadero, se executa la resta; y si esta es menor que el divisor, es prueba de que el quociente no es menor que el verdadero; si es igual ó mayor que dicho divisor, es prueba de que el quociente puesto es menor que el correspondiente, y se le debe añadir una unidad lo menos. Sabiendo ya por las dos observaciones anteriores que un quociente no es mayor ni menor que el verdadero, pueden estar los principiantes seguros de que el quociente puesto es el que buscaban. Ahora bien, como he dicho (72) que lo mas que se puede poner de una vez al quociente es 9, y por otra parte lo menos que se le puede poner es 0, solo hay diez diferentes quocientes parciales que poder poner, y así el número mayor de tentativas que se podrian hacer serian nueve; más por la naturaleza de la operacion en ningun caso pueden ocurrir mas de quatro tentativas; luego no hay motivo paraque un principiante se pare al executar una de estas operaciones; pues aun en el caso de no saber las veces que el primer guarismo del divisor está contenido en el primero ó dos primeros del dividendo, no tiene motivo para detenerse; porque debe poner en

este caso un guarismo qualquiera, y averiguando despues si es mayor ó menor que el verdadero, le quitará ó añadirá unidades hasta que llegue á uno que no sea ni mayor ni menor que lo que debe ser, el qual será el verdadero. Este método parecerá algo largo, pero es seguro, no está expuesto á equivocaciones, y un principiante, sin auxîlio de nadie executará por medio de él operaciones que son sumamente dificultosas, y aun imposibles para los que desean aprenderlo todo de una vez; y así se pondrán tan diestros en poco tiempo, que no necesitarán hacer ninguna tentativa.

1 5 2,5,6	5 9
~~177~~	———
1 1 8	~~3~~
———	2 ~~6~~
0 3 4 5	5 ~~9~~
~~354~~	$8\frac{34}{59}$
2 9 5	
———	
0 5 0 6	
~~531~~	
4 7 2	
———	
0 3 4	

Con la mira de que se exerciten en estas tentativas les pondremos aqui un exemplo, y sea el de dividir 15256 por 59: colocaré el divisor á la derecha del dividendo, y tiraré las rayas como se ha dicho (71), y aqui se ve:

Lo primero que advierto es que necesito tomar tres guarismos en el dividendo, paraque esté contenido alguna vez el divisor; los separo, y digo: 5 primer guarismo del divisor, ¿quántas veces cabe en 15, dos primeros guarismos del dividendo? hallo que son tres veces, y pongo 3 en el quociente; multiplico el divisor 59 por este quociente 3, y coloco el producto 177 debaxo del dividendo parcial 152; y como veo que este producto es mayor que el dividendo, infiero que he puesto en el quociente mas de lo que correspondai; y así le quitaré una unidad al 3 y pondré 2, por consiguiente borraré el 3, é igualmente el producto 177; y colocaré el 2 debaxo del 3 borrado; multiplicaré el 59 por dicho quociente 2, el producto 118 le colocaré debaxo del 177 borrado, y como es menor que el dividendo parcial 152, digo que 2 es el quociente que buscaba; porque en este caso, como sé que el quociente debe ser menor que 3, y entre el 3 y el quociente 2 que he puesto, no hay ningun otro guarismo intermedio, estoy seguro de que el quociente no ha de ser mayor que 2, pues que lo estoy de que es menor que 3. Despues debo tirar debaxo una raya y restar, lo que me da la resta 34, la qual siendo menor que el divisor comprueba que no he puesto de menos en el quociente. Al lado de dicha resta baxo el guarismo siguiente 5, hallo que el primer guarismo 5 del divisor está contenido 6 veces en los dos primeros del segundo dividendo parcial 345; pongo 6 en el quociente á la derecha del 2, quociente parcial anterior, y executo la multiplicacion colocando el producto 354 debaxo del 345; y como es mayor que él, infiero que el quociente ha de ser menor que 6, por lo que le borraré, borraré tambien el producto 354, y pondré 5 al quociente; hago la mul-

tiplicacion de este quociente 5 por el divisor 59, colocando el producto debaxo del producto anterior rayado; y como este producto 295 es menor que el dividendo parcial correspondiente, digo que 5 es el quociente que buscaba, pues como ha de ser menor que 6 no puedo recelar que sea mayor que 5; y así, executo la resta, á su lado baxo el guarismo siguiente 6 y digo: 5 primer guarismo del divisor, ¿quántas veces está contenido en 50, primeros dos guarismos del dividendo parcial 506? advierto que son 10 veces; pero como (72) no puedo jamas poner mas de 9, pondré este guarismo en el quociente, y hago la multiplicacion; más como el producto 531 es mayor que el tercer dividendo parcial 506, borro el 9 y dicho producto tambien, pongo 8 en el quociente, le multiplico por el divisor, y resto el producto 472 de 506; y como no hay mas guarismos que baxar, pongo la resta al lado del quociente en la forma dicha antes; y escribiendo ahora todos los guarismos en un mismo renglon, como me hubieran resultado sino hubiera querido manifestar los raciocinios que debe hacer el principiante, tendré que el quociente de dividir 15256 por 59 es $258\frac{34}{59}$ (*).

75 Entendido ya el método para encontrar el verdadero quociente de un modo que sea independiente del talento del calculador, que es la circunstancia mas esencial que debe tener; porque los métodos siempre se deben poner á los alcances de los de menor talento, ó á lo menos á los de aquellos que tengan un talento regular; vamos ahora á manifestar los medios que hay para reducir todas estas tentativas á una sola. Con cuyo objeto observaremos que quando el segundo guarismo del divisor es 9 ú 8 es quando ocurre el mayor número de tanteos, y en este caso *se saca siempre el verdadero quociente, considerando al primer guarismo del divisor como que tiene una unidad mas.* Es tan útil esta regla, que se presentarán muy pocas ocasiones en que no se verifique, y si ocurre algun caso, solo habrá un tanteo que hacer, y le corresponderá una unidad mas al quociente que por ella se saque. Quando el segundo guarismo sea 7, *se podrá añadir una ó dos unidades al quociente sacado por la regla, y pocas veces ocurrirá hacer mas de un tanteo.* Tambien es igualmente segura esta regla: *véase si en la resta que queda de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, junta con el guarismo siguiente del dividendo, cabe el segundo del divisor el mismo número de veces que el primero en el primero ó dos primeros del dividendo; y si cabe, se podrá asegurar que el quociente hallado es el verdadero, sino no lo será*; ó de este modo: *multiplíquense mentalmente los dos primeros guarismos del divisor por el quociente, y si el producto es menor que los dos ó tres primeros guarismos del dividendo, se podrá tener seguridad de que no se le ha puesto demas, que es lo que se acostumbra hacer.*

(*) En mi Aritmética de niños se presentan aun otros exemplos de esta especie.

Para hacer uso de estas observaciones, supongamos que quiera dividir 173256 por 293, para lo qual colocaré los términos conforme he dicho y aqui se ve:

Y habiendo separado los quatro guarismos que necesito en el dividendo, como el segundo guarismo del divisor es 9, en vez de decir 2 en 17 ¿quántas veces? añadiré una unidad al 2 y diré: 3 en 17 ¿quántas veces? veo que son 5, y las pongo en el quociente; multiplico, y como el producto 1465 no es mayor que el dividendo parcial, estoy seguro de que no le he puesto á mas; resto, y como me quedan 267 que es menor que el divisor 293, tambien estoy seguro de que no le he puesto á menos; luego sino le he puesto demas ni de menos, es señal de que le he puesto lo que le correspondia. Al hacer la segunda division parcial, digo tambien: 3 en 26 ¿quántas veces? veo que sale 8 veces y que sobran 2 unidades; pero como solo le falta una para caber 9 veces, y por otra parte no era en efecto 3 el primer guarismo del divisor sino 2, y el tercero del dividendo es 7, puedo sospechar que les cabe á 9, y las pongo; hago la multiplicacion, y como el producto 2637 no es mayor que el segundo dividendo parcial 2675, infiero que no le he puesto demas; executo la resta, y como lo que resulta es menor que el divisor, infiero que tampoco le he puesto de menos, lo qual en este caso se preveía desde luego, porque en el quociente no se puede poner (72) nunca á mas de 9; continúo despues y veo que les toca á una unidad y que queda por resta 93.

1 7 3 2,5,6	293
1 4 6 5	$591\frac{93}{293}$
0 2 6 7 5	
2 6 3 7	
0 0 3 8 6	
2 9 3	
0 9 3	

76 Quando ya se ha adquirido la costumbre de executar divisiones por los métodos expuestos, es necesario tratar de abreviar la operacion; lo que se executa haciendo la resta al mismo tiempo que se practica la multiplicacion del divisor por el quociente parcial. Por exemplo: si quiero dividir 49539 por 35, colocaré el dividendo y el divisor como he dicho (71), y aqui se ve:

Separaré dos guarismos con la coma en el dividendo, y diré: 3 en 4 ¿quántas veces? cabe una vez, y por consiguiente pongo 1 en el quociente, multiplico ahora el divisor 35 por el primer quociente parcial 1, y en vez de colocar este producto debaxo del dividendo parcial 49 para restar despues, voy executando la resta al mismo tiempo que form● el producto en esta forma: 5 por 1 es 5, de 5 á 9 van 4, pongo este 4 que es la resta debaxo del 9, y digo: de 9 no llevo nada; 3 por 1 es 3, de 3 á 4 va 1, que pongo debaxo del 4, y tengo la resta 14. Al lado de esta resta baxo el guarismo siguiente que es el 5, y digo: 3 en 14 cabe quatro veces, pongo 4 en el quociente, y paso á executar la mu-

4 9,5,3,9	35
1 4 5	$1415\frac{14}{35}$
0 0 5 3	
1 8 9	
0 1 4	

tiplicacion, teniendo cuidado de restar al mismo tiempo, diciendo: 5 por 4 son 20, de 20 á 25 van 5, que pongo debaxo del 5 del segundo dividendo parcial, y de 25 llevo 2; 3 por 4 son 12, y 2 que llevaba son 14, de 14 á 14 no va nada, pongo 0 debaxo del 4, y de 14 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, y pongo otro 0 debaxo del 1. Baxo el guarismo siguiente 3 al lado de la resta 5, y continúo la division diciendo: 3 en 5 cabe una vez, pongo 1 en el quociente y multiplico: 5 por 1 es 5, de 5 á 13 van 8 que pongo debaxo del 3, y de 13 llevo 1; 3 por 1 es 3, y 1 que llevaba son 4, de 4 á 5 va 1, que pongo debaxo del 5. Al lado de la resta 18 baxo el 9, y digo: 3 en 18 cabe 6 veces; pero como el 5 que es el segundo guarismo del divisor no cabe seis veces en 9 (75) que es el otro del dividendo, le pondré á 5 y diré: 5 por 5 son 25, de 25 á 29 van 4, que pongo debaxo del 9, y de 29 llevo 2; 3 por 5 son 15, y 2 que llevaba son 17, de 17 á 18 va 1 que pongo debaxo del 8, y de 18 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, pongo 0 debaxo del 1; y como no hay mas guarismos que baxar pongo la resta á la derecha del quociente, y tengo que el quociente es $1415\frac{14}{35}$.

Si observamos el procedimiento que hemos seguido en este exemplo, echaremos de ver que en el segundo quociente parcial el producto 20 de 5 por 4 le hemos restado de 25; en el tercer quociente parcial el 5 producto de 5 por 1 le hemos restado de 13; y en el último el producto 25 de 5 por 5 le hemos restado de 29; para tener una regla fixa que nos dé á conocer en todos los casos qué cantidad se ha de tomar por minuendo, diremos que no hay mas que ver quál es el guarismo correspondiente de que se debe restar el producto; si de él no se puede restar dicho producto, se toman tantas decenas del guarismo inmediato como se necesiten paraque se pueda executar dicha resta, teniendo cuidado de llevar en cuenta estas decenas para añadirlas despues al producto del guarismo siguiente, y así se continúa.

Quando se executa abreviadamente la division se conoce si en el quociente se ha puesto lo que corresponde del mismo modo que antes: *es señal de haber puesto demas si al fin no se puede restar, por llevar mas unidades de las que hay en el último guarismo*, y para esto se hace antes la multiplicacion mental del quociente por el segundo guarismo del divisor; y *se conocerá si se le ha puesto de menos, si la resta es igual ó mayor que el divisor.*

Paraque los principiantes se adiestren en esta operacion que es sin disputa la mas difícil de toda la Aritmética, y aun la mas penosa de todas las Matemáticas, pondremos aqui varios exemplos.

1.º Quiero dividir 375271 por 583; colocaré el divisor al lado del dividendo del modo que aqui se ve:

Separaré quatro guarismos con la coma, y como el segundo guarismo del divisor es 8 consideraré al primero que es 5 como si fuera 6 (75),

3 7 5 2,7,1	583
0 2 5 4 7	
0 2 1 5 1	$643\frac{402}{583}$
0 4 0 2	

y diré: 6 en 37 está contenido seis veces, pongo 6 en el quociente, y paso á executar la multiplicacion y resta á un mismo tiempo del modo siguiente: 3 por 6 son 18. de 18 á 22 (porque el último guarismo es 2, y para poder restar de dos unidades diez y ocho unidades, necesito dos decenas) van 4, que pongo debaxo del 2, y de 22 llevo 2; 8 por 6 son 48, y 2 que llevaba son 50, de 50 á 55 van 5 que pongo, y de 55 llevo 5; 5 por 6 son 30, y 5 que llevaba son 35, de 35 á 37 van 2, que pongo, y de 37 llevo 3; de 3 á 3 no va nada, por lo que pongo 0 debaxo del 3 del dividendo. Al lado de la resta 254 que es menor que el divisor, y que por lo mismo manifiesta que se ha puesto en el quociente lo que correspondia, baxo el guarismo siguiente que es 7; y considerando siempre al executar la division al primer guarismo 5 del divisor como si fuera 6, digo: el 6 en 25 ¿quántas veces? veo que son 4, pongo 4 en el quociente, y sigo executando la operacion diciendo: 3 por 4 son 12, de 12 á 17 van 5, que pongo debaxo, y de 17 llevo 1; 8 por 4 son 32, y 1 que llevaba son 33, de 33 á 34 va 1 que pongo, y de 34 llevo 3; 5 por 4 son 20, y 3 que llevaba son 23, de 23 á 25 van 2, y de 25 llevo 2; de 2 á 2 no va nada, por lo que pongo 0 debaxo del 2. Al lado de la resta 215 baxo el guarismo siguiente 1, y digo: 6 en 21 ¿quántas veces? veo que son 3, pongo 3 en el quociente, y multiplico diciendo: 3 por 3 son 9, de 9 á 11 van 2; que pongo debaxo del 1, y de 11 llevo 1; 8 por 3 son 24, y 1 que llevaba son 25, de 25 á 25 no va nada, pongo 0 y de 25 llevo 2; 5 por 3 son 15, y 2 son 17, de 17 á 21 van 4, que pongo debaxo; y como no hay mas guarismos que baxar en el dividendo, pongo la resta segun lo dicho anteriormente, y tengo por quociente $643\frac{402}{583}$.

2.° Si quisiera dividir 465903057 por 78306, executaria la operacion como se ve en (*A*).

(*A*)

```
4 6 5 9 0 3,0,5,7 | 78306
0 7 4 3 7 3 0     |------------
  0 3 8 9 7 6 5   | 5949 60663/78306
    0 7 6 5 4 1 7
      0 6 0 6 6 3
```

(*B*)

```
4  6  5  9  0  3,  0,  5,  7 | 78306
0  7  4  3  7  3   6   1  (3 |------------
   0  3  8  9  7   4  (6     | 5949 60663/78306
      0  7  6  5  (6
         0 (6  0
```

Tambien se puede omitir el ir baxando los guarismos, y no hacer mas que restar los productos de los guarismos que les corresponden, como se ve en este mismo exemplo (*B*), donde los últimos guarismos que se ven separados forman la resta.

3.° Si quiero dividir 8523065 por 7203 sacaré el quociente $1183\frac{1916}{7203}$.

4.° Si divido 15703026 por 1753, hallaré por quociente $8957\frac{1405}{1753}$.

77 Ademas de esta abreviacion que es general para todos los casos, hay otras que corresponden á casos particulares; y las principales son

quando el dividendo y el divisor acaban en ceros ó solo termina en ceros el divisor. En el primer caso *se borran en ambos tantos ceros como hay en el que menos*. Por exemplo: quiero dividir 36000 por 500, borraré en cada uno de estos números dos ceros, porque dos ceros son los que tiene solamente el divisor 500, y quedan los números con que se ha de executar la division reducidos á 360 y 5; y dividiendo 360 por 5 resulta por quociente 72, que es el que hubiera salido de dividir 36000 por 500.

Otro exemplo. Si quisiera dividir 800000 por 27000, borraria en ambos números tres ceros, y estaria reducida la operacion á dividir 800 por 27, que da por quociente $29\frac{17}{27}$.

La razon de esta práctica es (contrayéndonos al primer exemplo en que el divisor es 5 centenas exâctas, y el dividendo es 360 centenas tambien exâctas) que como el 5 estará contenido en 360 siempre un mismo número de veces, ya estos números expresen decenas, centenas, millares, hombres, caballos, &c. porque la division siempre se hace en abstracto, resulta que encontraremos el verdadero quociente suponiendo que son unidades; y como esto se consigue suprimiendo en ambos dos ceros porque estos son los que tiene el que menos, resulta la regla que hemos dado (*).

Quando los ceros se hallan al fin del divisor, no se borran, sino que se separan con una especie de media luna de esta forma (__, y se separan tambien en el dividendo tantos guarismos como ceros hay en el divisor; se executa la operacion con los demas guarismos que quedan á la izquierda, y luego al poner la resta que quede, se deben añadir á esta los guarismos separados en el dividendo y debaxo de la raya se pone todo el divisor; y sino queda resta se ponen los guarismos separados en el dividendo á la derecha del quociente con la raya, y todo el divisor debaxo.

Exemplo. Si tubiera que dividir 45426 por 300, colocaria los números como se ha dicho: 45426 | 300.

Despues, advirtiendo que el divisor termina en dos ceros, los separaré, y separaré tambien los dos guarismos últimos del dividendo de este modo:

Haré la division del 454 por 3, y al lado de la resta 1 baxo los guarismos separados, pongo todo esto á la derecha del quociente con la raya y todo el divisor debaxo, con lo que tengo el quociente $151\frac{126}{300}$.

4,5,4(26	3(00
1 5	$151\frac{126}{300}$
0 0 4	
1 2 6	

Esto está fundado en que podemos descomponer al 45426 en estas dos partes 45400+26, con lo que para hallar el quociente deberé dividir cada una de estas partes; pero [illegible] da, executando la operacion como

---

(*) *Tambien pudiéramos dar razon de esto diciendo: que el suprimir en ambos dos ceros, equivale á dividirlos por* 100, *lo que no altera el quociente como demostraremos* (93).

se acaba de exponer antes, 151 de quociente, y por resta 1 unidad, que como en sí es de centena y el divisor expresa centenas, dará $\frac{100}{100}$; pero ademas de esta resta se debe contar con el 26, y como 100 y 26 componen 126 resulta que el quociente debe ser 151 $\frac{126}{300}$.

Si el divisor es la unidad seguida de ceros resulta despues de practicado lo que acabamos de decir, que como todo número dividido por la unidad es el mismo número, se tiene inmediatamente el quociente separando ó considerando mentalmente separados en el dividendo tantos guarismos hácia la derecha como ceros hay despues de la unidad, y los demas guarismos que queden expresarán el quociente; á cuyo lado se deberán poner los guarismos separados con la raya y el divisor debaxo.

1.er exemplo. Si quiero dividir 12523 por 100, considero separados mentalmente los dos últimos guarismos 23 del dividendo, y los otros 125 expresan el quociente; á cuyo lado se deben poner los guarismos separados con la raya y todo el divisor debaxo; de manera que el verdadero quociente será 125 $\frac{23}{100}$.

2.º exemplo. Si quisiera dividir 8376253 por 1000, hallaria por quociente 8376 $\frac{253}{1000}$.

78 Baxo cinco aspectos se presentan en la sociedad las qüestiones que conducen á la operacion de dividir, y ademas hay necesidad en otra clase de qüestiones á que da orígen la ciencia que nos ocupa; y por lo mismo diremos que son seis los usos de la division; 1.º quando claramente se dice que se quiere buscar las veces que un número está contenido en otro, ó de quántos números como uno dado se compone otro tambien dado; 2.º quando hay que repartir entre varias personas cierto número de cosas; 3.º quando se quiere dividir un número en partes iguales, ó tomar una parte de un número; 4.º quando conociendo el valor de muchas unidades, se quiere averiguar el de una; 5.º quando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior; y finalmente 6.º quando se quieren hallar todos los números que dividen exâctamente á otro dado.

En el primer caso no hay mas que *dividir el mayor por el menor*; en el segundo que es quando hay que repartir cierto número de cosas entre cierto número de personas, *se divide en abstracto el número que expresa las cosas que hay por el que expresa las personas.*

Por exemplo. Si se supone que un padre al morir ha dexado en haciendas, alhajas, casas, &c. 2359367 reales, y se trata de saber quánto corresponde á cada uno de sus nueve hijos, lo executaremos dividiendo el número 2359367 por el número de hijos que son 9: y en el quociente 262151 $\frac{8}{9}$ se hallará el número de reales que corresponde á cada uno.

Para dividir un número en partes iguales ó tomar una parte de un número, como la mitad, tercio, &c. *se divide el número dado por el que expresa las partes en que se ha de dividir, ó la parte que se quiere tomar.*

1.er exemplo. Si se quiere dividir en cinco partes iguales el número

4625, no hay mas que dividir el 4625 por 5, y en el quociente 925 se tiene el valor de una de estas partes.

2.º exemplo. Si quiero tomar la duodécima parte del número 8563015, dividiré el 8563015 por 12, y el quociente $713584\frac{7}{12}$ expresará la duodécima parte del número propuesto.

Para hallar el valor de una unidad quando se conoce el de muchas, *se divide el valor de dichas unidades por el número de ellas, y el quociente será el valor de una.* Por exemplo: sabiendo que 25 varas de paño han costado 750 reales, para averiguar á como ha costado la vara dividiré el valor de todas las varas que es 750, por el número de ellas que es 25, y en el quociente 30 tendré el valor de la vara; por lo que diré que cada vara de paño costó 30 reales.

Cuyo procedimiento está fundado en que como el valor de cada unidad es el mismo, el valor de una de ellas será igual á una parte del valor de todas expresada por el número de unidades que hay.

Para reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior, *se divide el número de unidades de especie inferior que se dan por el número que expresa las veces que la unidad de especie inferior cabe en la de especie superior.* Por exemplo: si quiero reducir 8536 maravedíses á reales, dividiré los 8536 maravedíses por 34, porque teniendo el real 34 maravedíses, contiene al maravedí 34 veces, y en el quociente $251\frac{2}{34}$ tengo los reales que componen; pero en estos casos no se pone la resta á la derecha del quociente con la raya y el divisor debaxo, sino que se dexa, conservándole el nombre que tenia el dividendo de que provino; de modo que en vez de decir que componen 251 reales y *dos treinta y quatroavos de real*, se dice que componen 251 reales y 2 maravedíses.

Quando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior, y entre estas y aquellas hay otras intermedias, es mejor irlas reduciendo sucesivamente á las unidades de especie inmediatamente superior; porque ademas de la dificultad que hay en conservar en la memoria las unidades de especie inferior que componen á la superior, quando hay una ó dos unidades intermedias, se reune por otra parte la ventaja de que quedan expresadas las restas en unidades de la especie que corresponde.

1.er exemplo. Si quisiera reducir 8530065 maravedíses á doblones, en vez de dividir este número por 2040, que expresa las veces que el maravedí está contenido en el doblon, ó los maravedíses de que se compone el doblon, dividiré primero por 34 para reducirlos á reales; los reales que me resulten los dividiré por 15 para reducirlos á pesos; y finalmente estos pesos los dividiré por 4 para reducirlos á doblones, y tendré en este último quociente, junto con las restas anteriores, los doblones, pesos, reales y maravedíses que hay en el número propuesto. La operacion se executa como aqui se ve:

```
8 5,3,0,0,6,5 mrs. | 3 4
1 7 3              |------------------
0 0 3 0 0          | 2 5,0,8,8,4 rs. | 1 5
  0 2 8 6          | 1 0 0           |------------------
    0 1 4 5        | 0 1 0 8         | 1 6,7,2,5 ps. | 4
      0 0 9        |   0 0 3 8       | 0 0 7         |------------
                   |       0 8 4     |     3 2       | 4 1 8 1 ds.
                   |         0 9     |     0 0 5
                                           1
```

Primero divido por 34 y saco 250884 reales, y quedan de resta 9 maravedíses, de los que no haré caso hasta lo último; despues divido este número de reales por 15, y saco 16725 pesos con 9 reales de resta; divido luego este número de pesos por 4 y saco 4181 doblones, quedando un peso de resta; de manera que teniendo ahora presentes todas estas restas, diré: que 8530065 maravedíses componen 4181 doblones, 1 peso, 9 reales y 9 maravedíses.

79 Para proceder al sexto uso necesitamos hacer algunas observaciones: en primer lugar, quando un número está contenido en otro un número exâcto de veces, se llama al que contiene *múltiplo* del contenido, y al contenido *submúltiplo ó parte alíquota* del continente ó que contiene; quando un número no está contenido en otro un número exâcto de veces, se dice que es *parte aliquanta* del continente. *Parte alíquota* y *submúltiplo* es lo mismo que *factor*, de manera que se llama *factor* de un número aquel que le divide exâctamente sin dexar resta. Así, á lo que nos dirigimos ahora es á encontrar todos los factores que puede tener un número propuesto; pero entre estos factores los puede haber que no reconozcan otros factores que ellos mismos y la unidad, y tambien los puede haber que reconozcan otros factores ademas de ellos mismos y la unidad; en el primer caso se llaman *factores simples* ó números *primos ó primeros*, y en el segundo *compuestos*. Todas las investigaciones que tenemos que hacer sobre este particular estriban en saber conocer por otros medios mas simples que los de la division, si un número dado es divisible por los números primeros 2, 3, 5, 7, 11, &c. y porlo mismo diremos que se *conoce si un número es divisible por 2, si su último guarismo es 0 ó guarismo par*, esto es, si es alguno de estos guarismos 0, 2, 4, 6, 8; por esta regla advertimos que los números 18, 26, 48, 74 y 250, son todos divisibles por 2; *se conoce si es divisible por 3, si la suma de todos los guarismos del número propuesto, considerados como unidades, da 3 ó un múltiplo de 3*; por esta regla se advierte que los números 15 y 237 son divisibles por 3, pues la suma de los guarismos del primero es 6, que es múltiplo de 3, y la de los del segundo 12 que tambien lo es; y si nos queremos cerciorar de ello por la regla, diremos 2 y 1 son 3, que es múltiplo de 3. *Se conoce si es divisible por 5, si su último guarismo es 0 ó 5*. Para sa-

ber si un número es divisible por los demas números primos, la regla es mas complicada que la simple division; y por lo mismo solo pondremos aqui la que hay para conocer si es divisible por 11, por ser mas sencilla que esta operacion, y es la siguiente: *súmense todos los guarismos que se hallan en lugares pares, á esta suma añadásele un cero, y á esto añádase la suma de los guarismos que ocupan lugares impares; y si el resultado es divisible por* 11, *lo será igualmente el número propuesto*; por esta razon se ve que el 58014 es divisible por 11, porque la suma de sus guarismos pares es: 1 y 8 son 9, que añadiendo un 0 son 90; la de los ímpares es: 4 y 0 son 4, y 5 son 9, y 90 son 99; donde vemos que 99 es divisible por 11, y da de quociente 9 (*).

(*) *Todas estas reglas las dan generalmente los autores sin demostracion ninguna, y solo se contentan con verificarlas; algunos mas delicados se paran á demostrar algunas de ellas, atendiendo en cada caso á observaciones particulares; pero nosotros vamos á resolver esta qüestion en general, cosa que no tenemos noticia se halle en ningun libro elemental, por medio del siguiente:*

PROBLEMA. Dado un número qualquiera, conocer si es divisible por otro número qualquiera, por otros medios diferentes de los que suministra la division.

Res. *Fórmese ante todas cosas un conjunto de números con el órden siguiente: póngase en un lugar separado* 1; *á su izquierda el residuo que quede de restar el número que ha de servir de divisor, todas las veces que se pueda de* 10; *á la izquierda de este residuo póngase el que quede de restar el divisor propuesto, todas las veces que se pueda, de diez veces la resta anterior; á la izquierda de este, el que quede de restar el mismo divisor todas las veces que se pueda de diez veces el residuo anterior; y continúese de este modo hasta encontrar tantos residuos de estos, como guarismos tiene el que ha de servir de dividendo, ó hasta que los residuos sean cero; despues multiplíquese el último guarismo del que ha de servir de dividendo por* 1, *que es el primero de este conjunto de números; el segundo del dividendo por el segundo de estos números, el tercero por el tercero, &c. hasta que cada guarismo del dividendo se haya multiplicado por el correspondiente en este conjunto; súmense todos estos productos, y si la suma es divisible por el divisor dado lo será tambien el dividendo propuesto.*

EXEMPLO. Propongámonos averiguar si el número 6232 *es divisible por* 19.

Para esto formaremos primero las restas, y tendremos poniendo 1 *á la derecha, que como de* 10 *no se puede quitar* 19 *ninguna vez, el primer residuo es* 10, *que colocaremos á la izquierda del* 1; *de diez veces este residuo que es* 100, *quitaremos el* 19 *todas las veces que se pueda, y hallaremos un segundo residuo* 5, *que colocaremos á la izquierda del anterior*; 12, 5, 10, 1,

Entendido esto, para hallar los factores simples y compuestos se practicará la regla siguiente: *divídase el número propuesto por 2 todas las veces que se pueda, lo qual se conocerá por las reglas dadas antes; des-*

---

de diez veces este residuo, esto es de 50, quitaremos 19 todas las veces que se pueda y quedará por tercer residuo 12, que colocaremos á la izquierda del anterior 5; y como no hay mas de quatro guarismos en el número que ha de servir de dividendo, no tenemos necesidad de mas restas; ahora multiplicaremos cada residuo empezando desde 1, por su guarismo correspondiente en el 6232, sumaremos los productos y hallaremos por suma 114.

Ahora executaremos con el 114 lo mismo que con el 6232, y nos dará la multiplicacion sucesiva, despues de haber hecho la suma, 19, que como es divisible por 19, nos dice que tambien son divisibles por 19 los números 114 y 6232.

Dem. *Paraque la demostracion sea mas clara, y convenga al mismo tiempo á toda clase de números, señalaremos el número dividendo por*

&c. T S R Q P N M;

donde suponemos que M *es el guarismo que expresa las unidades,* N *el de las decenas,* P *el de las centenas, &c; llamaremos* A *al número que se quiere averiguar si es divisor, y* B,C,D,E,F, &c. *el órden de las restas que podremos colocar á la izquierda de la unidad de modo que se correspondan debaxo del número propuesto en esta forma:*

&c. T S R Q P N M
&c. G,F,E,D,C,B, 1

Y tendremos que si el número propuesto consta solo de un guarismo M, *este multiplicado por la unidad da el mismo número* M; *y si fuese este producto múltiplo de* A, *seria porque lo era antes de hacer la multiplicacion por* 1; *luego queda demostrado para quando el número no tiene mas de un guarismo.*

Si consta de dos, será por exemplo NM, *y voy á demostrar que si* $M+N\times B$ *es múltiplo de* A, *lo será tambien* NM.

Porque hallándose el carácter N *en la columna de las decenas, equivale á* 10N, *y añadiéndole las unidades* M *se tendrá que* $NM=10N+M$.

Ahora, por ser B *el residuo que queda de restar* A *de* 10 *todas las veces que se pueda, tendremos que si quitamos de* 10 *la* B, *nos vendrá un residuo que será múltiplo de* A; *luego* $10-B$ *será múltiplo de* A, *y multiplicándole por* N, *el producto tambien lo será; luego* $10N-B\times N$ *es múltiplo de* A; *pero si sucede que* $M+B\times N$ *sea múltiplo de* A, *sumando estos dos múltiplos hallaremos:*

$10N-B\times N+B\times N+M$ *múltiplo de* A, *ó* $10N+M$ *múltiplo de* A, (*porque la reunion de* $-B\times N$ *con* $+B\times N$ *equivale á cero; pues la primera expresion indica que se ha de quitar* $B\times N$, *y la segunda que se ha de añadir; luego si se añade por una parte lo mismo que se quita*

pues se dividirá por 3 todas las veces que se pueda, luego por 5, despues por 7, luego por 11, y en general por todos los números primos todas las veces que se pueda, y se tendrán los factores simples del número

---

por otra, esto no altera en nada el resultado); *pero* 10N+M *es lo mismo que* NM, *luego si M*+B×N *es múltiplo de* A, *tambien lo será* NM.

Si el dividendo consta de tres guarismos y es por exemplo PNM, *tendremos del mismo modo*: 10—B *múltiplo de* A (1);
luego si multiplicamos por 10 *será*: 100—10B *múltiplo de* A (2);
y multiplicando por P *el producto será tambien múltiplo de* A, *á saber*:

100P—10B×P *múltiplo de* A (3);

y como C *era el residuo que quedaba de quitar* A *todas las veces que se podia de* 10B, *resulta que si de* 10B *quitamos* C, *nos vendrá* 10B—C; *que equivaldrá á un múltiplo de* A, *expresado por el número de veces que se restó, y tendremos*: 10B—C *múltiplo de* A (4);
y multiplicando por P *será*: 10B×P—C×P *múltiplo de* A (5);
luego si sumamos los múltiplos (5) *y* (3) *nos vendrá*:

100P—10B×P+10B×P—C×P, *ó* 100P—C×P, *múltiplo de* A (6).

Ahora, como 10—B *es múltiplo de A*, *multiplicando por* N *será*:

10N—B×N *múltiplo de* A (7);

y sumando este con el (6) *resultará*:

100P—C×P+10N—B×N *múltiplo de* A (8);

y si ademas se verifica que C×P+B×N+M *sea múltiplo de* A, *la suma de estos dos últimos será tambien múltiplo de* A; *luego*
100P—C×P+10N—B×N+C×P+B×N+M *múltiplo de* A, *ó*

100P+10N+M *múltiplo de* A;

pero 100P+10N+M=PNM, *pues* P *expresa centenas*, *N decenas y* M *unidades*; *luego el número propuesto* PNM *será divisible por* A, *si lo es* C×P+B×N+M. *Lo mismo demostraríamos si tubiese mas guarismos.*

Cor. general. *De aqui se deduce que si la suma de dichos productos no es múltiplo de* A, *tampoco lo será el número propuesto*; *y que la resta que quede de dividir dicha suma por* A, *será igual á la que quede de dividir por* A *el número propuesto*; *porque aqui teníamos que* 100P—C×P+10N—B×N *es* (8) *múltiplo de* A; *luego si le añadimos la suma* C×P+B×N+M *de los productos de los guarismos por las restas, en esta suma, la resta que quede ademas de los múltiplos de* A, *solo provendrá de la resta que haya en* C×P+B×N+M; *luego conoceremos la resta que queda de dividir por* A *el número propuesto, si averiguamos la resta que queda de dividir por* A *la suma* C×P+B×N+M.

Ahora, de esta proposicion, que es de Pascal, deduciremos para la práctica las reglas sencillas que se han dado arriba.

Formemos ante todas cosas el conjunto de restas que convienen al divisor 2, *y tendremos en primer lugar que poner la unidad*; *despues restaremos el* 2 *de* 10 *todas las veces que se pueda, y haciéndolo cinco ve-*

propuesto. Ahora, todos estos factores se multiplican entre sí de dos en dos de quantas maneras se pueda, y se tendrán los compuestos de á dos; luego se multiplican de tres en tres de todos los modos posibles, y se ten-

---

ces quedará por residuo 0, que podremos poner á la izquierda del 1 en la forma que aqui se ve: &c.,0,0,0,1.

Ahora, multiplicando 0 por 10 es 0, y restando las veces que se pueda el 2, se ve que no se puede restar ninguna y queda 0 por resta; y como todas las demas restas nos saldrian tambien iguales con 0, se deduce que todos los productos que se formen, excepto el primero, serán 0; luego queda reducida la qüestion á multiplicar 1 por el último guarismo del número propuesto, y si el producto es divisible por 2, tambien lo será el propuesto; y como la multiplicacion por 1 da el mismo multiplicando, resulta que si el último guarismo es divisible por 2, lo será tambien todo el número; pero el último guarismo es divisible por 2 quando es guarismo par ó 0, porque 0 es divisible por qualquier número sin resta, dando tambien 0 por quociente; luego resulta la regla que hemos dado arriba.

Para deducir la regla de quando es divisible por 3 formaremos las restas, y tendremos en primer lugar que poner la unidad; despues restaremos el 3 todas las veces que se pueda de 10, y hallamos por residuo al executar la tercera resta 1, que colocaremos á la izquierda del primer 1

&c.,1,1,1;

despues, de diez veces esta resta que es 10, restaremos 3 todas las veces que se pueda, y al cabo de tres hallamos por residuo 1, que colocaremos á la izquierda del anterior; y como hallaríamos que todas las restas siguientes eran 1, y el producto de qualquier número por 1 es el mismo número, se sigue que los productos que resulten de multiplicar los guarismos del número propuesto por las restas correspondientes, serán los mismos guarismos; luego si la suma de estos guarismos como si expresasen unidades es divisible por 3, tambien lo será el propuesto, como hemos dicho en el texto.

Para hallar los números divisibles por 4, por 8, por 16, por 32, &c. hallaríamos que el órden de las restas era: para 4..... &c.,0,0,2,1; para 8..... &c.,4,2,1; para 16.... &c., 4,10,1, y del mismo modo hallaríamos para 32, 64, &c.

Con el fin de averiguar las circunstancias que se requieren paraque un número sea divisible por 5, formaremos el órden de las restas correspondientes á este divisor, y serán: &c. ,0,0,0,0,1;
luego solo se necesita que su último guarismo multiplicado por 1 sea divisible por 5; y como la multiplicacion por 1 no le alterará, resulta que solo bastará que el último guarismo sea divisible por 5: pero solo el 5 y el 0 son divisibles por 5 sin resta, luego paraque un número sea divisible por 5 debe terminar en 0 ó en 5.

drán los compuestos de á tres; luego de quatro en quatro, y así sucesivamente hasta que se multipliquen todos entre sí; de cuyo producto resultará el número propuesto.

Paraque se tenga facilidad en encontrar los compuestos sin que se

---

Si quisiéramos indagar las restas sucesivas para conocer si un número es divisible por 6, hallaremos: &c.,4,4,4,4,1;
pero es mas sencillo ver si el último guarismo es par ó cero, y si la suma de todos es múltiplo de 3; pues verificándose estas circunstancias será divisible por 2 y por 3 á un mismo tiempo, ó por su producto 6.

Si indagamos las condiciones que se requieren paraque un número sea divisible por 7, hallaremos las restas siguientes:

&c..1,5,4,6,2,3,1,5,4,6,2,3,1;

donde se ve que despues del residuo 5 se vuelven á repetir otra vez los mismos; lo que es indispensable, porque las restas han de ser siempre menores que el divisor; pero el poner en práctica la regla en este caso es generalmente mas complicado que el averiguarlo por la division.

Las restas para conocer si un número es divisible por 9, son

&c.,1,1,1,1,1,1;

de donde se deduce que un número será divisible por 9, si sus guarismos sumados como si expresasen unidades sencillas dan 9 ó un múltiplo de 9.

Si indagamos las restas para dividir por 11, tendremos que son:

&c.10,1,10,1,10,1;

de donde se deduce para la práctica la regla sencilla que hemos dado en el texto.

Las restas para conocer si es divisible por 13, serian:

&c. 10, 1, 4, 3, 12, 9, 10, 1;

donde se ve que, así como las del 7, no suministran métodos bastante sencillos en la práctica; lo mismo sucederia para las de 17, 19, &c.

Tambien podríamos demostrar la regla siguiente para averiguar si un número es divisible por 7, por 11 y por 13, á un mismo tiempo: divídase el número propuesto en periodos de á tres guarismos, súmense los periodos pares y los ímpares: réstese una suma de otra, y si la resta es divisible por 7, 11 y 13 á un mismo tiempo, lo será tambien el número propuesto: *pero esta regla no tiene grandes aplicaciones.*

Escolio. *En lo sucesivo tendremos necesidad de averiguar con prontitud las restas que nos resultan; y así observaremos que las restas que son mas fáciles de encontrar son las del 2 y del 5: para la del 2, solo investigaremos si el último guarismo es par, y si lo es no habrá resta; si es impar, la resta será 1. Para ver la del 5, se observará si el último guarismo es 5 ó cero, en cuyo caso la resta es 0; si el último guarismo no fuese ninguno de estos, la resta será el último guarismo, si es menor que 5; y si es mayor, el exceso de dicho guarismo sobre 5. Así, la resta que dexa el 37 dividido por 5 es 2; y la que el 33 es 3.*

olvide ninguno, conviene disponer la operacion del modo siguiente: *el número se pone en un parage qualquiera, pero escrito lo mas alto y hácia la izquierda del papel ó pizarra donde se executa la operacion; despues se tira una raya de arriba abaxo, y enfrente, esto es, á la derecha de esta raya, pero en el mismo renglon que el número propuesto, se pone el número menor por qué sea divisible; como esta division es sencilla, se va haciendo mentalmente por el método dicho al fin del párrafo* (72), *y el quociente se va poniendo debaxo del número propuesto. Enfrente de este quociente se pone otra vez el mismo divisor, si este quociente es divisible por él; y sino, aquel número primo menor por qué sea divisible este quociente, y así se continúa hasta llegar á un quociente que sea número primo, el qual será el último divisor; y se conocerá si es número primo en las mas de las ocasiones* (*) *viendo si es igual á un múltiplo de* 6, *mas ó menos la unidad; sino lo es, no será número primo.*

(*) *Decimos en las mas de las ocasiones, porque no siempre que esto se verifique en un número, resultará que sea primero; en efecto, lo que sí es cierto es que todo número primero debe ser igual á un múltiplo de* 6 *mas ó menos la unidad. Para convencernos de esto observaremos que solo los números impares pueden ser números primeros, pues los demas son divisibles por* 2; *y como los números impares, divididos por* 6 *que es número par, deben dar por resta un número impar, resulta que como toda resta debe ser menor que el divisor, las restas que podrán quedar solo serán* 1, 3 *y* 5; *luego si señalamos el quociente con la letra* m, *que es la inicial de múltiplo, resultará que todo número impar tendrá esta forma*: $m\times6+1$, $m\times6+3$, *ó* $m\times6+5$; *pero los que tengan la segunda forma no pueden ser primeros porque son divisibles por* 3, *luego solo podrán ser primeros los que tengan la forma* $m\times6+1$, $m\times6+5$; *y como* $5=6-1$, *resulta que esta segunda forma la podremos poner baxo este aspecto* $m\times6+6-1$; *pero si á un múltiplo de* 6, *le añadimos una vez el mismo* 6 *resulta un múltiplo de* 6; *luego deberá ser todo número primero en este segundo caso igual á un múltiplo de* $6-1$; *luego queda probado lo que deseábames. Ahora, no todos los números que esten comprendidos en las formas* $m\times6+1$ *ó* $m\times6-1$ *serán números primeros; porque si el múltiplo fuese el quádruplo, la primera caia en defecto; y si fuese el séxtuplo caeria la segunda.* . . . .

Luego aun quando un número sea de la forma $m\times6+1$, *ó de la* $m\times6-1$, *no se tiene aun certeza de si es número primero; de lo qual solo nos podemos convencer ensayando la division por todos los números primeros menores que aquel que multiplicado por sí mismo nos da un resultado igual ó mayor que el número propuesto. Pero como este método es muy complicado, se han formado tablas mas ó menos extensas de los números primeros. Las de Lambert contienen los comprendidos hasta* 102000. *El método mas sencillo para su formacion es el colocar en una fila todos*

Todos los factores simples se hallan ahora en una columna, á la derecha de la qual se tirará una raya de arriba abaxo; para formar los compuestos de dos, *se multiplicará cada uno de los simples por los que tenga debaxo de sí, y el producto se pondrá á la derecha de la raya enfrente del factor por qué se multiplica.* Luego, para formar los compuestos de tres *se multiplicará cada uno de los compuestos de á dos por todos los simples que haya debaxo del renglon en que está el compuesto de á dos;*

---

los números ímpares desde el 3 en adelante: despues se borran todos los que estan en los lugares 3, 6, 9, &c. ó en general en los lugares que son múltiplos de 3, respecto del que ocupa el primer lugar que es el 3; luego, los que estan en los lugares 5, 10, 15 &c. respecto del 5, ó en general los que ocupan un lugar expresado por un múltiplo de 5; luego, los que ocupan los lugares 7, 14, 21, &c. respecto del 7, &c. y los que vayan quedando serán los números primeros. Este procedimiento es muy antiguo, se debe á Eratóstenes, y se suele llamar la criba de Eratóstenes. *Pondremos aqui los números primeros comprendidos hasta* 1000.

Tabla de los números primeros comprendidos desde 1 hasta 1000.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,

41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ... 26

101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,

167,173,179,181,191,193,197,199, ... 47

211,223,227,229,233,239,241,251,257,263,269,271,277,

281,283,293, ... 63

307,311,313,317,331,337,347,349,353,359,367,373,379,

383,389,397, ... 79

401,409,419,421,431,433,439,443,449,457,461,463,467,

479,487,491,499, ... 96

503,509,521,523,541,547,557,563,569,571,577,587,593,

599, ... 110

601,607,613,617,619,631,641,643,647,653,659,661,673,

677,683,691, ... 126

701,709,719,727,733,739,743,751,757,761,769,773,787,

797, ... 140

809,811,821,823,827,829,839,853,857,859,863,877,881,

883,887, ... 155

907,911,919,929,937,941,947,953,967,971,977,983,991,

997, ... 169

Nota. Los números de la columna de la derecha dan á conocer los números primeros comprendidos hasta aquella centena donde estan, y por consiguiente que desde 1 hasta 1000 hay 169.

y así se procede hasta llegar al último que debe resultar en el renglon inferior, é igual con el número propuesto.

1.er exemplo. Si me propongo hallar los factores simples y compuestos del número 210, lo primero que executaré será colocar el 210 lo mas arriba y hácia la izquierda que me sea posible, y tiraré la raya á su derecha como aqui se presenta:

210	2			
105	3	6		
35	5	10; 15	30	
7	7	14; 21; 35	42; 70; 105	210.
1				

Y como el 210 termina en 0, veo que es divisible por 2, pongo por consiguiente el 2 enfrente, y hago la division diciendo: la mitad de 2 es 1, que pongo debaxo del 2 del 210; continúo: la mitad de 1 es 0 que pongo debaxo del 1 del 210, y me queda 1 que junto con el 0 de arriba da 10; la mitad de 10 es 5, que pongo á la derecha del 0; como el 105 no termina en 0 ni en guarismo par, no es divisible por 2. Así averiguo si es divisible por 3, diciendo: 1 y 0 es 1, y 5 son 6, y como 6 es múltiplo de 3, infiero que el 105 se puede dividir por 3; y por lo mismo coloco el 3 á su derecha, y hago la division de este modo: la tercera parte de 1 es 0 que no pongo, porque á la izquierda de los guarismos significativos no hace nada; este 1 le junto con el 0 que sigue, diciendo: la tercera parte de 10 es 3, que pongo debaxo del 0, y me queda uno que junto con el 5 son 15; la tercera parte de 15 es 5 que pongo á la derecha del 3; el 35 no es ya divisible por 3, pero lo es por 5; coloco el 5 á su derecha, y hago la division diciendo: la quinta parte de 35 es 7, que pongo debaxo del 5; y como el 7 es divisible por 7, hago la division diciendo: la séptima parte de 7 es 1; ahora, como el 1 es divisible por 1, tambien lo será el propuesto; pero como todos los números son divisibles por 1, no se hace caso de este factor.

Para hallar los factores compuestos de dos simples, tiraré á la derecha de estos una raya, y multiplicaré el 2 por todos los que tenga debaxo de sí, diciendo: 2 por 3 son 6, que coloco á la derecha de la raya, pero enfrente del 3, que es por el que he multiplicado; continúo: 2 por 5 son 10, que pongo enfrente del 5, que es por el que he multiplicado, y continúo: 2 por 7 son 14, que pongo por la misma razon enfrente del 7. Como el 2 ya no tiene mas factores simples debaxo, paso á multiplicar el 3 por todos los que tiene debaxo diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5, que es por el que he multiplicado, y paraque no se confunda con el 10 que tengo en el mismo renglon, los separo poniendo entre ellos punto y coma; continúo diciendo: 3 por 7 son 21, que pongo enfrente del 7, y por consiguiente al lado del 14, pero separándolos con punto y coma; luego paso á mul-

tiplicar el 5 por todos los que tenga debaxo de sí, diciendo: 5 por 7 son 35, que pongo enfrente del 7, y por consiguiente al lado del 21. Como el 7 no tiene ninguno debaxo de sí, no puedo ya sacar mas factores de á dos.

Paso á los de á tres: para lo qual despues de tirada una raya multiplicaré el 6, primer factor de á dos, por el 5 y por el 7, que son los simples que hay debaxo del renglon donde se halla el 6, diciendo: 6 por 5 son 30 que pongo enfrente del 5, que es el simple por qué he multiplicado; y luego 6 por 7 son 42, que pongo enfrente del 7. Paso ahora á multiplicar el 10 por el 7, que es el simple que hay en el renglon inferior á aquel en que se halla el 10 diciendo: 10 por 7 son 70 que pongo enfrente del 7, y por consiguiente al lado del 42. Como los que estan en el renglon inferior no tienen debaxo de sí en los simples ningun otro factor, no puedo formar mas factores de á tres; por consiguiente tiro la raya, y paso á los de á quatro. Para lo qual multiplicaré el 30 por los que haya en los simples debaxo del renglon donde está el 30; y como solo hay uno que es el 7 diré: 30 por 7 son 210, que pongo enfrente del 7, y me da á conocer que ya no hay mas factores, puesto que esto resulta del producto de los quatro factores simples que habia.

En esta operacion no hemos intentado hacer la division por 4, porque no habiéndose podido ya dividir por 2, con menos razon se podrá dividir por 4.

Suele ocurrir el que los factores simples se repitan, y en este caso tambien se repetirian los compuestos: lo qual se evita no poniendo ninguno de los que se tenian ya, y su procedimiento es como en el siguiente exemplo. Supongamos que quiero encontrar los factores simples y compuestos del número 180; lo primero que executaré, será colocarle lo mas á la izquierda y alto que me sea posible, como aqui se presenta:

180	2					
90	2	4				
45	3	6	12			
15	3	9	18	36		
5	5	10; 15	20; 30; 45	60; 90	180.	
1						

Tiro despues una raya á su derecha, y como el 180 termina en 0, conozco que es divisible por 2, y por lo mismo coloco el 2 á la derecha de la raya, y hago la division diciendo: la mitad de 1 no puede ser, tomo por lo mismo los dos primeros guarismos, y digo: la mitad de 18 es 9, que pongo debaxo del 8 del 18; y como de 18 no me ha quedado nada, digo: la mitad de 0 es 0, que pongo debaxo del 0 del 180, ó al lado del 9; como el 90 termina en 0, es divisible por 2, coloco el 2 enfrente y hago la division diciendo: la mitad de 9 es 4, que pongo debaxo del 9, y queda 1 que junto con el 0 del 90 son 10; la mitad

de 10 son 5, que pongo á la derecha del 4. Como el 45 no termina en 0 ni en guarismo par, no es ya divisible por 2; indago si es divisible por 3 diciendo : 4 y 5 son 9, y como 9 es divisible por 3, infiero que tambien lo será el 45, pongo el 3 á su derecha, y executo la division diciendo: la tercera parte de 4 es 1, que pongo debaxo y queda 1, que junto con el 5 da 15; la tercera parte de 15 es 5; como el 15 es aun divisible por 3, porque 1 y 5 son 6 que es múltiplo de 3, executo otra vez la division por 3, y pongo debaxo el quociente 5. Ahora, como el 5 no es ya divisible por 3, y lo es por el mismo 5, lo executaré diciendo: la quinta parte de 5 es 1, que pongo debaxo, y tengo ya los factores simples.

Para hallar los compuestos de á dos factores simples, tiraré una raya de arriba abaxo, á la derecha de los simples; multiplicaré el primer factor 2 por todos los que tenga debaxo de sí, diciendo : 2 por 2 son 4, que pongo á la derecha de la raya enfrente del segundo 2, que es por el que he multiplicado; despues digo: 2 por 3 son 6, que pongo enfrente del primer 3, que es por el que he multiplicado; despues deberé decir: 2 por 3, pero como el producto del 2 por este segundo 3, será el mismo que el del primero, no lo executo y paso á multiplicar el 2 por el 5, diciendo: 2 por 5 son 10 que pongo enfrente del 5, que es por el que he multiplicado. Ahora deberia multiplicar el segundo 2 por todos los que tiene debaxo de sí; pero como de estos productos me resultarian los mismos que ya tengo apuntados, excuso el hacer la operacion. Paso despues á multiplicar el 3 por todos los que tiene debaxo de sí, diciendo: 3 por 3 son 9, que pongo enfrente del 3 segundo, que es por el que multipliqué, y por consiguiente en un lugar vacío que me habrá quedado entre el 6 y el 10 que ya tenia; continúo diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente á la derecha del 10; como de multiplicar el segundo 3 por el 5 que tiene debaxo, me resultará 15 que ya tengo, omito esta operacion y paso á sacar los compuestos de á tres.

Para esto, despues de tirada la raya multiplicaré el 4, primer factor compuesto de á dos, por todos los simples que tenga debaxo de sí, esto es, por todos los simples que estan debaxo del renglon donde se halla el 4, diciendo: 4 por 3 son 12, que pongo enfrente del 1.er 3, que es por el que he multiplicado; luego, como de la multiplicacion del mismo 4 por el 2.° 3 me resultaria el 12 que ya tengo, omito esta operacion y paso á multiplicar el 4 por el 5, diciendo : 4 por 5 son 20, que pongo enfrente del 5; ahora el 6, segundo compuesto de á dos, le multiplicaré por todos los que en la columna de los simples se hallen inferiores á él, diciendo: 6 por 3 son 18, que pongo enfrente del segundo 3, que es por el que he multiplicado, y por consiguiente en el hueco que quedó entre el 12 y el 20; despues digo: 6 por 5 son 30, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 20; paso al 9 diciendo: 9 por 5 son 45, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 30. Como en la columna

de los simples no hay ya ningun factor que se halle debaxo del renglon de los compuestos de á dos, donde está el 10 y el 15, no puedo sacar mas compuestos de á tres, y paso á los de á quatro diciendo, despues de tirar la raya: 12 por el segundo 3, que es el que se halla inferior al 12 en la columna de los simples, es 36, que pongo enfrente del segundo 3; 12 por 5 son 60, que pongo enfrente del 5; continúo diciendo: 18 por 5 son 90, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 60. Como ya no puedo sacar mas compuestos de á quatro, paso á los de á cinco diciendo: 36 por 5 son 180, que pongo despues de tirada la raya enfrente del 5; y como ya no hay mas factores simples he concluido mi operacion.

Con el fin de que los principiantes se exerciten en esta operacion, les pondremos aqui aun estos dos exemplos, en que se hallan los factores del 630 y del 540.

I.

630	2				
315	3	6			
105	3	9	18		
35	5	10 ; 15	30 ; 45	90	
7	7	14 ; 21 ; 35	42 ; 63 ; 70 ; 105	126 ; 210 ; 315	630
1					

II.

540	2					
270	2	4				
135	3	6	12			
45	3	9	18	36		
15	3		27	54	108	
5	5	10 ; 15	20 ; 30 ; 45	60 ; 90 ; 135	180 ; 270	540
1						

80 En punto á encontrar los divisores de los números, se pueden proponer varias qüestiones útiles; pero aqui solo manifestaremos una, que es la de hallar el *máxîmo comun divisor* de dos ó mas números. *Divisor ó factor* ya hemos dicho lo que es, y con decir *comun* damos á entender que lo ha de ser de todos los números que tratemos de indagar si son divisibles por él; pero como pueden ser muchos los divisores que sean comunes, en la qüestion se nos pide que hallemos el mayor de todos, al qual le llamaremos *máxîmo.* Pero antes debemos demostrar el siguiente

Teor. *Si dos números tienen un divisor comun, este dividirá tambien exâctamente á la diferencia de estos números.*

Dem. Si descomponemos al mayor en dos partes, la una igual con el menor, la otra será la diferencia; pero si el todo era divisible por un número que dividia al menor, este número tambien deberá dividir á la resta; pues sino, en el mayor habria una parte divisible por dicho nú-

mero y otra no, en cuyo caso no seria divisible; lo qual siendo contra el supuesto manifiesta que la diferencia debe ser divisible por dicho número. L. Q. D. D.

Escol. En esta demostracion hemos dicho que si siendo una parte divisible, la otra no lo fuese, era señal de que aquel número propuesto no lo era. Hemos expresado esta circunstancia, porque aunque un número sea divisible por otro, no se infiere que lo sean todas las partes en que le descompongamos; pues si el 15 que es divisible por 5 le descomponemos en 8+7, ninguna de estas partes es divisible por 5, aunque lo es el 15; pero si le descomponemos en 10+5, ambas partes son divisibles por 5.

Corol. De aqui se deduce que *si dos números tienen un comun divisor, este tambien dividirá á la resta que quede de dividir el uno por el otro*; pues en este caso el dividendo se compondrá de cierto número de veces el divisor, mas la resta; luego le podemos descomponer en dos partes, que la una sea igual al producto del quociente hallado por el divisor, y la otra la resta; pero como por el supuesto habia un número que dividia exâctamente á ambos, y aqui tenemos descompuesto el mayor en dos partes que la una es divisible, á saber, la que equivale al producto del quociente por el divisor, resulta que la otra que es la resta tambien deberá ser divisible por dicho divisor.

Ahora, supongamos que se intente hallar el máxîmo comun divisor de los dos números 420 y 500; pues que ya sabemos encontrar los factores ó divisores, el primer método que se nos presenta es el de hallarlos por el método expuesto (79), y ver despues quales son los comunes, y de estos elegir el mayor; pero no necesitamos en esta operacion, sino hallar los simples en ambos, apuntar los que son comunes, y su producto será el máxîmo comun divisor pedido. Así, sacaremos los factores simples de estos números, y apuntaremos los que son comunes como aqui se presenta:

420	2 .	500	2 .
210	2 .	250	2 .
105	3	125	5 .
35	5 .	25	5
7	7	5	5
1		1	

Y como convienen en tener dos veces el 2 y una el 5, inferimos que el divisor mayor es 20 que resulta de multiplicar estos tres. Pero hemos dicho (nota de la pág. 65) que al fin no podríamos cerciorarnos de si el último quociente que nos resulta es número primo ó no, sino por métodos muy largos, los quales sino los empleábamos, podríamos en algun caso omitir algun divisor, y entonces al hallar el máxîmo por este método podríamos cometer alguna equivocacion, no siendo el verdadero. Por esto vamos á indagar analíticamente otras reglas que siempre nos conduzcan al resultado.

En efecto, pues que el divisor que buscamos ha de dividir exâctamente á los dos, resulta que no puede ser mayor que el menor de ellos; pues entonces este no se podria dividir exâctamente, porque en un número no puede caber exâctamente otro que sea mayor que él; luego sino puede

ser mayor, lo que debemos averiguar es si es igual, y sino, deberá ser menor. Para averiguar si es igual, dividamos el mayor por el menor, y si aquel es divisible por este, este será el máxîmo comun divisor. Executando la operacion vemos que el 500 dividido por 420, da 1 por quociente y dexa 80 de resta, y por consiguiente podemos descomponer al 500 en una vez 420+80 ó en 420+80; luego el máxîmo comun divisor que buscamos ha de dividir al 420 y al 80; luego no podrá ser mayor que el 80, pues ningun número que fuese mayor que el 80 podria dividir á este número exâctamente; veamos si el mismo 80 puede dividir exâctamente al 420, pues si le divide exâctamente, tambien dividirá al 420+80, y será por consiguiente 80 el máxîmo comun divisor; pero 420 dividido por 80 da de quociente 5 y dexa por resta 20, luego el 420 equivale á cinco veces el 80+20; y por lo mismo tendremos que los números cuyo máxîmo comun divisor vamos buscando, los podremos poner baxo esta forma: $420=5\times80+20$; $500=420+80=5\times80+20+80$.

Ahora, todo número que divida exâctamente á ambos, deberá dividir al 20 (cor. antec.), luego no podrá ser mayor que el 20; ensayemos si el 20 divide al 80; pues si esto sucede, como los demas se componen de cierto número de veces el 80 y de 20, resultará que los propuestos tendrán el mismo divisor comun; y como el 20 divide exâctamente al 80, inferimos que este es el máxîmo comun divisor que buscamos.

Luego todo está reducido á dividir el mayor de estos dos números por el menor, el menor por la primera resta, la primera resta por la segunda, esta por la tercera y así sucesivamente hasta llegar á una division que no dexe resta; en cuyo caso el número que nos haya servido de divisor, será el máxîmo comun divisor pedido. Si este número fuese igual con la unidad, era señal de que no tenian ningun divisor comun mayor que la unidad; y como sabemos que esta es divisor comun de todos los números, resulta que en este caso no tienen ningun comun divisor mas que la unidad; y entonces se dice que son números primeros entre sí.

Para conciliar la brevedad con la claridad y comodidad, se dispone la operacion como aquí se presenta:

500	420	80	20
	1)	5)	4)
080	020	00	
25	21	4	1

Se coloca el 420 á la derecha del 500 separados con las rayas de dividir; se pone el quociente 1 y la resta donde corresponde; luego se pone la resta á la derecha del 420 con las rayas de dividir; se hace la division, y se coloca el quociente y la resta donde corresponde; más á fin de que la resta segunda 20 no se confunda con el quociente anterior 1, se encierra este con una media luna como allí se presenta; y así se continúa hasta que no se encuentre resta.

Colocados de este modo, se halla por un procedimiento muy sencillo el quociente que resulta de dividir cada número por el máxîmo comun divisor. Para esto, se prolongan todas las rayas que van de arriba abaxo,

y se tira debaxo de las restas otra raya; debaxo del último divisor se pone la unidad, la qual da á entender que el máxîmo comun divisor 20, dividido por él mismo da 1 por quociente; luego, se multiplica este 1 por el quociente que tiene en la casilla de encima, y este producto se pone en la casilla de la izquierda; luego, este número se multiplica por el quociente que está en la casilla de encima, y al producto se le añade el que está en la casilla de la derecha, diciendo: 4 por 5 son 20, y 1 son 21, que pongo en la de la izquierda; y luego continúo del mismo modo diciendo: 21 por 1 es 21, y 4 son 25, que pongo en la casilla de la izquierda, esto es, debaxo del 500; con lo qual tengo debaxo de cada número de los de arriba, el quociente que resulta de dividirlos por el máxîmo comun divisor.

En efecto, el 20 dividido por 20 da 1; por eso pongo 1 en la primera casilla de la derecha; pero el 20 estaba contenido quatro veces en el 80, luego sacaré el número de veces que el máxîmo comun divisor 20 está contenido en el 80, multiplicando el número de veces que estaba contenido en el último divisor 20, por el que expresa las veces que este está contenido en el 80, esto es, multiplicando 1 por 4. Ahora, el 80 está contenido cinco veces en el 420, y ademas dexa por resta 20; luego para hallar las veces que está contenido en el 420, deberé multiplicar por 5 el número de veces que el máxîmo comun divisor está contenido en 80, esto es, por 4; y á esto deberé añadir las veces que el máxîmo comun divisor está contenido en la resta 20, esto es 1, y tendré 21.

Por la misma razon deberé multiplicar este 21 por el número de veces que el 420 está contenido en 500, porque por cada vez que lo esté, lo estará 21 veces el máxîmo comun divisor 20, y ademas deberé añadir las veces que esté contenido en la resta 80, y saco 25.

Si quisiera hallar el máxîmo comun divisor de tres ó mas números, procederia del modo siguiente: *hallaria primero el de dos*; *luego*, *el máxîmo comun divisor de este máxîmo comun divisor y de otro*; *luego*, *el máxîmo comun divisor del último máxîmo comun divisor hallado y de otro número*; *y así se procederia hasta que no hubiese mas números*. De manera que si me propusiese hallar el máxîmo comun divisor de los números 540, 432, 336 y 258, executaria la operacion hallando, como se ve en (*A*), el máxîmo comun divisor de los dos primeros, que es el 108.

(*A*)

540	432	108
	1)	4
108	000	
5	4	1

(*B*)

336	108	12
	3)	9)
012	00	
28	9	1

(*C*)

258	12	6
018	21)	2
06	00	
43	2	1

Despues buscaré el máxîmo comun divisor de 336, y de este máxîmo comun divisor 108 hallado antes, y encuentro ser el 12 (*B*).

Luego, paso á encontrar el máxîmo comun divisor del 258, que es el último número que me queda, y del 12 que es el último máxîmo comun divisor hallado, y encuentro executando la operacion (*C*), que el máxîmo comun divisor de todos estos números es el 6.

Pruebas de la multiplicacion y division.

81 Como el producto debe ser igual á tantas veces el multiplicando como unidades hay en el multiplicador, resulta que dividiéndole por el mismo multiplicando vendrá el multiplicador por quociente; y como podemos mudar los oficios de multiplicador en los de multiplicando, resulta que el producto dividido por el multiplicador debe dar por quociente el multiplicando; *luego en general, si el producto se divide por uno de los factores, el quociente será el otro factor si las dos operaciones estan bien hechas*; porque es muy difícil el que se compensen los errores en operaciones opuestas. Luego la division puede servir de prueba para la multiplicacion. Pero como aquella es mas complicada y difícil de executar sin equivocacion que esta, resulta que no nos trae cuenta el probar la multiplicacion por la division, y vale mas executar la operacion otra vez de nuevo.

82 Ahora, como el quociente manifiesta las veces que el divisor está contenido en el dividendo, *si le multiplicamos por el divisor, y añadimos á esto la resta si quedó alguna, nos vendrá el dividendo.* Luego esta multiplicacion nos podrá servir de prueba de la division; y como la multiplicacion es mas sencilla y menos expuesta á equivocaciones que la division, resulta que de esta sí debemos usar mas bien que de volver á executar la division. Luego para averiguar si está bien hecha la division executada en el primer exemplo de la division abreviada (76), en que el dividendo era 375271, el divisor 583, el quociente 643 y la resta 402, no haré mas que multiplicar el divisor 583 por el quociente 643, lo que me dará el producto 374869, que despues de añadirle la resta 402 se convierte en 375271: que siendo igual con el dividendo manifiesta que está bien executada la division.

De las alteraciones que sufren los resultados de las quatro operaciones explicadas hasta aqui por las que sufren los datos.

83 A los números que entran en cada operacion les hemos dado un nombre particular; pero quando se consideran en general las operaciones, á todos los números que entran en las qüestiones se les llama *datos*; y á lo que por medio de ellos se saca, se le da el nombre general de *resultado.* Ahora vamos á manifestar las alteraciones que sobrevienen á los resultados por las que sobrevienen á los datos. Para esto, observaremos en primer lugar, que si á uno qualquiera de los sumandos se le

añade una cantidad qualquiera, tendremos en la suma esta misma cantidad demas. Si á uno de los sumandos le quitamos una cantidad qualquiera, resultará en la suma esta misma cantidad menos; luego *una suma permanecerá la misma si á un sumando le añadimos una cantidad qualquiera y á otro se la quitamos*; porque por un lado añadimos á la suma la misma cantidad que por otro le quitamos. Si uno de los sumandos se multiplicase ó dividiese por una cantidad qualquiera, la suma variaria; pero como no resultarian en la suma aumentos ó decrementos, análogos á los que sufrieron los sumandos, porque habiéndose hecho á estos cierto número de veces mayores ó menores, la alteracion que resultaria á la suma seria la de tantas unidades mas ó menos, quantas resultaron demas ó de menos en aquel sumando, y no la del mismo número de veces mayor ó menor, no nos detendremos en esto.

84 Pasemos á la resta: *si al minuendo de una operacion de restar le añadimos una cantidad qualquiera, la resta contendrá tantas unidades mas que antes, quantas fuesen las que tenia aquella cantidad*; porque la diferencia se compondrá de la anterior y de lo que se ha añadido. *Si al minuendo se le quitase una cantidad qualquiera, resultaria la resta con tantas unidades menos como se hubiesen quitado al minuendo*; porque en este caso se diferenciarian en esto menos. *Si al subtraendo se le añade una cantidad qualquiera, la resta tendrá tantas unidades menos, quantas se añadieron al subtraendo*; porque en este caso le falta tanto menos para ser igual con el minuendo. Si al contrario, *se quitase del subtraendo una cantidad qualquiera, resultarian en la resta tantas unidades mas como tenia dicha cantidad*; porque esto mas le faltará ahora para ser igual con el minuendo. De aqui resulta que por dos causas puede aumentar la resta: por aumentar el minuendo, ó por disminiuir el subtraendo; y de dos modos disminuir: ó por disminuir el minuendo, ó por aumentar el subtraendo; y tambien deducimos, que *si al minuendo y subtraendo les añadimos ó quitamos una misma cantidad, la resta no debe sufrir alteracion*; de lo qual tambien podíamos estar cerciorados por el axîoma general de que *si á dos cantitades qualesquiera se les añade ó quita una misma cantidad, las restas quedarán iguales*; puesto que la diferencia no proviene de lo que hay de comun en las cantidades, sino de lo que no hay.

Por la misma razon que en la suma, aqui no tienen analogía los incrementos ó decrementos de la resta con los del minuendo ó subtraendo, quando se multiplican ó dividen por una cantidad qualquiera.

85 *Si á uno qualquiera de los factores de la multiplicacion se le añade una cantidad qualquiera, resultarán en el producto tantas unidades mas como haya en el producto del número que se añadió por el otro factor*; pues en este caso podremos descomponer al factor que ha sufrido alteracion en dos partes, que la una sea el factor que teníamos antes, y la otra el aumento que le sobrevino; y al hacer la multiplicacion de la primera

parte, resultará el producto primitivo; y al multiplicar por la segunda, resultará el producto que hemos dicho, que es el que se hallará demas. Del mismo modo, *si á un factor se le quitase un número qualquiera de unidades, resultarian en el producto tantas unidades menos como expresase el producto de estas unidades por el otro factor*; porque en este caso podríamos suponer al factor que ha variado igual con el anterior menos la cantidad que se quitó.

Si á ambos factores se añadiese ó quitase una misma cantidad, resultarian alteraciones en el producto que aunque se podrian explicar, no son interesantes por quanto no tienen analogía con las de los factores.

86 Teor. *Si á un factor qualquiera le multiplicamos por una cantidad qualquiera, resultará un producto que se compondrá de tantas veces el primitivo, como unidades tenia el número por qué se multiplicó el factor.*

Dem. En efecto, sabemos que el producto de 4 por 5 son 20; pues vamos á probar que si multiplicamos á uno qualquiera de los factores por un número qualquiera, resultará un producto que contendrá ó se compondrá de tantas veces el anterior, como unidades tenia el número por qué se multiplicó; porque supongamos que el 4 sea el que se multiplique por 3, resultará entonces un número que equivaldrá (53) á la suma de tres sumandos iguales con el 4, ó á 4+4+4; ahora, este número quedará multiplicado por 5, si lo quedan todas las partes de que se compone (Introd. ax. 3.º); luego haciendo la multiplicacion de cada parte por 5, resultará el producto 20+20+20=60, que se compone de tantas veces el anterior, como unidades tenia el número por qué se multiplicó el 4.

87 Teor. *Si á cada uno de los factores se le multiplica por un número qualquiera, resultará un producto que contendrá ó se compondrá de tantas veces el anterior, como unidades haya en el producto de los dos números por qué se multiplicaron los factores.*

Dem. En efecto, si al 4 de la multiplicacion anterior le multiplicamos por 3, se convertirá en 12 ó en 4+4+4; si al 5 le multiplicamos por 2, se convertirá en 10 ó en 5+5; luego la operacion se habrá reducido á multiplicar 4+4+4 por 5+5; y como para hacer la multiplicacion de los todos, debemos executar (Introd. ax. 3.º) la de todas sus partes, resulta que de multiplicar todas las partes del multiplicando por la primera del multiplicador, se originarán tantos productos iguales con el primitivo, como partes ó sumandos habia: pero estos eran tantos como unidades tenia el número por qué se multiplicó, luego de todo el multiplicando por la primera parte del multiplicador, resultan tantos productos iguales con el primitivo, como unidades hay en el número por qué se multiplicó el multiplicando; y como cada parte ó sumando del multiplicador dará otros tantos productos, resulta que en todos habrá tantos, como exprese el producto de los números por qué se multiplicaron los factores.

88 Teor. *Si á uno de los factores se le divide por un número qualquiera, el producto quedará dividido, ó se habrá hecho tantas veces menor, como unidades tenia el número por qué se dividió el factor.*

Dem. En efecto, sabemos que el producto de 5 por 8 es 40; si dividimos por 2 á uno de los factores tal como el 8, vamos á demostrar que el producto se reducirá á la mitad del anterior, ó que este se compondrá de dos veces el nuevo que resulte. En efecto, dividir el 8 por 2 es dividirle en dos partes iguales; luego para nosotros será lo mismo 8 que 4+4, y el producto primitivo será 5×4+5×4, ó dos veces el producto que resulta de multiplicar el 5 por el 4; pero este es igual al de 5 por la mitad del 8, luego este producto está contenido dos veces en el anterior.

Por la misma razon si cada uno se dividiese por un número qualquiera, el producto estaria contenido tantas veces en el anterior, como unidades contubiese el producto de ambos números.

89 *Cor.* De aqui resulta que *lo que sucede á alguno de los factores sucede al producto; y que si á uno de los factores se le multiplica por un número qualquiera, y al otro se le divide por el mismo número, el producto permanece el mismo*; pues por una parte se le hace tantas veces mayor, como unidades tenia el número por qué se le multiplicó, y por otra se le hace el mismo número de veces menor; luego le hemos dexado conforme estaba.

90 Pasemos á la division: si al dividendo ó al divisor le añadimos ó quitamos una cantidad qualquiera, el quociente se alterará; pero las alteraciones que le resultarán no tendrán tampoco analogía con la de los términos de la division, y por tanto no nos detendremos en exâminarlas. Ahora, *si estos términos crecen ó menguan por via de multiplicacion ó division, resultarán en el quociente las mismas alteraciones que en el dividendo, y las alteraciones contrarias á las que sucedieron al divisor; esto es, que si se multiplica ó parte el dividendo por un número qualquiera, equivale esta operacion á multiplicar ó dividir el quociente por el mismo número; y si se multiplica ó parte el divisor por un número qualquiera, equivale esto á haber hecho lo contrario con el quociente, ó á haber dividido ó multiplicado el quociente por el mismo número.*

En efecto, supongamos que se tenga la division de 24 por 6, y nos resultará 4 por quociente. Si el dividendo se multiplica por un número qualquiera tal como 2, tendremos que se convertirá en 2×24=48, ó (§53) en 24+24: luego estará reducida ahora la operacion á dividir 24+24 por 6; y como para dividir un todo necesitamos dividir todas sus partes, tendremos que esto equivaldrá á $\frac{24}{6}+\frac{24}{6}$; pero aqui habrá siempre indicadas tantas divisiones como esta $\frac{24}{6}$, quantas partes tubiese el dividendo último iguales con el primitivo; y como estas son tantas como unidades tenia el número por qué se multiplicó el dividendo, resulta que el nuevo quociente se compondrá de tantas veces el primitivo como unidades tenia el número por qué se multiplicó el dividendo.

Si suponemos ahora que el dividendo se parta por un número qualquiera, el quociente resultará tantas veces menor, quantas unidades hay en el primitivo por qué se partió el dividendo. En efecto, supongamos que al dividendo 24 se le divida por 2, y tendremos entonces 12, que dividido por 6 da 2 por quociente, que es dos veces menor que el anterior 4; para cerciorarnos de que en todos los casos debe resultar lo mismo, observaremos que podremos descomponer al dividendo primitivo en tantas partes iguales con el quociente que resulte de dividirle por un número qualquiera, como unidades haya en este número; luego el dividendo primitivo le podremos descomponer en 12+12, y dicha division tambien quedará reducida á dividir cada parte 12 por el divisor 6; luego dicha division equivaldrá á $\frac{12}{6}+\frac{12}{6}$, ó á dos veces la division que resulta despues de haber dividido por 2 el dividendo; y como en general la primitiva equivaldrá á tantas veces la resultante de ella, como unidades tenia el número por qué se dividió, tenemos que el quociente de esta se hallará tantas veces contenido en el anterior, como unidades tenia dicho número por qué se partió el dividendo, ó será tantas veces menor que él, quantas unidades haya en dicho número.

91 Para hacer ver lo que resulta de las alteraciones del divisor, atenderemos al orígen de la division que es la resta; porque nos parece el método mas claro para convencerse de estos resultados, que son los de mayor trascendencia en las Matemáticas, y que por lo mismo conviene queden bien demostrados. Supongamos ahora que permaneciendo uno mismo el dividendo, se multiplique el divisor por un número qualquiera; entonces este divisor se compondrá de tantas veces el anterior como unidades tenia el número por qué se multiplicó; y como el quociente expresa las veces que el divisor se puede restar del dividendo, tendremos que al averiguar el quociente por este medio, cada resta que hagamos ahora equivaldrá á tantas como la anterior, como unidades tenia el número por qué se multiplicó el divisor; luego este número de restas que ahora se puedan hacer, será tantas veces menor que el anterior como unidades tenga el número por qué se multiplicó el divisor; pero este número de restas es lo que forma el quociente, luego queda probada la proposicion.

Para hacer sensible el raciocinio, supondremos que el divisor 6 se haya multiplicado por 2, y se habrá convertido en 12; ahora, al averiguar quántas veces el 12 se puede restar del 24, tendré que cada resta de 12 me equivaldrá á 2 de 6; luego el número de restas que podia hacer con el 6, será duplo del que puedo hacer con el 12, ó las que puedo hacer con el 12 será un número subduplo del que puedo hacer con el 6: luego el quociente de dividir por 12 será dos veces menor que el de dividir por 6. Si suponemos ahora que el divisor se parta por un número qualquiera, obtendremos un quociente que contendrá tantas veces al primitivo, ó que será tantas veces mayor que él, quantas unidades hay en el nú-

mero por qué se dividió. En efecto, partiendo el divisor por un número qualquiera, resulta otro que será tantas veces menor que él, como unidades tenia el número por qué se dividió; y por consiguiente por cada vez que el primitivo se pudiese restar, se podrá restar este tantas veces como unidades tenia dicho número; pero estos números que expresan las restas que se pueden hacer son los quocientes, luego el quociente que nos resulta será tantas veces mayor que el primitivo, como unidades hay en el número por qué se partió el divisor. Para hacer sensible este raciocinio supongamos que á nuestro divisor 6 se le parta por 2, y tendremos que se convertirá en 3; y como el primitivo equivalia á 3+3, resulta que por cada vez que podamos restar el 6, podremos restar dos veces el 3; luego el número de veces que se podrá restar el 3, será dos veces mayor que el que expresaba las veces que se puede restar el 6; pero el número que expresa estas veces es el quociente, luego el quociente que resulta &c.

92 Teor. *Un quociente no se altera, aun quando se multipliquen los dos términos de la division por un mismo número.*

Dem. Con multiplicar al dividendo por un número qualquiera, se hace al quociente tantas veces mayor (90) como unidades hay en dicho número; y como con multiplicar al divisor por el mismo número se le hace (91) el mismo número de veces menor, resulta que por una parte le aumentamos lo que por otra le disminuimos; luego permanecerá el mismo que antes. Así es, que si multiplicamos por 2 los dos términos de la division $\frac{24}{6}=4$, se convertirá dicha operacion en $\frac{48}{12}=4$. L.Q.D.D.

93 Teor. *Un quociente no se altera, aun quando se partan el dividendo y divisor por un mismo número.*

Dem. Con partir al dividendo hacemos al quociente tantas veces menor, como unidades tiene dicho número (90); y con partir el divisor por el mismo número le hacemos (91) el mismo número de veces mayor; luego tambien aqui lo que disminuimos por una parte, lo aumentamos por otra, y por lo mismo quedará del mismo modo que estaba. Así, si partimos por 2 los dos términos de la division $\frac{24}{6}=4$, se convertirá en $\frac{12}{3}=4$, que da el mismo quociente. L. Q. D. D.

Corol. De todo esto que hemos explicado resulta que *lo que se hace con el dividendo, queda executado con el quociente*; y *que lo contrario de lo que se hace con el divisor, queda hecho con el quociente*; y *que el quociente no se altera aun quando se multipliquen ó partan por un mismo número el dividendo y el divisor.*

DIGRESION

acerca de otros diversos medios que hay para probar las operaciones, y de algunos métodos particulares de abreviacion en las operaciones explicadas.

∝ 94 Dos son las razones que nos obligan á poner esta digresion : la primera, el que no se tiene una idea cabal y fundada en principios, de las pruebas de las operaciones que se conocen en los libros prácticos ; y la segunda, el que siendo el tiempo lo que mas debe economizar el hombre, se le deben proporcionar todos los medios para conseguirlo.

Es muy conocido entre los prácticos que para averiguar si una multiplicacion está bien hecha, se coloca en la cabeza ó lado superior de una cruz la resta que queda de quitar todos los nueves del multiplicando ; en el pie la que resulta de quitar todos los nueves del multiplicador ; en uno de los brazos el producto que resulta de la multiplicacion de estas dos restas, despues de quitados de él los nueves ; y que si la resta que queda de quitar los nueves del producto que se coloca en el otro brazo, es igual con esta última, es señal de estar bien executada la operacion. Pero lo que no es comun, y aun es demasiado raro, ó por mejor decir no es conocido, es el fundamento de esta regla, sus defectos, ni que esto que se hace con el nueve, se puede hacer con qualquiera otro número ; ni qual es el número que se debe elegir con preferencia por ser mas sencillo, y al mismo tiempo no ser su práctica tan defectuosa; ni que esto que se hace en la multiplicacion, se puede executar en qualquiera otra operacion ; que es todo lo que nos proponemos investigar.

Esta prueba que los prácticos llaman *por nueve*, no es mas que un caso particular de la que se puede hacer con otro número qualquiera en todas las operaciones. Sea primero una operacion de sumar: si todos los sumandos los descomponemos en dos partes, que la una se componga del múltiplo mayor posible de aquel número por qué se trata de probar, y la otra que sea la resta que haya demas: tendremos, que sumándolos, la suma se compondrá de un múltiplo del mismo número mas una resta ; de la suma de los múltiplos de los sumandos resultará un múltiplo del mismo número por qué se prueba ; luego la resta de la suma solo podrá provenir de la suma de las restas de los sumandos; luego *si sumamos separadamente las restas de los sumandos, y de esta suma quitamos todas las veces que se pueda el número por qué se prueba, deberá resultar la resta que queda de quitar el mismo número todas las veces que se pueda de la suma.*

Para hacer sensible este raciocinio, supongamos que se quiere sumar 34 con 28, y tendremos la suma 62 ; para averiguar si la operacion está bien hecha por medio del 5, que es el que da mas fácilmente las restas (esc. de la 1.ª nota del § 79), descompondré al 34 en 30+4, siendo 30 el múltiplo mayor de 5 que se contiene en 34; y el 28 le descom-

pondré tambien en 25+3, siendo 25 el múltiplo mayor de 5 que se contiene en 28. Ahora, la suma de 30 con 25 se compondrá de un número exâcto de 5, y por lo mismo no dexará resta despues de quitar el 5 de la suma total todas las veces que se pueda; luego la resta que quede en esta, provendrá de la suma de 4 con 3, ó de 7; luego si de 7, que es la suma de estas restas, quitamos el 5 todas las veces que se pueda, nos deberá venir la misma resta, que de quitar los 5 de la suma total. En efecto, quitando de 7 el 5 quedan 2, y como el último guarismo del 62 es 2, que es menor que 5, esta será la resta (esc. citado); y por lo mismo vemos que la operacion está bien hecha. En la práctica se dispone esta operacion y su prueba, poniendo la resta á la derecha de los sumandos y de la suma total, separándolos con una raya, como aqui se presenta:

34	4
28	3
—	—
62	2

Y la prueba está reducida á decir: 4 y 3 son 7, fuera de los 5 quedan 2, que debe ser la resta de la suma, como en efecto se verifica.

95 Si se tratase de restar, descomponiendo al minuendo y subtraendo en dos partes como antes; de restar los múltiplos del número por qué se prueba, no vendrá sino otro múltiplo; y así, la resta que haya en el residuo, despues de quitar todas las veces que se pueda el número propuesto, solo provendrá de las restas de los términos de la operacion; luego la diferencia de estas restas deberá ser igual á la de la diferencia total. Si la resta del subtraendo fuese mayor que la del minuendo, se restará de la de este junto con el número por qué se prueba, y la resta deberá ser la misma que la de la diferencia. Para hacerlo sensible, supongamos que se quiera restar de 34 el 28, la diferencia será 6, cuya resta despues de quitados los 5 es 1. Ahora, descomponiendo al 34 en 30+4, y al 28 en 25+3, la resta de 25 á 30, no dará sino múltiplos del número por qué se prueba; luego esta no influirá nada en la resta de la diferencia; luego esta solo provendrá de la diferencia entre las restas de los términos de la operacion, como en efecto se verifica, pues 4—3=1.

En la práctica se dispone esta prueba del mismo modo, como aqui se ve:

34	4
28	3
—	—
06	1

Y está reducida á decir: de 3 á 4 va 1, que fuera de los 5 es 1, que debe ser la de la resta como lo es en efecto.

96 En quanto á la multiplicacion observaremos que despues de descompuestos los factores en dos partes con la condicion expresada (94), como debemos multiplicar todas las partes del multiplicando por todas las del multiplicador, el producto de las partes que sean múltiplo de aquel por qué se prueba, será tambien múltiplo de dicho número; luego la resta del producto total no dependerá en manera alguna del producto de estos múltiplos. El producto de la parte del multiplicando, que es el múltiplo, por la resta del multiplicador, será tambien múltiplo de dicho número; é igualmente el producto de la parte del multiplicando que no es múltiplo, por la parte

del multiplicador que lo es; luego la resta no provendrá de ninguno de estos productos parciales; y como solo falta ya multiplicar las restas, tendremos que la resta del producto total solo provendrá de la del producto de las restas de los factores; luego *si multiplicamos estas restas entre sí, y de este producto quitamos las veces que se pueda el número por qué se prueba, esta resta que quede será la del producto total, si la operacion está bien hecha.* Así, para hacer sensible este raciocinio, supongamos que se quiera multiplicar el 34 por 28, que dan 952 por producto; descompondremos á los factores en 30+4 y en 25+3; al multiplicar 30 por 25 darán un múltiplo de 5, porque ambos factores lo son; luego este producto no influirá en la resta del total. Al multiplicar el 30 por 3, y el 25 por el 4, como en cada uno de estos productos hay un factor que es múltiplo de 5, resulta que tambien lo serán dichos productos; luego no podrán influir en nada en la resta del producto total; y como ya no falta sino multiplicar el 4 por el 3, resulta que la resta del producto total solo provendrá de este producto; luego si multiplicamos el 4 por el 3, y de su producto 12 quitamos las veces que se pueda el 5, de lo qual nos quedan 2, esta resta deberá ser la del producto total 952, como en efecto se verifica.

En la práctica se dispone esta operacion, poniendo en la cabeza de una cruz la resta del multiplicando, en el pie la del multiplicador, en uno de los brazos la del producto de estas, y en el otro la del producto total; de manera que en este caso se dispone así:

Se pone en la cabeza de la cruz el 4, en el pie el 3, se multiplican estas diciendo: 4 por 3 son 12, que fuera de los 5 da 2 de resta, y se pone en un brazo, por exemplo, en el izquierdo; se pasa á encontrar la resta del producto que es 2, se pone en el otro brazo; y como las restas que se hallan en ambos brazos son iguales, inferimos que la operacion está bien hecha.

4
2 —— | —— 2
3

97 Como en la division el dividendo es igual al producto del divisor por el quociente, resulta que el producto de las restas del divisor y del quociente, junto con la resta que quedó de la division, debe dexar por resta la misma que el dividendo. Así, si nos proponemos probar si la division de 952 por 28, que da 34 por quociente, está bien hecha, lo executaremos como aqui se ve:

Pondremos en la cabeza de la cruz el 3, resta que quedó de quitar los 5 del divisor 28; en el pie pondremos 4, que es la que queda del quociente; las multiplicaremos, y del producto 12 quitando los 5 quedan 2, que pondremos en uno de los brazos, y esta debe ser la resta que queda del dividendo 952, como en efecto se verifica, y que colocaremos en el otro brazo.

3
2 —— | —— 2
4

Si en la division hubiese resta, al producto de las restas del divisor por el quociente se deberá añadir la resta de la division, y de esto quitar las veces que se pueda el número por qué se prueba; así, para probar la division de 87 por 13, que da $6\frac{9}{13}$ de quociente, pondremos en la cabeza de la cruz 3 que es la resta del divisor, en el pie 1 que es la resta del quociente; multiplicaremos 3 por 1 que da 3, al producto le añadiremos la resta 9 de la division, y tendremos 12 cuya resta es 2, que pondremos en un brazo de la cruz, y luego en el otro pondremos la del dividendo, que deberá ser la misma que esta, como en efecto se verifica.

98 Se ve no obstante que todas estas pruebas tienen el inconveniente de que si la equivocacion consiste en un múltiplo del número por qué se prueba, no la da á conocer la prueba. Todos los números son á propósito; pero el que ha sido mas usado hasta ahora para probar, ha sido el 9, porque su resta se halla sumando los guarismos, y viendo qual es la resta que dexa esta suma; esta propiedad la tenemos nosotros demostrada en general (en la nota del § 79); más no obstante la vamos á deducir aqui independientemente de lo dicho alli, en el siguiente:

Teor. *Si se divide por 9 un número qualquiera, quedará la misma resta que se hallaria sumando las cifras de este número, consideradas como expresando unidades simples, y quitando 9 al paso que la suma vaya siendo igual ó mayor que el 9.* Por exemplo: dividiendo el número 57326 por 9 hallo el quociente 6369, y ademas la resta 5; pues digo que si sumo todos los guarismos del dividendo, y de la suma quito el 9 todas las veces que pueda, la resta será 5; al paso que vaya haciendo la suma, iré desechando los 9, en esta forma: 5 y 7 son 12, fuera de los 9 ó quitando 9 quedan 3; sumo esta resta 3 con los guarismos siguientes diciendo: 3 y 3 son 6, y 2 son 8, y 6 son 14, que fuera de los 9 da por resta 5, que es en efecto lo que se debia verificar.

Dem. Para demostrar esta proposicion, observaremos que si se divide por 9 alguno de los números 10, 100, 1000, 10000, &c. la resta será siempre 1; porque todos estos números equivalen á 9, 99, 999, 9999, mas la unidad; y como todos los guarismos de la primera parte son divisibles por 9, lo será toda ella; luego la resta de dividir los números propuestos será 1; luego si dividimos por 9 alguno de los números $20=10+10$, $200=100+100$, $2000=1000+1000$, &c. la resta será 2; si se divide por 9 alguno de los $30=10+10+10$, $300=100+100+100$, &c. la resta será 3. De donde inferiremos en general que *la resta que queda de dividir por 9 un guarismo significativo, seguido de tantos ceros como se quiera, es igual al mismo significativo*; y como todo número se puede descomponer en sumandos de esta especie, por exemplo, el 57326 en $50000+7000+300+20+6$, resulta que las restas parciales serán los guarismos del mismo número, á saber, en nuestro caso $5+7+3+2+6=23$; luego si de esta suma quitamos los 9 que contenga, nos vendrá por última

resta la que obtendríamos executando la division, que aqui es 5, despues de quitado dos veces el 9. L. Q. D. D.

Entendido esto, pasemos á manifestar como se prueban las operaciones por 9.

Principiaremos por la suma y resta, en esta forma: para la primera, se hallarán las restas de todos los sumandos, se sumarán, y de la suma se quitarán los 9; y la resta que resulte deberá ser la de la suma total. Para conciliar la claridad con la comodidad, se pone al lado de cada sumando su resta, tirando antes una raya de arriba abaxo; y así, si queremos averiguar si la operacion (41) está bien hecha, los colocaremos aqui, y á su lado tiraremos una raya de arriba abaxo, á cuya derecha pondremos las restas como aqui se ve:

54984	3
76698	0
85772	2
43886	2
3786	6
243576	0
193893	6
4987	1
87682	4
998	8
7677	0
53084	2
2893	4
75658	4
935574	6

Y como sumadas todas estas restas, despues de quitar los 9 queda por resta total 6, y la de la suma tambien es 6, inferiremos que la operacion está bien hecha, como lo sabíamos ya (51) por el otro método.

Para la resta se hallarán las restas del minuendo y del subtraendo, se restará la de este de la de aquel, y la que resulte deberá ser la de la resta total. Para comodidad se colocarán aqui las restas, como en la suma, de la forma siguiente:

16037000	8
4572695	2
11464305	6

Donde advierto, que como la resta 6 es la del residuo 11464305, me da á conocer que la operacion está bien hecha.

Si la resta del subtraendo fuese mayor que la correspondiente del minuendo, se tomará la de este con un 9, y de esta suma se hará la resta. Por exemplo: si de 6392 quisiera restar el 4534, lo haria en esta forma:

6392	2
4534	7
1858	4

Y para probarla diria: de 7 á 2 no puedo, y así restaré el 7 del 2 junto con un 9, y será: de 7 á 11 van 4; que es en efecto la de la resta.

Para la multiplicacion se practicará lo siguiente: 1.º se suman todos los guarismos del multiplicando, como si fuesen unidades sencillas; se verá lo que queda fuera de los 9, y la resta que quede se pondrá en un parage qualquiera, ó como hemos dicho (96) que es como lo hacian nuestros Aritméticos antiguos; 2.º se sumarán todos los guarismos del multiplicador, como si fuesen unidades sencillas; se verá lo que queda despues de quitados los 9; esta resta se colocará en el pie de la cruz; 3.º se multiplicarán estas dos restas entre sí, y se colocará el producto, sino llega á 9, en uno de los brazos de la cruz, si es igual con 9 se pondrá 0, y si pasa se pondrá la resta que quede de quitar los 9; 4.º se sumarán los guarismos del producto, de la suma se quitarán todos los 9, y la resta que quede se pondrá en el brazo derecho de

la cruz; si esta es la misma que la que está en el brazo izquierdo, es señal de que la operacion está bien hecha; sino es la misma, no lo estará.

Por exemplo: si quiero aplicar estas reglas á la operacion hecha (64), quitaré los 9 del multiplicando 9658 y obtendré por resta 1, que coloco en la cabeza de la cruz, como aqui se presenta:



Executo lo mismo con el multiplicador 734, y la resta 5 que obtengo la pondré en el pie de la cruz. Ahora multiplicaré el 1 por 5, y el producto 5 fuera de los 9, da 5 que colocaré en uno qualquiera de los brazos, por exemplo, en el izquierdo; sumaré los guarismos del producto 7088972 y quitaré los 9 al mismo tiempo, lo que me dará 5 por resta que pongo en el otro brazo; y como esta resta es la misma que la que se halla en el otro brazo, inferimos que la multiplicacion está bien hecha.

Ahora, para averiguar si la operacion executada (exem. 1.° del § 76) está bien hecha, quitaré los 9 del divisor 583, y la resta 7 que obtengo, la pongo en la cabeza de la cruz, como aqui se ve:



Paso al quociente 643 y digo: 6 y 4 son 10, fuera de los 9 queda 1; y 3 son 4, fuera de los 9 quedan 4; paso á la resta que es 402, y digo: 4 y 0 son 4, y 2 son 6, fuera de los 9 son 6; que juntos con la resta anterior 4, que quedó del quociente entero, dan 10, que fuera de los 9 queda 1, la qual pongo en el pie de la cruz; multiplico la una por la otra diciendo: 1 por 7 es 7, fuera de los 9 son 7, que pongo en un brazo, por exemplo, en el izquierdo; paso á quitar los 9 del dividendo 357271, y la resta 7 que obtengo, la pongo en el otro brazo; y como esta resta es la misma que la anterior, infiero que la operacion está bien hecha.

Se debe advertir que quando en la prueba de estas dos operaciones se halla que es 0 la primera resta, se puede omitir el encontrar la segunda, pues que su producto por la primera debe ser 0. Luego en este caso todo está reducido á ver si es 0 la resta del producto en la multiplicacion; y la del dividendo en la division sin resta, ó á ver si es la misma que la del dividendo la de la resta quando la haya.

99 Por desgracia esta prueba de que hacen tanto aprecio los prácticos, está muy expuesta á equivocaciones; pues por su medio no percibiríamos el error, 1.° quando se hubiesen omitido ó puesto demas uno ó muchos ceros; 2.° si se hubiesen omitido ó puesto demas uno ó muchos nueves; 3.° si se hubiese puesto un 0 por 9 ó un 9 por 0; 4.° si se hubiese invertido el órden de dos ó mas guarismos; y 5.° si se hubiesen cometido dos ó mas errores que se compensasen; por exemplo, si en vez de 49 se hubiera escrito 67, porque la suma de estos guarismos es 13, que fuera de los 9 da 4.

Sobre este asunto de pruebas se disputa mucho entre los prácticos;

pero todas estas disputas no merecen llamar nuestra atencion; pues como observó muy bien el bachiller Juan Perez de Moya (*), nacen de ignorancia; porque los que se quieren asegurar de si una operacion que otro les presenta, está bien hecha, la vuelven á executar; sin embargo de esto, antes de terminar este punto, no podemos dexar de manifestar un método para probar por 11, que es muy poco conocido, y que tiene la ventaja de ser casi tan sencillo como el del 9, reuniendo al mismo tiempo la circunstancia de estar exênto de los mas de los errores de este.

En efecto, hemos probado (nota del § 79) que un número será divisible por 11, si sumados todos los guarismos que ocupan un lugar par, añadiendo á esta suma un 0, y añadiendo la suma de los ímpares, esto era divisible por 11, lo seria el propuesto; y sino, haciendo la division por 11, de esta suma quedará la misma resta que del total; luego el procedimiento de esta operacion solo estriba en dividir por 11 un número compuesto de dos guarismos, y ver la resta que queda; por lo que se puede decir que dicho procedimiento es casi tan sencillo como el de los nueves. Así, si queremos averiguar, probando por 11, si la multiplicacion (64) está bien hecha, como el multiplicando es 9658, sumaré los guarismos que ocupan lugares pares diciendo: 5 y 9 son 14, añadiéndole un 0 y la suma de los ímpares, que es tambien 14, da 154; ahora executaré lo mismo con este añadiendo al 5 un 0, y la suma de los ímpares que es 5, y tengo 55, que como es divisible por 11 no dexa resta; luego valiéndome de la observacion hecha en el párrafo anterior, solo averiguaré si es 0 la resta del producto 7088972, diciendo: 7 y 8 son 15, añadiéndole un cero son 150; ahora sumaré los ímpares diciendo: 2 y 9 son 11, y 8 son 19, y 7 son 26, que sumados con los 150, dan 176; y para averiguar la resta, al guarismo 7 añado un 0 y la suma 7 de 1 y 6 guarismos ímpares; y como la suma 77 es divisible por 11 sin dexar resta, es prueba de que la operacion está bien hecha, como debe verificarse. Para hallar la resta que queda de dividir por 11, podríamos dar y demostrar esta regla: *súmense todos los guarismos que ocupan lugares ímpares, de esta suma réstese la suma de los que ocupan lugares pares, y la resta que quede será la de la division por 11*; pero podemos dar otra mas sencilla fundada sobre la propiedad que tiene el número 11, de que sus nueve primeros múltiplos se escriben por dos cifras iguales, y

(*) *Este autor se extiende en el libro 6.° de su apreciable tratado de Matemáticas, impreso en 1573, á probar por todos los números dígitos, todas las operaciones de la Aritmética; como son, ademas de las expuestas, las que se hacen con quebrados, con números denominados, la regla de tres, la raiz quadrada y raiz cúbica: terminando dicho libro con manifestar que esto de las pruebas no tendria fin, porque seria tambien necesario probar la operacion que sirvió de prueba, y luego esta, y así sucesivamente.*

es la siguiente : *réstese el guarismo de especie superior de su inmediato á la derecha , la resta que quede de su inmediato á la derecha , y la resta que quede del guarismo siguiente ; continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos , y la resta última que quede , será la que resulta de dividir por* 11. Si el primer guarismo es mayor que el que tiene á su derecha , se le quita una unidad al primero y se resta del que tiene á su derecha , junto con la unidad que se quitó al anterior , que vale 10 respecto de él ; y lo mismo se executa si alguna resta es mayor que el guarismo correspondiente. Y así , si queremos averiguar qual es la resta que queda de dividir por 11 el número 358, diria : de 3 á 5 van 2, de 2 á 8 van 6 , y esta será la resta que queda.

El fundamento de esta regla es que vamos descomponiendo tácitamente el número propuesto en múltiplos de 11 ; porque quando decimos de 3 á 5 van 2, descomponemos las cinco decenas en 3+2 ; por consiguiente , podemos descomponer el 358 en 330+28 ; quando luego decimos de 2 á 8 van 6, descomponemos al 28 en 22+6 ; luego esto equivale á haber descompuesto el 358 en 330+22+6 ; y siendo divisibles por 11 todas las partes , menos la última , se tendrá que esta será la resta.

Para averiguar si el 7088972 es divisible por 11 , diremos : de 7 á 0 no puede ser , de 6 á 10 van 4 , de 4 á 8 van 4 , de 4 á 8 van 4 , de 4 á 9 van 5 , de 5 á 7 van 2 , de 2 á 2 no va nada ; luego el número dado es divisible por 11 , pues no dexa resta.

Entendido esto , probemos por medio del 11 , la quinta operacion (66), y diremos para hallar la resta del multiplicando 18325 : de 1 á 8 van 7, de 7 á 3 no se puede , de 6 á 13 van 7 , de 7 á 2 no se puede , de 6 á 12 van 6 , de 6 á 5 no se puede , de 5 á 15 van 10 ; luego la resta será 10 que pondremos en la cabeza de la cruz , como aquí se ve :



Para hacerlo respecto del multiplicador 3007, diremos : de 3 á 0 no se puede , de 2 á 10 van 8. de 8 á 0 no se puede , de 7 á 10 van 3 , de 3 á 7 van 4 ; luego pondremos 4 en el pie de la cruz. Ahora multiplicaremos el 10 por 4 , y del producto 40 quitaremos el 11 las veces que se pueda diciendo : de 4 á 0 no se puede , de 3 á 10 van 7 , que colocaremos en un brazo , y esta será la resta que deba dexar el producto 55103275 , como en efecto se verifica ; pues , para averiguarlo diremos : de 5 á 5 va 0 , de 0 á 1 va 1 , de 1 á 0 no se puede , de 0 á 10 van 10 , de 10 á 3 no se puede , de 9 á 13 van 4 , de 4 á 2 no se puede , de 3 á 12 van 9 , de 9 á 7 no se puede , de 8 á 17 van 9 , de 9 á 5 no se puede , de 8 á 15 van 7 ; luego esta es la resta.

De todo lo expuesto podemos inferir , que aunque son muchos y muy ingeniosos los métodos , por medio de los quales puede uno cerciorarse de si una operacion está bien hecha , lo mejor es executarla una ó dos veces , y si fuere posible en diferente tiempo , ó por diferentes sugetos.

Por esta causa, en las oficinas donde es indispensable executar con presteza las operaciones, y en que un error podria traer fatales consequencias, se ponen dos oficiales igualmente diestros, y executa cada uno de por sí la cuenta que se presenta: lee uno el resultado, y si es el mismo, no habrá equivocacion. Sin embargo, en operaciones demasiado complicadas es insuficiente aun la conformidad de dos personas; y la experiencia ha probado que era necesaria la conformidad de quatro personas, para tener una confianza perfecta en los resultados de las operaciones mayores que se han necesitado executar.

100 Entendido esto, pasemos ya á manifestar algunos otros métodos particulares de abreviacion.

En quanto á la suma y resta, no se pueden dar métodos abreviados; porque son sencillas, y lo que se adquiere con el exercicio es una práctica por medio de la qual se executan de memoria estas operaciones, quando los números no son muy complicados.

En las otras hay abreviaciones que pueden ser muy importantes en muchas ocasiones; y respecto de la multiplicacion vamos á manifestar seis casos.

1.° Quando uno de los factores es el producto de otros simples que conozcamos, podemos multiplicar el otro por uno de ellos, y luego este producto por otro, y luego este por otro, &c.

Exemplo. Si tubiera que multiplicar 429 por 35, como sé (79) que $35=5\times7$, multiplicaria primero por 5, y luego el producto que me resultase por 7, en la forma que aqui se presenta:

Donde advierto que me he ahorrado el hacer una adicion.

$$\begin{array}{r} 429 \\ 5 \\ \hline 2145 \\ 7 \\ \hline 15015 \end{array}$$

2.° Si tubiese que multiplicar por un número qualquiera de nueves, añadiria al multiplicando tantos ceros como nueves habia, de esto restaria el multiplicando, y lo que me resultase seria el producto pedido.

Exemplo. Si tubiese que multiplicar 38647 por 9999, añadiria quatro ceros al multiplicando, y del producto quitaria el mismo multiplicando en esta forma:

$$\begin{array}{r} 386470000 \\ 38647 \\ \hline 386431353 \end{array}$$

La razon de esto es que siendo $9999=10000-1$, el producto deberá componerse de 10000 multiplicandos menos un multiplicando; y como el número que contiene diez mil multiplicandos se saca (62) con añadirle quatro ceros, si de este número quitamos una vez el mismo multiplicando, tendremos el producto verdadero.

Este procedimiento se podria generalizar diciendo: que *la multiplicacion se haria, añadiendo tantos ceros al multiplicando como guarismos tiene el multiplicador, y restando de esto el producto del mismo multiplicando por lo que falta al multiplicador para llegar á ser la unidad seguida de tantos ceros, como guarismos tenia el mismo multiplicador*; pero esto no seria útil, sino quando los guarismos de la izquierda

del multiplicador fuesen nueves, porque solo entonces, y no en otro caso, la resta tendria menos guarismos que el mismo multiplicador.

Así, si quisiera multiplicar 357853 por 99973, advertiria que al multiplicador le faltan 27 unidades para llegar á ser 100000; luego si al multiplicando le añado cinco ceros, tendré en él, 27 veces mas al multiplicando; luego del 35785300000 deberé restar el producto de 357853 por 27, lo que executaré en esta forma:

Coloco el multiplicando con los ceros, despues debaxo de él el mismo multiplicando, y luego el 27; executo la multiplicacion y hago la suma de los dos productos parciales y resta del total á un tiempo, diciendo: 1 es 1, de 1 á 10 van 9, y de 10 llevo 1; 1 y 7 son 8, y 6 son 14, de 14 á 20 van 6, y de 20 llevo 2; 2 y 9 son 11, de 11 á 20 van 9, y de 20 llevo 2; 2 y 4 son 6, y 7 son 13, de 13 á 20 van 7, y llevo 2; 2 y 5 son 7, de 7 á 10 van 3, y de 10 llevo 1; 1 y 5 son 6, y 1 son 7, de 7 á 13 van 6, y de 13 llevo 1; 1 y 2 son 3, y 7 son 10, de 10 á 15 van 5, y de 15 llevo 1; de 1 á 8 van 7; y pongo los demas guarismos que hay á la izquierda.

```
35785300000
     357853
         27
-----------
    2504971
    715706
-----------
35775637969
```

3.º Quando el multiplicador es 25, podemos executar la multiplicacion añadiendo dos ceros al multiplicando, y tomando la quarta parte de esto; porque con añadir dos ceros (62) le multiplico por 100; y como 100 es quatro veces mayor que 25, resulta que el producto tambien será quatro veces mayor que el verdadero, y por lo mismo le deberemos hacer este número de veces menor.

Por exemplo: si quisiera multiplicar 57834 por 25 (ó si quisiera reducir 57834 @ á libras), añadiria dos ceros y tendria 5783400; y tomando la quarta parte por el método expuesto (72), resultará 1445850.

Si le hubiera tenido que multiplicar por 125, le hubiera añadido tres ceros, y esto lo hubiera dividido por 8, y tendria 7229250.

4.º Quando dos guarismos seguidos del multiplicador equivalen al producto de alguno de los anteriores, se multiplica este por el otro factor y se excusa la repeticion, como se ve en este exemplo:

	547253052
	123287364
Producto por 4	2189012208
Producto del anterior por 9	19701109872
Producto del multiplicando por 7 . . .	3830771364
Producto del anterior por 4	15323085456
Producto del multiplicando por 3 .	1641759156
Producto del anterior por 4 . . .	6567036624
Producto total.	67469386222034928

Donde advierto despues de multiplicado por 4, que como 36 equivale á 9 veces 4, habré multiplicado por 36, si multiplico el anterior por 9; despues multiplico por 7, y su producto le corro dos lugares hácia la izquierda porque he multiplicado á un tiempo por los dos guarismos 36; luego, multiplico esto por 4, y así continúo como se ve en el exemplo.

5.º Tambien se pueden hacer semejantes abreviaciones, aun quando en el multiplicador se hallasen los múltiplos á la derecha de sus factores; pues en este caso no se necesitaria mas que empezar á multiplicar por los últimos, teniendo cuidado de ir colocando cada producto parcial los lugares que corresponda hácia la derecha, como se ve en este exemplo:

	7324576
	365424
Producto por 3	21973728
Producto del anterior por 2	43947456
Producto del anterior por 9	395527104
Producto del mismo por 4	175789824
Producto total	2676575860224

Donde advierto, que despues de haber multiplicado por 3, para hacerlo por el 6, multiplicaré este producto por 2, y le correré un lugar hácia la derecha. Luego, como $54=9\times6$, multiplico el producto de 6 por 9, corriéndole dos lugares hácia la derecha; y como el 24 último tambien es igual 4×6, multiplicaré por 4 el producto por 6 corriéndole dos lugares, y executando la suma tendré el producto total.

Como hay pocos casos en las multiplicaciones algo complicadas, en que no se puedan practicar algunas de estas abreviaciones, parece conveniente poner aun aqui los exemplos siguientes:

1.º Si quisiera multiplicar 532623 por 24618, como el 6 es submúltiplo del 18 y del 24, empiezo la multiplicacion por él; y luego multiplico este producto por 3 paraque quede multiplicado el multiplicando por 18, pero coloco este producto dos lugares mas á la derecha; y luego multiplico el mismo por 4 paraque lo quede el multiplicando por 24, corriéndole un lugar hácia la izquierda respecto del primitivo ó tres respecto del último, como aqui se presenta:

	532623
	24618
Producto por 6	3195738
Producto por 18	9587214
Producto por 24.	12782952
Producto total	13112113014

2.° Si tubiera que multiplicar 8471232583 por 1165548742, multiplicaria 1.° por 7, y despues este producto por 6, paraque quedase por 42, corriéndole dos lugares hácia la derecha, á fin de que el último guarismo cayga debaxo del último del multiplicador parcial; luego, pasaré á multiplicar por 6, y colocaré el producto de manera que su último guarismo cayga debaxo del 6 del multiplicador; y como el 48 equivale á ocho veces 6, multiplicaré este por 8, y colocaré el producto de manera que su último guarismo cayga debaxo del último del 48; luego, paso á multiplicar por 11, que ya lo sé executar abreviadamente (66); y coloco su producto debaxo del segundo 1; y como el 55 equivale á 5×11 multiplicaré esto por 5, y lo colocaré de manera que el último guarismo cayga debaxo del segundo 5, y luego sumaré como aqui se presenta;

	8471232583
	1165548742
Producto por 7	59298628081
Por 42	355791768486
Por 6	50827395498
Por 48	406619163984
Por 11	93183558413
Por 55	465917792065
Producto total.	9873634480305060586

6.° Finalizaremos este asunto con un método abreviado y general, por cuyo medio se obtiene el producto final sin escribir los productos parciales intermedios; y para abreviar considerablemente los discursos, en vez de decir, por exemplo, *el producto de las decenas del multiplicando por las unidades del multiplicador*, diremos: *las decenas por las unidades*, suprimiendo la palabra *el producto*, y que el órden de unidades enunciadas en primer lugar, se reputará pertenecer al multiplicando y el otro por consiguiente al multiplicador.

Para esto recordaremos que si se observan con atencion los productos parciales de algunas multiplicaciones, se ve que todos estan dispuestos de manera que los mismos órdenes de unidades se hallan en una misma columna vertical; y analizando su formacion, se verá ademas que las unidades por las unidades deben siempre dar unidades, pudiendo tambien dar decenas, pero nada mas; que para tener todas las decenas, es necesario añadir este exceso de decenas que provienen de las unidades por las unidades, 1.° á las decenas por las unidades; 2.° á las unidades por las decenas, lo que podrá dar centenas ademas; que para tener todas las centenas, es necesario añadir este exceso 1.° á las centenas por las unidades; 2.° á las unidades por las centenas; 3.° á las decenas por las decenas, lo que podrá ocasionar millares ademas; que para tener todos los

millares es necesario añadir este exceso, 1.° á los millares por las unidades; 2.° á las unidades por los millares; 3.° á las centenas por las decenas; 4.° á las decenas por las centenas; lo que podrá dar decenas de millar, &c.

Luego podremos establecer esta regla general para encontrar á un tiempo el producto de dos factores qualesquiera.

Multiplíquense las unidades por las unidades: escríbanse las unidades del producto y reténganse las decenas; multiplíquense despues las decenas por las unidades, luego las unidades por las decenas, y á su suma agréguense las decenas retenidas: escríbanse las decenas de esta suma total, y reténganse las centenas; multiplíquense las centenas por las unidades, las unidades por las centenas, y las decenas por las decenas, al total añádanse las centenas retenidas: escríbanse las centenas contenidas en este nuevo total, y reténganse los millares para añadirlos á la suma de los millares por las unidades, de las unidades por los millares, de las centenas por las decenas, de las decenas por las centenas, &c.

Con algunos exemplos aclararemos esta regla; más para abreviar omitiremos las palabras: unidades, decenas, centenas, &c.

Exemplo 1.° Si tubiera que multiplicar 54 por 37, executaria la operacion como aquí se presenta:

$$\begin{array}{r} 54 \\ 37 \\ \hline 1998 \end{array}$$

Diciendo: 4 por 7 son 28, pongo el 8 y llevo 2; 5 por 7 son 35, y 2 que llevaba son 37, 3 por 4 son 12, y 37 son 49, pongo 9 y guardo 4; 5 por 3 son 15, y 4 que llevaba son 19, que pongo; con lo que tengo executada la operacion.

Si los dos factores fuesen iguales, en vez de tomar sucesivamente las decenas por las unidades, y las unidades por las decenas, *se tomará el duplo de las decenas por las unidades*; pues que entonces siendo iguales los dos productos, su suma equivale al duplo de uno de ellos; así, si tubiéramos que multiplicar el número 57 por el mismo 57, executaria la operacion como aquí se presenta:

$$\begin{array}{r} 57 \\ 57 \\ \hline 3249 \end{array}$$

Diciendo: 7 por 7 son 49, pongo 9 y llevo 4; 5 por 7 son 35, el duplo de 35 es 70, y 4 que llevaba son 74, pongo el 4 y llevo 7; 5 por 5 son 25, y 7 son 32, que pongo, y tengo hecha la multiplicacion.

Exemplo 2.° Si tubiera que multiplicar 854 por 327, diria: 4 por 7 son 28, pongo el 8 y llevo 2; 5 por 7 son 35, y 2 que llevaba son 37, 2 por 4 son 8, y 37 son 45, pongo 5 y llevo 4; 8 por 7 son 56, y 4 son 60, 3 por 4 son 12, y 60 son 72, 5 por 2 son 10, y 72 son 82, pongo 2 y llevo 8; 8 por 2 son 16, y 8 que llevaba son 24, 3 por 5 son 15, y 24 son 39, pongo 9 y llevo 3; 8 por 3 son 24, y 3 que llevaba son 27, que pongo, y tengo hecha la operacion.

$$\begin{array}{r} 854 \\ 327 \\ \hline 279258 \end{array}$$

Si los dos factores fuesen iguales, aplicando el mismo razonamiento que antes, se verá que se deben duplicar las decenas por las unidades,

las centenas por las unidades, y las centenas por las decenas, &c.; por exemplo: si tubiese que multiplicar 325 por 325, haria la operacion como aqui se ve:

Diciendo: 5 por 5 son 25, pongo 5 y llevo 2; 2 por 5 son 10, el duplo de 10 es 20, y 2 que llevaba son 22, pongo 2 y llevo 2; 3 por 5 son 15, el duplo de 15 es 30, y 2 que llevaba son 32, 2 por 2 son 4, y 32 son 36, pongo 6 y llevo 3; 3 por 2 son 6, el duplo de 6 es 12, y 3 que llevaba son 15, pongo 5 y llevo 1; 3 por 3 son 9, y 1 que llevaba son 10, que pongo, y tengo concluida la operacion.

$$\begin{array}{r} 325 \\ 325 \\ \hline 105625 \end{array}$$

Puesto que ya se ve la marcha de este método, se le puede continuar tanto como se desee ó como se pueda; porque es necesario mucha costumbre en calcular, y mucha memoria para continuar mentalmente hasta el producto de doce guarismos por otros doce guarismos, principalmente si los números no son iguales entre sí.

En todos los exemplos que hemos resuelto, se han supuesto ambos factores con un mismo número de guarismos; si esto no sucediese, se podrian poner ceros á la izquierda del que tiene menos para igualarse, si se teme alguna equivocacion; pero tambien se puede executar sin esto, como en el siguiente exemplo, que resolveremos:

Diciendo: 2 por 3 son 6, que pongo; 3 por 3 son 9, 2 por 8 son 16, y 9 son 25, pongo 5 y llevo 2; 4 por 3 son 12, y 2 que llevaba son 14, 2 por 6 son 12, y 14 son 26, 3 por 8 son 24, y 26 son 50, pongo 0 y llevo 5; 5 por 3 son 15, y 5 que llevaba son 20, ahora deberia multiplicar el 2 del multiplicando por los millares del multiplicador; pero como no los hay, omito esta operacion, y paso á multiplicar las centenas del multiplicando por las decenas del multiplicador, diciendo: 4 por 8 son 32, y 20 que tenia son 52, 3 por 6 son 18, y 52 son 70, pongo 0 y llevo 7; 5 por 8 son 40, y 7 son 47, 4 por 6 son 24, y 47 son 71, pongo 1 y llevo 7; 5 por 6 son 30, y 7 son 37 que pongo, y tengo concluida la operacion.

$$\begin{array}{r} 5432 \\ 683 \\ \hline 3710056 \end{array}$$

101 Pasemos ahora á ver algunas abreviaciones particulares de la division. 1.º Ante todas cosas observaremos que, con el fin de disminuir el número de tentativas inútiles, hemos dado los medios de reducirlas solo á una, quando el segundo guarismo del divisor es 9, 8 ó 7, y creemos poder asegurar que sobre este punto nos hemos detenido lo suficiente, paraque los principiantes no se paren al executar esta operacion; pero ahora que tratamos de manifestar los casos particulares, no podemos menos de dar á conocer otra regla, que se podria seguir en este caso para hallar el quociente verdadero, ó al menos que solo dexe una tentativa.

Esta regla es la siguiente: *divídase el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor*; despues, *divídase por*

el primer guarismo del divisor mas la unidad; súmense estos quocientes y tómese la mitad, la qual expresará el quociente verdadero ó solo se podrá diferenciar de él en una unidad. V. g. si quisiera dividir 25785 por 356, estaria reducido á dividir 25 por 3, que da 8; dividiríamos tambien 25 por 4 que da 6; sumaríamos 8 con 6 que da 14, y tomando la mitad tendríamos que 7 es el quociente verdadero. Esta regla se funda en que estando el divisor 356, entre tres centenas y quatro centenas, el quociente debe tambien hallarse entre los que den las divisiones por estos números.

2.º Si los dos primeros guarismos del divisor fuesen 11 ó 12, entonces se dividirian los dos ó tres primeros guarismos de cada dividendo parcial, por estos dos guarismos como si se tratase de un número simple; y si por casualidad uno de los quocientes parciales se hallase tambien ser 11 ó 12, se les pondria en el quociente total, lo que abreviará la operacion. Por exemplo: si tubiera que dividir 1364797 por 1127, executaria la operacion como aqui se presenta:

13647,97	1127
123 97	———
000 00	1211

Primero diria: 11 en 13 ¿quántas veces? veo que son 1, y que despues quedan 2 de resta, que unidas al 6 dan 26, que contienen dos veces al 11, y por esta causa tomo un guarismo mas en el dividendo, esto es, cinco guarismos, y digo desde luego: 11 en 136 ¿quántas veces? veo que son 12, y los pongo en el quociente; ahora hago la multiplicacion del divisor (66) por el 12, y resto diciendo: 12 por 7 son 84, de 84 á 87 van 3 que pongo, y llevo 8; 12 por 2 son 24, y 8 son 32, de 32 á 34 van 2, y llevo 3; 12 por 11, desde luego, son 132, y 3 que llevaba son 135, de 135 á 136 va 1 que pongo, y de 136 llevo 13; de 13 á 13 no va nada. Si ahora dividiera 12 por 11, daria 1 por quociente, y quedaria 1 de resta, que unida con el 3 que sigue les toca aun á 1, y por lo mismo baxo desde luego los otros dos guarismos, y divido 123 por 11, que veo les cabe á 11, y por consiguiente pondré 11 en el quociente, y diré: 11 por 7 son 77, de 77 á 77 no va nada, pongo 0 y llevo 7; continúo: 2 por 11 son 22, y 7 que llevaba son 29, de 29 á 29 no va nada, pongo 0 y llevo 2; 11 por 11 son 121, y 2 que llevaba son 123, de 123 á 123 va 0; con lo que tengo concluida la operacion.

3.º Si el divisor se pudiese descomponer en dos factores, entonces seria mas corto dividir sucesivamente por estos factores. Así, si el divisor fuese por exemplo 54, que es el producto de 6 por 9, dividiríamos primero por 6, y luego dividiríamos por 9 el quociente que nos resultase, y este segundo quociente seria el verdadero. La razon de esto es que dividiendo solo por 6, dividimos por un número que es nueve veces menor que el verdadero: luego en virtud de lo expuesto (91), el quociente será este mismo número de veces mayor, y por lo mismo le deberemos hacer nueve veces menor, lo que se consigue dividiendo di-

cho quociente por 9; por exemplo: si tubiéramos que dividir 19818 por 54, dividiríamos primero por 6 diciendo: la sexta parte de 19 es 3, y sobra 1; la sexta parte de 18 es 3; la sexta parte de 1 es 0; la de 18 es 3, y por lo mismo tengo que el quociente es 3303; ahora divido esto por 9 diciendo: la novena parte de 33 es 3, y sobran 6; la novena parte de 60 son 6, y sobran 6; la novena parte de 63 es 7, y no queda nada; luego el quociente verdadero es 367.

Del mismo modo se haria si tubiese el divisor mas factores de un solo guarismo; pues en este caso se deberia volver á partir el quociente hallado por otro divisor, hasta que no hubiese mas divisores.

Por exemplo: si tubiéramos que dividir 1784538 por 378, que equivale á $7 \times 6 \times 9$, dividiria 1.º por 9, por exemplo, diciendo: la novena parte de 17 es 1, y sobran 8; la novena parte de 88 es 9, y sobran 7; la novena parte de 74 es 8, y sobran 2; la novena parte de 25 es 2, y sobran 7; la novena parte de 73 es 8, y sobra 1; la novena parte de 18 es 2, y tengo el primer quociente 198282, que dividiré por 7 diciendo: la séptima parte de 19 es 2, y sobran 5; la de 58 es 8, y sobran 2; la de 22 es 3, y sobra 1; la de 18 es 2, y sobran 4; la de 42 es 6, y no sobra nada; por lo que el segundo quociente es 28326, que divido por 6 diciendo: la sexta parte de 28 es 4, y sobran 4; la de 43 es 7, y sobra 1; la de 12 es 2, y la de 6 es 1; luego el tercer quociente es 4721, que es el verdadero.

Si al executar estas divisiones se encontrase una resta, no se haria caso de ella hasta haber encontrado el quociente final; en cuyo caso para encontrar la resta total, se haria lo siguiente: *se multiplicaria la última por el divisor precedente, y á este producto se añadiria la otra resta, y así sucesivamente.* Luego si tubiésemos el mismo divisor 378, y el dividendo fuese 1784680, dividiríamos primero por 9, lo que nos daria por quociente 198297, y la resta 7; dividiríamos este quociente por 7, obtendríamos 28328, y la resta 1; despues dividiria por 6, y tendria por último quociente 4721, y la resta 2. Para hallar ahora la resta total, multiplicaré esta resta 2 por el divisor penúltimo que es 7, y tendré 14: á esto añadiré la resta anterior que es 1, y tendré 15, que multiplicado por 9 da 135, que sumados con la primera resta 7 daria 142, y tendré que el verdadero quociente es $4721 \frac{142}{378}$ (*).

102 Por el contrario, quando un mismo número se tiene que dividir por otro, luego el quociente que resulta por otro, luego este por otro, y así sucesivamente; si estos divisores son compuestos es mas sencillo *el multiplicarlos todos entre sí, y dividir el número total por el producto.*

V. g. si tubiera que dividir 853271503, primero por 76, luego el quo-

(*) *La razon de esta práctica estriba en la teoría de los quebrados que expondremos en el capítulo siguiente; más no obstante pondremos aquí la demostracion. El primer quociente con la resta es* $198297\frac{7}{9}$;

ciente por 32, y luego el quociente por 17, seria mas sencillo el dividir desde luego por el producto 76.32.17=41344, el dividendo 853271503.

4.° Así como quando el multiplicador era 5,25,125, &c. se abreviaba la operacion de multiplicar, así tambien quando el divisor sea alguno de estos números, se abrevia, multiplicando por 2, por 4, por 8, &c. y separando con una media luna uno, dos ó tres, &c. de los últimos guarismos, que expresarán la resta que deba acompañar, dividida por 10, por 100, por 1000, &c. De manera que si me propusiese dividir 7823 por 5, le multiplicaria por 2 y tendria por producto 1564(6; que tomando el último guarismo por resta de division por 10, tendré el verdadero quociente en $1564\frac{6}{10}$; si hubiese de dividir por 25 el mismo número, le multiplicaria por 4, y tomaria del producto 312(92 todos los guarismos por quociente menos los dos últimos, que los tomaré por resta de division por 100, y el quociente será $312\frac{92}{100}$; si le quisiera dividir por 125, le multiplicaria por 8, y tomando por quociente todos los guarismos, menos los tres últimos que tomaré por resta de dividir por 1000, tendré que el verdadero quociente será $62\frac{584}{1000}$, &c.

Esta práctica se funda, en el primer caso, en que multiplicando el dividendo por 2, el quociente debe salir dos veces mayor, y paraque sea el verdadero se le debe partir por un número dos veces mayor tambien, esto es, por 10, que se executa (77) tomando por quociente todos los guarismos, excepto el último que es la resta. En el segundo caso, como multiplicamos por 4 el dividendo, se debe tambien multiplicar por 4 el divisor, el qual se convierte en 100, cuya division se executa como lo hemos practicado en virtud de lo expuesto (77). Lo mismo se demostrará en qualquier otro caso.

---

luego la resta de su division por 7 es no solo 1, sino $1+\frac{7}{9}$; *y por lo mismo el segundo quociente es* $28328+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}$; *la tercera resta no solo es* 2, *sino* $2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}$; *y por lo mismo el verdadero quociente de la division propuesta será* $4721+\dfrac{2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}}{6}$; *luego la resta total es* $\dfrac{2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}}{6}$; *que en virtud de lo que se expondrá* (127), *la iremos reduciendo de este modo:*

$$\frac{2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}}{6}=\frac{\dfrac{2\times7+1+\frac{7}{9}}{7}}{6}=\frac{15+\frac{7}{9}}{6\times7}=\frac{\dfrac{15\times9+7}{9}}{6\times7}=\frac{135+7}{6\times7\times9}=\frac{142}{378}=\frac{71}{189},$$

que es en efecto la que nos hubiera resultado, haciendo la division con toda extension.

De los quebrados ó fracciones; de su expresion, reduccion á un comun denominador y simplificacion.

103 Ya hemos dicho (25) que números quebrados son aquellos que resultan de comparar la unidad con la muchedumbre, ó una muchedumbre con otra muchedumbre mayor; y que son aquellos números que *constan solo de partes de la unidad.* Para formarse idea de un quebrado se necesita atender á dos cosas: al número de partes en que se considera dividida la unidad, que se llama *denominador*; y al que expresa las partes que se toman de estas, que se llama *numerador.* Por exemplo: para formar idea del número expresado por *dos tercios* ó *dos terceras partes* de unidad, se considerará que la unidad, v. g. una manzana, una pera, &c. está dividida en *tres* partes iguales, y que se toman *dos* de estas partes; de manera que el denominador será *tres*, y el numerador *dos.* Se da el nombre de numerador al que expresa las partes que se toman, porque él las numera ó cuenta; y el de denominador al que expresa las partes en que se considera dividida la unidad, porque él es el que da nombre al quebrado ó á las partes que expresa el numerador. El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del quebrado.

Todo quebrado se puede considerar como el quociente de una division del numerador por el denominador. En efecto, en el exemplo anterior, el número *dos tercios* de una unidad qualquiera, que supondremos aqui ser una manzana, vamos á probar que es lo mismo que el quociente que resultaria de dividir dos manzanas entre tres personas. Porque si dividimos cada manzana en tres partes iguales, podremos dar á cada persona una de estas partes por cada manzana que haya; y como suponemos iguales las manzanas, dos terceras partes de una equivaldrán á la tercera parte de la una, mas la tercera parte de la otra; luego para repartir las dos manzanas entre tres, en vez de dar á cada uno una tercera parte de cada manzana, podremos darle las dos terceras partes de una; luego es lo mismo las dos terceras partes de una manzana, que el quociente de dividir dos manzanas entre tres personas; y como lo que hemos manifestado con relacion á la manzana, para mayor claridad, lo podemos demostrar con relacion á qualquiera otra unidad, ó con relacion á la unidad abstracta, queda demostrada la proposicion.

Por esta causa se escribe un quebrado del mismo modo que una division indicada, poniendo el numerador, debaxo una raya, y luego el denominador; de manera que *dos tercios* de una unidad qualquiera se escribe $\frac{2}{3}$; donde el numerador 2 hace oficios de dividendo, y el denominador 3 de divisor.

Ahora, quando un quebrado está escrito se lee del modo que se ha dicho (70) se deben leer las restas de la division, es decir, que se lee el numerador con los nombres numerales absolutos, el denominador con los numerales partitivos sino llega á 10, y con los numerales absolutos si

llega ó pasa de 10; pero añadiendo despues la partícula *avos*. Por exemplo: $\frac{7}{9}$ se lee *siete novenos*, $\frac{15}{58}$ se lee *quince cincuenta y ochoavos*.

De la idea que nos formamos del quebrado, resulta que una unidad qualquiera equivale á tantas partes de aquellas de que se trata, como unidades tiene su denominador; porque si consideramos una unidad dividida en tres partes, el conjunto de dichas tres partes equivaldrá á la unidad; por esta causa se tiene que $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}$, &c. Quando se executa esta operacion, se dice que *se ha puesto la unidad en forma de quebrado*. Pues que un quebrado es lo mismo que el quociente de una division, resultará que todo lo demostrado (91, 92 y 93) tendrá lugar aqui; y por lo mismo *á un quebrado le sucederá lo que le suceda á su numerador, y lo contrario de lo que le suceda á su denominador*; *y su valor no se alterará, aun quando se multipliquen ó partan sus dos términos por un mismo número*. Sin embargo, como alli lo hemos manifestado en divisiones que se podian executar, y los quebrados son divisiones indicadas, lo demostraremos aqui, independientemente de lo que alli expusimos.

104 Teor. 1.° *Si una unidad se divide en un número qualquiera de partes iguales, y la misma unidad se divide en otro número qualquiera de partes iguales, resultará que el valor de cada parte será mayor en aquella que resulte de dividir en un número menor de partes; y si uno de estos números es múltiplo del otro, la parte que resulte de dividir en el mayor número, será el mismo submúltiplo de la otra.*

Expl. Si una unidad se divide, por exemplo, en tres partes iguales, y tambien en cinco partes iguales, voy á demostrar que cada parte que resulte de la primera division, será mayor que la de la segunda en general; y que si el número segundo fuese 6, que es duplo del primero 3, el valor de la primera será el duplo del de la segunda.

Dem. Concíbase dividida la unidad en el número mayor de partes, que en nuestro caso es cinco, y tendremos en primer lugar que la unidad equivaldrá á todo el conjunto de estas partes ó á cinco partes. Ahora, si consideramos todas estas partes distribuidas en tantos montones como unidades tenia el número menor, esto es, en tres, tendremos que en cada monton habrá lo menos una de estas partes; por exemplo, aqui habrá una en cada monton, y todavía habrá que poner algo por razon de las otras dos partes que sobran; luego si suponemos que las otras partes que quedan, estan repartidas convenientemente entre los tres montones, resultará que cada monton será una parte de la unidad, expresada por el número menor; y que en cada monton habrá lo menos una parte de aquellas que resultaban del número mayor y algo mas; luego cada monton será mayor que la parte que resulta del número mayor; pero cada monton es una parte de la unidad expresada por el número menor; luego la parte que resulta de dividir en menor número, es mayor que la que resulta de dividir en mayor número.

Si el número mayor fuese múltiplo del menor, por exemplo, si aqui

fuese 6 en vez de ser 5, tendríamos que al distribuir en tres montones todas las partes que resultan de dividir en 6, resultarán en cada monton tantas partes de á 6 como veces el 3 esté contenido en el 6; luego resultarán aqui dos partes, y por lo mismo equivaliendo cada monton á dos partes, será dos veces mayor que una de ellas; y como cada monton es una tercera parte de la unidad, resultará que la tercera parte es dupla de la sexta. L. Q. D. D.

105 Teor. 2.º *Si permaneciendo uno mismo el denominador, aumenta ó disminuye su numerador, aumentará ó disminuirá del mismo modo el quebrado; y si aumenta por via de multiplicacion, ó disminuye por via de division, lo hará del mismo modo el quebrado.*

Dem. Por no alterarse el denominador, no se altera el valor de cada parte; luego quando se tomen mas partes, que es quando crece el numerador, se tendrá un quebrado mayor; y quando se tomen menos, que es quando disminuye el numerador, se tendrá un quebrado menor. Esto es lo mismo que decir: que *de quebrados que tienen un mismo denominador, aquel es mayor que tiene mayor numerador.*

Ahora, si el número de partes que se tomó fue el duplo, el triplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, será el duplo, el triplo, &c.; y si fue el subduplo, el subtriplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, lo será igualmente; luego *con multiplicar ó dividir el numerador por un número qualquiera, hemos multiplicado ó dividido el quebrado por el mismo número, ó le hemos hecho el mismo número de veces mayor ó menor que se hizo á su numerador.* L. Q. D. D.

106 Teor. 3.º *Si permaneciendo uno mismo el numerador del quebrado, aumenta á disminuye el denominador, disminuirá ó aumentará el quebrado; y si el denominador aumenta por via de multiplicacion, el quebrado disminuirá por via de division; y si el denominador disminuye por via de division, el quebrado aumentará por via de multiplicacion.*

Dem. Como el numerador permanece el mismo, se toma siempre un mismo número de partes; luego el valor del quebrado será mayor ó menor, segun lo sean las partes que exprese; pero mientras mayor sea el número de partes en que se divida una unidad qualquiera, será (104) menor el valor de cada una; luego mientras mayor sea el denominador, será menor el valor de cada parte, y por consiguiente el valor de un número qualquiera de ellas. Ahora, si el denominador aumentase por via de multiplicacion, esto es, que se hiciese dos ó tres, &c. veces mayor, el valor de cada parte se haria (104) dos ó tres, &c. veces menor; luego un número qualquiera de ellas será tambien dos ó tres, &c. veces menor que lo que era antes. Si el denominador disminuye por via de division, entonces el valor de cada parte aumentaria por via de multiplicacion, y lo mismo sucederia á un número qualquiera de ellas. L. Q. D. D.

Cor. De aqui se sigue que si el denominador se divide por sí mismo, quedará multiplicado el quebrado por el denominador; pues como de la

division resultaria la unidad por denominador del nuevo quebrado, y todo número partido por la unidad es igual á sí mismo, resulta que *para multiplicar un quebrado por su denominador no hay mas que suprimir este.* Por exemplo $\frac{3}{7}\times7=3$.

107 Teor. 4.° *Un quebrado no se altera, aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.*

Dem. Este teorema tiene dos partes: quando se multiplican ambos términos, y quando se dividen; si se multiplican por un mismo número los dos términos, tenemos que con multiplicar el numerador se hace al quebrado tantas veces mayor (105), como unidades tiene el número por qué se multiplica; pero como con multiplicar el denominador por el mismo número, se le hace este mismo número de veces menor (106), resulta que se queda conforme estaba; luego no hemos alterado su valor.

Si se dividen por un mismo número, tenemos que con dividir el numerador hacemos al quebrado tantas veces menor, como unidades tiene el número por qué se divide; y como con dividir tambien su denominador por el mismo número, se le hace el mismo número de veces mayor, resulta conforme estaba; luego su valor no se habrá alterado, que era L. Q. D. D.

108 En la primera parte del teorema anterior está fundada la *reduccion de los quebrados á un comun denominador*, y en la segunda *su simplificacion.*

Quando dos ó mas quebrados tienen un mismo denominador se dice que tienen aquel denominador *comun*; para muchas investigaciones, como son el averiguar qual de dos ó mas quebrados es mayor, &c. ó para hacer las operaciones con ellos, se necesita que tengan un comun denominador, y la operacion que se executa para conseguirlo, se llama *reduccion de quebrados á un comun denominador.*

Para esto *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas*; en este caso no se altera el valor de ningun quebrado, porque sus dos términos se multiplican por un mismo número; y sale el mismo denominador en todos, porque todos resultan de la multiplicacion de los denominadores de todos los quebrados dados; por exemplo: si quiero reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ los pondré así:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5}$$
$$\frac{10}{15} \quad \frac{12}{15}$$

Multiplicaré los dos términos del $\frac{2}{3}$ por 5. que es el denominador del otro quebrado, diciendo: 2 por 5 son 10 que pongo por numerador del nuevo quebrado, debaxo de su correspondiente $\frac{2}{3}$; tiraré la raya y diré: 3 por 5 son 15, que pondré debaxo de la raya: paso al segundo quebrado $\frac{4}{5}$ y digo: 4 por 3 son 12, que pongo debaxo del $\frac{4}{5}$; tiro la raya y despues pongo debaxo 15. producto de 3 por 5; con lo que tengo los quebrados $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, que son iguales cada uno con su correspondiente, y que tienen un mismo denominador.

Si los quebrados fuesen $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, multiplicaria los dos términos del

primero $\frac{3}{4}$, por 15 producto de 3 por 5, que son los denominadores de los demas, y tendria que el primer quebrado se convertiria en $\frac{45}{60}$; pasaria al segundo que es $\frac{2}{3}$, cuyos términos los multiplicaria por 20, producto de 4 y 5 denominadores de los demas, y se convertiria en $\frac{40}{60}$; y luego los dos términos del tercero, que es $\frac{4}{5}$, los multiplicaria por 12, producto de 3 por 4, que son los denominadores de los demas, lo que da $\frac{48}{60}$; con lo que tengo los tres quebrados $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, que son iguales con los primitivos, y que tienen un mismo denominador, que era lo que se pedia.

Esta reduccion se puede abreviar algo; porque en punto á los denominadores no se necesita mas que multiplicarlos una vez entre sí; y así, la regla general para no tener que hacer mas ni menos de lo que se necesite, la daremos en estos términos: *multiplíquese cada numerador por el producto de los denominadores de los demas, y se tendrán de este modo los numeradores de los quebrados que han de quedar reducidos á un mismo denominador; y para encontrar el denominador, se multiplicarán entre sí los denominadores.*

Así, en el exemplo antecedente, para reducir los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, á un comun denominador, no haré mas que multiplicar el numerador 3 del primero por 15, producto de 3 por 5, y tendré 45; para hallar el numerador del segundo, multiplicaré su numerador 2 por 20, producto de 5 por 4, y tendré 40; para el tercero, multiplicaré su numerador actual 4 por 12, producto de 4 y 3 que son los denominadores de los demas, y tendré 48; para hallar el denominador comun, multiplicaré todos los denominadores entre sí, diciendo: 4 por 3 son 12, 12 por 5 son 60, y poniendo 60 por denominador á los numeradores 45, 40, 48, tendré los quebrados $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$ y $\frac{48}{60}$, que son iguales con los primitivos y tienen un mismo denominador.

Otro exemplo: si se aplicase esta regla á los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{3}$, despues de reducidos á un comun denominador serian: $\frac{72}{120}$, $\frac{60}{120}$, $\frac{90}{120}$ y $\frac{40}{120}$.

Aun en operaciones muy complicadas se podria abreviar algo mas, pues despues de sacado el primer quebrado por la regla general, para hallar por qué número se debe multiplicar cada numerador, se puede hacer dividiendo el denominador del primero por el denominador del quebrado de que se trata, lo que será mas fácil que multiplicar entre sí los demas denominadores.

Quando los denominadores de los quebrados son los unos factores de los otros, se consigue dicha reduccion con mas sencillez. Por exemplo: si tubiera que reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{12}$, advertiria que como los denominadores de los tres primeros son factores del 12, denominador del quarto, quedaria executada la operacion con multiplicar los dos términos del primero por 4, que es el factor por qué se debe multiplicar el denominador 3 para convertirle en 12, lo que le reduciria á $\frac{8}{12}$; multiplicando los dos términos del segundo por 3, y los del tercero por 2, por la misma razon, tendremos hecha nuestra operacion, y los quebrados serán: $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{2}{12}$ y $\frac{5}{12}$.

Aunque no sean los denominadores unos factores de otros, se puede hacer esta abreviacion siempre que tengan factores comunes; por exemplo: si quisiera reducir los $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{8}$, multiplicando los dos términos del primero por 4, y los dos del segundo por 3, tendríamos $\frac{20}{24}$ y $\frac{9}{24}$, que tienen un mismo denominador.

Esc. La regla general para reducir los quebrados á un comun denominador, quando los denominadores tienen factores comunes (ó son los unos factores de los otros) es la siguiente: *Hállense los factores simples de los denominadores dados, y el denominador comun que se busca, se compondrá del producto de todos los factores simples diferentes que se hayan encontrado, estando cada uno repetido tantas veces como en el que mas se encuentre de los denominadores dados; y para hallar los numeradores respectivos se multiplicará el de cada quebrado dado por los factores que le falten á su denominador para convertirse en el denominador comun.*

Sean los quebrados $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{18}$ y $\frac{13}{24}$: los factores simples de los denominadores son los que aquí se ven:

Donde advierto que los factores simples diferentes que hay son 2 y 3; que el 2 el mayor número de veces que está repetido es tres veces, y el 3 dos, por consiguiente el denominador comun será $2\times2\times2\times3\times3=72$; y para hallar los numeradores, se multiplicará el de cada quebrado por los factores que falten á su denominador para convertirse en el comun, esto es, el numerador 5 del 1.º por $3\times3=9$, el 7 del 2.º por $2\times3=6$, el 11 del 3.º por $2\times2=4$, y el 13 del último por 3, y los quebrados dados se convertirán en los siguientes $\frac{45}{72}$, $\frac{42}{72}$, $\frac{44}{72}$ y $\frac{39}{72}$.

8	2	12	2	18	2	24	2
4	2	6	2	9	3	12	2
2	2	3	3	3	3	6	2
1		1		1		3	3
						1	

109 Esta operacion reduce los quebrados á otros que son de igual valor; pero cuyos términos son mayores, y por consiguiente los quebrados son mas complicados. Por esta causa esta operacion solo se executa como auxîliar de otras; pero la operacion que se necesita hacer en todos los resultados donde haya quebrados, es *simplificarlos*. Se dice que se simplifica un quebrado, ó que se reduce á su mas simple expresion, *quando se presenta otro quebrado de igual valor, y cuyos términos sean menores.*

Para conseguir esto, se dividen sus dos términos por 2 todas las veces que se pueda: luego, por 3, y por los demas números primos; y se conocerá si un quebrado se puede simplificar, dividiendo por alguno de estos números, si se ve que ambos términos tienen las circunstancias que hemos expuesto (79). Así, si me propusiera simplificar el quebrado $\frac{96}{180}$, como lo primero que advierto es que sus dos términos se pueden dividir por 2, porque el numerador acaba en 6 que es guarismo par, y el denominador en 0: dividiendo el numerador 96 por 2 sale 48, y dividiendo el denominador por el mismo 2 sale 90, de modo que tengo el

quebrado $\frac{48}{90}$ del mismo valor que el primero, pero mas sencillo. Este todavía se puede simplificar mas; porque como el numerador acaba en 8 que es guarismo par, y el denominador en 0, se pueden dividir ambos por 2, y executándolo tengo el quebrado $\frac{24}{45}$, que es mas sencillo; ahora advierto que el numerador se puede dividir por 2 porque acaba en 4, que es guarismo par; más como el denominador no es divisible por 2, porque no acaba en guarismo par ni en 0, no le puedo simplificar mas dividiéndole por 2; y veré si lo puedo hacer dividiendo sus dos términos por 3. Para esto, sumo los guarismos del numerador, y veo que 2 y 4 son 6, y como 6 se puede dividir por 3, infiero que tambien será divisible exactamente por 3 el 24; sumo los guarismos 4 y 5 del denominador, y como la suma 9 se puede dividir exâctamente por 3, infiero que el denominador tambien es divisible por 3; y executando la division de ambos términos del quebrado por 3, queda en $\frac{8}{15}$; ahora veo que el numerador no es divisible por 3 ni por 5 aunque lo es el denominador, y así no puedo simplificar mas el quebrado $\frac{96}{180}$, que queda reducido á $\frac{8}{15}$.

Otro exemplo: si tubiera el quebrado $\frac{45}{90}$, veria que por las reglas antecedentes no se podian dividir por 2 sus dos términos, y que sí se pueden dividir por 3, y executándolo se convierte el quebrado $\frac{45}{90}$ en $\frac{15}{30}$; cuyos términos todavía se pueden dividir por 3; y executada la division se reduce á $\frac{5}{10}$; los dos términos de este por acabar el numerador en 5 y el denominador en 0, son divisibles por 5; y executada la division queda reducido el quebrado $\frac{45}{90}$ á $\frac{1}{2}$.

La regla mas directa para simplificar un quebrado, es el averiguar el máxîmo comun divisor de sus dos términos, y dividirlos por él. De este modo estará uno seguro de que en efecto se ha reducido á su mas simple expresion; pues sino, algunas veces daríamos por quebrados que no se pueden simplificar, y que por lo mismo se llaman *irreducibles*, algunos que sí; por exemplo: este $\frac{851}{5681}$ no se puede simplificar dividiendo por ninguno de estos números, y caeríamos en un absurdo si dixésemos que por esto se hallaba reducido á su mas simple expresion; y así proponiéndonos hallar su máxîmo comun divisor (80), encontramos como aqui se ve que es 23; y que despues de dividido el numerador 851 por 23 se convierte en 37, como se halla debaxo de 851 en la operacion, y el denominador 5681 se convierte en 247; de manera que el quebrado reducido á su mas simple expresion es $\frac{37}{247}$. No obstante quando no hay miras particulares con un quebrado, no se practica esta reduccion por el máxîmo comun divisor, y solo se executa simplificando por el otro método hasta que buenamente se pueda.

5681	851	575	276	23
0575	) 276	) 023	) 046	)
247	37	25	12	1

Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.

110 Con los quebrados se hacen las mismas operaciones que con los números enteros, y por eso vamos á manifestar ahora como se suman, restan, multiplican y parten.

Para sumar quebrados *se reducen primero á un mismo denominador sino le tienen; despues se suman los numeradores; á esta suma se le pone por denominador el denominador comun; y si este quebrado tiene el numerador igual ó mayor que el denominador, en cuyo caso se llama quebrado impropio, se divide dicho numerador por el denominador para sacar los enteros que contenga.*

1.er exemplo. Si quiero sumar $\frac{3}{4}$ con $\frac{5}{6}$, primero los reduciré á un comun denominador por el método dicho (108), y los tendré convertidos en $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$; despues sumaré los numeradores 18 y 20, y á la suma 38 le pondré por denominador el 24, que es el denominador comun, y tengo la suma en el quebrado $\frac{38}{24}$; pero como el numerador es mayor que el denominador, este quebrado es impropio; y así para sacar los enteros que contiene, divido el numerador 38 por el denominador 24, y saco el quociente 1 $\frac{14}{24}$ que es un número mixto, porque se compone de entero y quebrado. Siempre que en un resultado quede un quebrado, debe simplificarse lo mas que se pueda; y así, como veo que el $\frac{14}{24}$ se puede simplificar dividiendo sus dos términos por 2, lo executaré y tendré $\frac{7}{12}$, por lo que diré que la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ es 1 $\frac{7}{12}$.

2.º exemplo. Si quiero sumar los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ los reduciré á un comun denominador, y tendré $\frac{72}{120}$, $\frac{60}{120}$, $\frac{80}{120}$, $\frac{30}{120}$; sumando los numeradores, y poniendo á la suma el denominador comun, tendré $\frac{242}{120}$, ó despues de sacados los enteros 2 $\frac{2}{120}$; y despues de simplificado el quebrado $\frac{2}{120}$, tendré por último 2 $\frac{1}{60}$.

La demostracion de esta regla es la siguiente: se reducen los quebrados á un comun denominador, porque para sumarlos deben ser homogéneos, y los quebrados no son homogéneos sino tienen un mismo denominador; porque una peseta ordinaria que equivale á un quinto de peso duro, no es homogénea con una peseta columnaria que equivale á un quarto de peso duro; despues se suman los numeradores, porque en ellos está (103) el valor de los quebrados; y á esta suma se le pone por denominador el comun, para saber el nombre de aquellas partes. La simplificacion que despues se hace, es porque en todas las operaciones se deben presentar los resultados con la mayor sencillez.

111 En la suma en que entran quebrados pueden ocurrir tres casos: *sumar quebrados con quebrados*, que es lo que acabamos de executar; *sumar un entero con un quebrado ó un quebrado con un entero*; y *sumar enteros y quebrados con enteros y quebrados*, ó *números mixtos con números mixtos.*

ara sumar un entero con un quebrado ó un quebrado con un entero,

se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á esto se añade el numerador, y á todo se le pone por denomidador el denominador del quebrado.

La qüestion que conduce á sumar un entero con un quebrado se presenta quando se quiere reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña; esto es, quando se tiene un número mixto tal como $3\frac{2}{5}$, y se quiere saber quantos quintos compone el entero junto con el quebrado. Así, para reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á esto se añade el numerador, y á la suma se le pone por denominador el denominador del quebrado*; de manera que para reducir el entero á la especie del quebrado que le acompaña en $3\frac{2}{5}$, multiplicaré el 3 por el 5, al producto 15 le añadiré el numerador 2 del quebrado, y á la suma 17 le pondré por denominador el denominador 5 del quebrado, y tendré en $\frac{17}{5}$ executada la operacion que se me pedia.

Practicando esta operacion con el número $15\frac{5}{8}$, sacaré $\frac{125}{8}$.

112 Para sumar números mixtos con números mixtos, *se suman los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros, cuidando de sumar con estos los que resulten de la suma de los quebrados.*

1.er exemplo. Si quiero sumar $23\frac{2}{5}$ con $12\frac{4}{5}$ y con $25\frac{3}{5}$, los pondré los unos debaxo de los otros, de modo que se correspondan los enteros debaxo de los enteros, y los quebrados debaxo de los quebrados, en esta forma:

$$\begin{array}{r} (1 \\ 23\frac{2}{5} \\ 12\frac{4}{5} \\ 25\frac{3}{5} \\ \hline 61\frac{9}{5} \\ \frac{4}{5} \end{array}$$

Como aquí los quebrados tienen un mismo denominador, para sumarlos no se necesita mas que sumar los numeradores, y poner á esta suma el denominador comun; con lo qual saco de la suma de los quebrados $\frac{9}{5}$; pero en $\frac{9}{5}$ hay un entero y $\frac{4}{5}$, borro el $\frac{9}{5}$ y pongo debaxo el $\frac{4}{5}$; el entero 1 paraque no se me olvide, le coloco sobre los enteros separándole con una media luna, paraque se conozca que ha provenido de la suma de los quebrados; sumo despues los enteros y saco 61, por lo que la suma pedida es $61\frac{4}{5}$.

2.º exemplo. Si quisiera sumar los números $27\frac{3}{5}$, $6\frac{2}{3}$ y $128\frac{1}{4}$, primero tendria que reducir los quebrados á un comun denominador, porque no le tienen, y sacaria por último resultado $162\frac{31}{60}$.

113 Para restar quebrados *se reducen á un comun denominador sino le tienen; despues se restan los numeradores: y á la resta se le pone por denominador el denominador comun, y se simplifica luego si se puede.*

1.er exemplo. Quiero restar $\frac{2}{7}$ de $\frac{4}{5}$: para esto los reduciré á un comun denominador (108), y se me convertirán en $\frac{10}{35}$ y $\frac{28}{35}$, y restando el 10 numerador del quebrado $\frac{10}{35}$ correspondiente al subtraendo $\frac{2}{7}$, del 28 numerador del $\frac{28}{35}$ correspondiente al minuendo $\frac{4}{5}$, y poniendo á la diferencia 18 el denominador comun 35, tendré la resta $\frac{18}{35}$ que no se puede simplificar.

2.º exemplo. Si quisiera restar $\frac{5}{9}$ de $\frac{12}{15}$, sacaria por resta, despues de simplificada, $\frac{11}{45}$.

Hemos dicho que se han de reducir á un comun denominador, porque en la resta los datos deben ser homogéneos; despues se han de restar los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y finalmente se le ha de poner á la resta por denominador el denominador comun, porque es el que da el nombre al quebrado.

114 Quando en la operacion de restar entran quebrados, pueden ocurrir tres casos: *restar un quebrado de otro*, que acabamos de manifestar como se executa; *restar un quebrado de un entero*, y *restar un número mixto de otro número mixto.*

Para restar un quebrado de un entero, *se le quita al entero una unidad; al lado de este entero, despues de rebaxada la unidad, se pone un quebrado, cuyo numerador es igual á la diferencia que hay entre el denominador y el numerador del quebrado dado, y el denominador es el mismo que el del quebrado que se da*, con lo que está hecha la resta.

1.er exemplo. Si quiero restar de 8 el quebrado $\frac{3}{5}$, quitando una unidad al 8 se convertirá en 7; al lado de este 7 pongo un quebrado, cuyo numerador es 2 diferencia que hay entre 3 y 5, numerador y denominador del quebrado propuesto, y cuyo denominador es 5, el mismo que el del quebrado dado, y así la resta será $7\frac{2}{5}$.

2.º exemp. Si quisiera restar de 23 el quebrado $\frac{15}{38}$, la resta seria $22\frac{23}{38}$.

Esta regla está fundada en que para restar un quebrado de un entero, solo tendré necesidad de tomar una unidad del entero: esta la pondremos en forma de quebrado (103), cuyo denominador sea el mismo que el del quebrado propuesto; luego la operacion está reducida á restar de la unidad, puesta baxo esta forma, el quebrado dado; y como el numerador de la unidad puesta en forma de quebrado es igual al denominador, para efectuar la resta se debe restar del numerador del primero que es igual con el denominador del primitivo, el numerador de este, y á esta resta le deberemos poner el mismo denominador. Así, en el primer exemplo para restar de 8 el quebrado $\frac{3}{5}$, tomo del 8 una unidad y la pongo en forma de quebrado, cuyo denominador sea 5, y tendré que el minuendo será $7+\frac{5}{5}$, de lo qual quitando $\frac{3}{5}$, quedan $7+\frac{2}{5}$.

Esta regla la suelen dar los autores diciendo: que *se multiplique el entero por el denominador del quebrado, de esto se quite el numerador, y á lo que resulte se le ponga por denominador el denominador del quebrado*; pero como en este caso se deberán aun sacar los enteros que contenga este resultado, es mucho mas sencilla la regla que hemos dado.

115 Para restar un número mixto de otro número mixto, *se resta el quebrado del quebrado, y el entero del entero*: pero puede suceder que despues de reducidos á un mismo denominador, sino le tienen, el quebrado del subtraendo sea mayor que el del minuendo, y para poder restar se necesita tomar una unidad del minuendo, la qual se reduce á la

especie del quebrado que le acompaña, lo que se consigue sumando el numerador del quebrado con el denominador, y poniendo á esto por denominador el comun; de este quebrado que será impropio se resta el del subtraendo, y luego al executar la resta con los enteros, se debe advertir que al minuendo se le ha quitado una unidad.

1.er exemplo. Si quisiera restar $8\frac{3}{7}$ de $14\frac{5}{7}$, los colocaria de este modo:

$$\begin{array}{r} 14\frac{5}{7} \\ 8\frac{3}{7} \\ \hline 6\frac{2}{7} \end{array}$$

Y diria, porque los quebrados tienen un mismo denominador: de $\frac{3}{7}$ á $\frac{5}{7}$ van $\frac{2}{7}$; de 8 enteros á 14 enteros van 6 enteros, y la resta es $6\frac{2}{7}$.

2.º exemplo. Si quisiera restar $23\frac{2}{3}$ de $34\frac{1}{2}$, primero tendria que reducir los quebrados á un comun denominador, y se convertirian en $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{6}$; pero como el $\frac{4}{6}$ del subtraendo es mayor que el quebrado $\frac{3}{6}$ del minuendo, despues de colocados como aqui se ve:

$$\begin{array}{l} 34\frac{1}{2} \cdot\cdot \frac{3}{6} \\ 23\frac{2}{3} \cdot\cdot \frac{4}{6} \\ \hline 10 + \frac{5}{6} \end{array}$$

Advierto que debo tomar una unidad del minuendo 34, y para reducirla á sextos digo: 6 y 3 son 9, de $\frac{9}{6}$ quitando $\frac{4}{6}$ quedan $\frac{5}{6}$, y restando despues los enteros, quedará executada la operacion, y la resta será $10\frac{5}{6}$.

3.er exemp. Si restara $27\frac{7}{8}$ de $49\frac{3}{5}$, la resta seria $21\frac{29}{40}$.

116 Para multiplicar un quebrado por otro *se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

1.er exem. Si quisiera multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, diria: 2 por 4 son 8, 3 por 5 son 15; poniendo por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el de los denominadores, tendré en $\frac{8}{15}$ el producto pedido.

2.º exem. Si quiero multiplicar $\frac{7}{9}$ por $\frac{12}{47}$, el producto será $\frac{84}{423}=\frac{28}{141}$.

Esta regla está fundada, contrayéndonos al primer exemplo, en que si tubiera que multiplicar el $\frac{2}{3}$ por el numerador 4 del quebrado $\frac{4}{5}$, que es el multiplicador, estaba reducida la operacion á hacer quatro veces mayor al quebrado; lo que se consigue (105) multiplicando su numerador por 4; luego en este caso el producto seria $\frac{8}{3}$; pero como no teníamos que multiplicar por 4, sino por $\frac{4}{5}$, que es cinco veces menor que 4, resulta que este producto que hemos sacado es cinco veces mayor que el verdadero, y por tanto, para encontrar este le deberemos hacer cinco veces menor; y como esto se consigue (106) multiplicando su denominador por 5, resulta, executándolo, que $\frac{8}{15}$ es el producto verdadero, y que tenemos demostrada la regla.

Aqui observaremos que *si el multiplicador fuese un quebrado propio, el producto será menor que el multiplicando*; porque su numerador se deberá multiplicar por un número menor que aquel por qué se debe multiplicar su denominador. *Si el multiplicador fuese la unidad en forma de quebrado, el producto seria igual con el multiplicando* (61): y *si fuese un quebrado impropio, el producto será mayor que el multiplicando*; porque su numerador se multiplicará por un número mayor que aquel por qué se multiplique su denominador.

Quando entran quebrados en una multiplicacion, pueden ocurrir

cinco casos: *multiplicar un quebrado por otro*, que es lo que acabamos de explicar; *multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero*; *multiplicar un quebrado por un número mixto*; *multiplicar un entero por un número mixto*; y finalmente *multiplicar un número mixto por otro número mixto.*

117 Para multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, *se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado.*

1.er exemplo. Si quiero multiplicar 5 por $\frac{3}{7}$, multiplicaré el 5 por 3, y al producto 15 le pondré por denominador el denominador 7 del quebrado, y tendré que el producto será $\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$.

2.º exemp. Si quisiera multiplicar $\frac{5}{11}$ por 7, tendria el producto $\frac{35}{11}$, que sacando los enteros se convierte en $3\frac{2}{11}$.

Esta regla está fundada en que á todo entero se le puede poner la unidad por denominador, lo que de ninguna manera le altera; porque todo número dividido por la unidad (72) es el mismo número, con lo qual está reducida la operacion á multiplicar un quebrado por otro; y como de la multiplicacion del 1, denominador del entero, por el denominador del quebrado, resulta el denominador de este, tenemos demostrada la regla. Así, en el primer exemplo, al 5 se le puede dar esta forma $\frac{5}{1}$; y para multiplicarle por $\frac{3}{7}$, diremos: 5 por 3 son 15, que es el numerador del producto: 1 por 7 es 7, que es su denominador, igual con el del quebrado primitivo.

118 Para multiplicar un quebrado por un número mixto, *se reduce en el número mixto el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y despues se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.* V. g. si tubiera que multiplicar $\frac{3}{8}$ por $4\frac{3}{5}$, reduciria el $4\frac{3}{5}$ á $\frac{23}{5}$ (§ 111), y despues le multiplicaria por $\frac{3}{8}$ diciendo: 3 por 23 son 69, que será el numerador del producto; 5 por 8 son 40, que será el denominador; con lo que tendré el producto expresado por $\frac{69}{40}=1\frac{29}{40}$.

Otro exemplo. Si quisiera multiplicar $\frac{4}{13}$ por $7\frac{5}{9}$, iria executando las operaciones dichas como aqui se indica:

$$\frac{4}{13}\times 7\frac{5}{9}=\frac{4}{13}\times\frac{63+5}{9}=\frac{4}{13}\times\frac{68}{9}=\frac{4\times 68}{13\times 9}=\frac{272}{117}=2\frac{38}{117}.$$

119 Para multiplicar un entero por un número mixto, *se reduce el entero de este á la especie del quebrado que le acompaña; despues se multiplica el numerador del quebrado por el entero, y á esto se le pondrá por denominador el denominador del quebrado.*

Por exemplo: si quisiera multiplicar 5 por $2\frac{3}{4}$ reduciria el $2\frac{3}{4}$ á $\frac{11}{4}$; despues multiplicaria el 5 por 11, y al producto 55 le pondria por denominador el 4; de manera que el producto será $\frac{55}{4}=13\frac{3}{4}$.

120 Para multiplicar un número mixto por otro número mixto, *se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña en cada uno*

de los factores, y despues se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.

Por exemplo : si quiero multiplicar $4\frac{2}{3}$ por $5\frac{3}{4}$, reduciré en ambos factores el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que multiplicar $\frac{14}{3}$ por $\frac{23}{4}$, que multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador, tendré $\frac{322}{12}$; y sacando los enteros será $26\frac{10}{12}$, ó simplificando el quebrado será $26\frac{5}{6}$.

121 Puesto que ya sabemos multiplicar un quebrado por un entero, vamos á resolver una qüestion que suele ocurrir en la práctica : y es la de reducir un quebrado á otro que tenga un denominador dado. Sea, por exemplo, el quebrado $\frac{3}{5}$, y supongamos que se quiera reducir á otro cuyo denominador sea 7; en este caso, como toda cantidad se puede considerar dividida por la unidad, podremos poner el $\frac{3}{5}$ baxo este aspecto $\frac{\frac{3}{5}}{1}$; ahora considerando como numerador al $\frac{3}{5}$, y como denominador al 1, podremos multiplicar los dos términos de esta expresion por 7, sin que se altere su valor, y se reducirá á $\frac{\frac{3}{5}\times 7}{1\times 7}=\frac{\frac{21}{5}}{7}=\frac{4\frac{1}{5}}{7}$ (*).

En el qual si se desprecia el $\frac{1}{5}$ del numerador, se tendrá $\frac{4}{7}$ que será el valor del quebrado pedido ; y este valor se dice que es aproxîmado por defecto ; porque para ser el verdadero le falta algo, que es el $\frac{1}{5}$ del numerador que hemos despreciado. Quando resulta un quebrado en el numerador, que es igual ó mayor que la mitad de la unidad, en vez de él se le añade una unidad al entero, y se dice que está aproxîmado por exceso ; y quando no resulta quebrado es señal de que está reducido exâctamente, lo qual ocurre quando el denominador que se le quiere dar es múltiplo del que ya tenia el quebrado.

122 Para dividir un quebrado por otro, *se trastornan los dos términos del quebrado divisor, y se multiplica numerador por numerador, y denominador por denomidador; ó se multiplican desde luego en cruz*; ó lo que es mejor : *se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y este producto será el numerador del quociente; despues se multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y este producto será el denominador del quociente.*

1.er exemp. Si quiero dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$, multiplicaré el numerador 3 del dividendo por el denominador 5 del divisor, y tendré en el producto 15 el numerador del quociente ; despues multiplicaré el denominador 4 del dividendo por el numerador 2 del divisor, y en el producto 8 tendré el denominador del quociente, el qual será $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

(*) *Este resultado manifiesta que* para convertir un quebrado en otro que tenga un denominador dado, se ha de multiplicar el numerador del quebrado por el denominador que se le quiere dar ; el producto se ha de partir por el denominador del quebrado ; y al quociente se le pondrá por denominador el que se le quiere dar.

2.º exemp. Si quisiera dividir $\frac{3}{7}$ por $\frac{2}{9}$, sacaria por quociente $\frac{27}{14}=1\frac{13}{14}$.

Para dar la demostracion de esta regla nos contraeremos al primer exemplo; y observaremos que si solo tubiésemos que dividir por 2, numerador del divisor $\frac{2}{5}$, estaba reducida la operacion á hacer dos veces menor al quebrado, lo que se consigue (106) multiplicando su denominador por 2, de manera que $\frac{3}{8}$ seria el quociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sino por $\frac{2}{5}$ que es cinco veces menor que 2; luego el quociente hallado dividiendo por 2, es cinco veces menor que el verdadero; y así, para obtener este debemos hacer aquel cinco veces mayor, lo qual se consigue (105) multiplicando su numerador por 5; de manera que executándolo, tendré por quociente verdadero $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

Esta regla la podríamos deducir analíticamente con bastante sencillez y claridad, observando que como en la division los términos deben ser homogéneos, para executar esta operacion deberemos hacer que lo sean los quebrados, reduciéndolos á un comun denominador; de manera que yendo indicando la operacion tendremos: $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3\times5}{4\times5}:\frac{2\times4}{4\times5}$.

Ahora, como un quociente no se altera, aunque se multipliquen ó partan el dividendo y divisor por un mismo número, resulta que podremos multiplicar los dos términos de la division indicada arriba por el denominador 4×5; y como esto se consigue suprimiendo los denominadores (106 cor.) se tendrá $3\times5:2\times4$, ó indicando la division por medio de la raya será $\frac{3\times5}{2\times4}$.

Resultado que manifiesta que se ha de executar la multiplicacion en cruz para obtener directamente el quociente.

En esta operacion observamos resultados opuestos á los de la multiplicacion; pues aqui *si el divisor es quebrado propio, el quociente será mayor que el dividendo; si es la unidad en forma de quebrado será igual; y si es impropio resultará menor.* Quando el divisor es la unidad en forma de quebrado, debe venir por quociente el dividendo, porque toda cantidad dividida por la unidad es igual á la misma cantidad. Ahora, como todo quebrado propio es menor que la unidad, el quociente que nos resulte deberá ser mayor que el que nos dé la division por la unidad; luego deberá ser mayor que el dividendo. Si el divisor es quebrado impropio, será mayor que la unidad, y por lo mismo el quociente será menor que el que dé la division por la unidad; luego será menor que el dividendo.

Los casos que pueden ocurrir en la division donde entran quebrados, son quatro: *dividir un quebrado por otro quebrado*, que es el que acaba nos de considerar; *dividir un entero por un quebrado*; *dividir un quebrado por un entero*; y finalmente *dividir un número mixto por otro número mixto.*

123 Para dividir un entero por un quebrado, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el numerador del quebrado.*

1.er exemp. Si quiero dividir 5 por $\frac{2}{3}$, multiplicaré el entero 5 por el denominador 3 del quebrado, y tendré 15; pondré á este producto por denominador el numerador 2 del quebrado, y el quociente será $\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

2.º exemp. Si dividiera 15 por $\frac{3}{7}$, sacaria el quociente 35.

Esto está fundado en que al entero 5 le podemos poner la unidad por denominador, y quedará reducida la operacion á dividir $\frac{5}{1}$ por $\frac{2}{3}$; y como por la regla general, de multiplicar por la unidad resulta la misma cantidad, no hacemos esta multiplicacion.

124 Para dividir un quebrado por un entero, *se multiplica el denominador del quebrado por el entero, y con esto queda hecha la division.*

1.er exemp. Si quiero dividir $\frac{3}{4}$ por 6, multiplicaré el denominador 4 del quebrado por el entero 6, y tendré por quociente $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

2.º exemp. El quociente de dividir $\frac{10}{13}$ por 5, es despues de simplificado $\frac{2}{13}$. La razon de este caso es la misma que en el anterior.

125 Para dividir un número mixto por otro mixto, *se reduce cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y despues se executa la division como la de un quebrado por otro* (122).

1.er exemp. Quiero dividir $8\frac{2}{5}$ por $3\frac{2}{7}$: primero reduciré cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que dividir $\frac{42}{5}$ por $\frac{23}{7}$; que para executarlo multiplicaré el numerador 42 del dividendo por el denominador 7 del divisor, y tendré 294 que será el numerador del quociente: multiplicaré despues el denominador 5 del dividendo por el numerador 23 del divisor, y tendré en 115 el denominador del quociente; por lo que este será $\frac{294}{115}=2\frac{64}{115}$.

2.º exemp. Si quiero dividir $47\frac{2}{9}$ por $6\frac{3}{5}$, executando lo dicho antes, sacaré por quociente el número $7\frac{46}{297}$.

126 Por no complicar los casos con demasiadas reglillas, hemos dicho que son quatro los de la division; pero en realidad son ocho; pues ademas puede ocurrir el *dividir un entero por un número mixto*; *un número mixto por un entero*; *un quebrado por un número mixto*; y *un número mixto por un quebrado*; más para todos estos casos daremos esta regla: *redúzcase en el número mixto el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y quedarán reducidos el primero de estos casos á la division de un entero por un quebrado; el segundo á la de un quebrado por un entero; y los otros dos á la de un quebrado por otro quebrado.*

1.er exemp. Si quisiera dividir 9 por $5\frac{3}{4}$, reduciria el $5\frac{3}{4}$ á $\frac{23}{4}$, y despues dividiria por él el 9 por las reglas dadas (123), lo que me daria

$$\frac{9}{5\frac{3}{4}}=\frac{9}{\frac{23}{4}}=\frac{36}{23}=1\frac{13}{23}.$$

2.º exemp. Si quisiera dividir $6\frac{2}{3}$ por 5, reduciria el $6\frac{2}{3}$ á $\frac{20}{3}$, y di-

vidiria por lo dicho (124) en esta forma: $\frac{6\frac{2}{3}}{5}=\frac{\frac{20}{3}}{5}=\frac{20}{15}=1\frac{5}{15}=1\frac{1}{3}$.

3.er exemp. Si quisiera dividir $\frac{3}{7}$ por $2\frac{4}{5}$, reduciria este á $\frac{14}{5}$ y executaria la operacion (122) de este modo: $\frac{\frac{3}{7}}{2\frac{4}{5}}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{14}{5}}=\frac{3\times5}{7\times14}=\frac{15}{98}$.

4.° Finalmente, si quisiera dividir $5\frac{3}{7}$ por $\frac{4}{9}$, reduciria el $5\frac{3}{7}$ á $\frac{38}{7}$, y executaria la operacion (122) como aqui se presenta:

$$\frac{5\frac{3}{7}}{\frac{4}{9}}=\frac{\frac{38}{7}}{\frac{4}{9}}=\frac{38\times9}{4\times7}=\frac{342}{28}=12\frac{6}{28}=12\frac{3}{14}.$$

127 En los exemplos que acabamos de manifestar y en el expuesto (118), hemos preferido el ir indicando las operaciones, paraque los principiantes se vayan acostumbrando á dar transformaciones; y como es muy importante el que adquieran este uso, les vamos á poner aqui una expresion bastante complicada, paraque la vayan reduciendo á una sola. Sea por exemplo la expresion (A):

(A)
$$\frac{\dfrac{\dfrac{2+\frac{3}{4}}{3+\dfrac{4}{5+\frac{2}{3}}}}{\frac{5}{9}}}{\dfrac{5+\frac{4}{7}}{2+\dfrac{2}{2+\frac{3}{4}}}}$$

La raya mas larga de todas nos indica que el valor de todo lo que hay encima de ella, se ha de dividir por todo lo que hay debaxo.

Ahora, tanto arriba como abaxo hay todavía otras rayas que indican divisiones; y así es necesario ver lo que nos señalan. Empezando por arriba, en el dividendo observaremos qual es la raya mayor, y todo lo que hay sobre ella que es (B): se ha de dividir por el $\frac{5}{9}$ que tiene debaxo. Ahora, aun tenemos en este dividendo varias divisiones indicadas, y observando qual es la raya mayor, vemos que sobre ella está el $2+\frac{3}{4}$, y debaxo la expresion $3+\frac{4}{5+\frac{2}{3}}$, por consiguiente debemos

(B)
$$\frac{2+\frac{3}{4}}{3+\dfrac{4}{5+\frac{2}{3}}}$$

executar antes esta division, para lo qual se reducirá el dividendo $2+\frac{3}{4}$ á $\frac{11}{4}$ (§ 111): y como en el divisor hay un número mixto, en que el denominador del quebrado es otro número mixto, se reducirá á un quebrado solo, y tendremos $5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$, con lo qual $3+\frac{4}{5+\frac{2}{3}}=3+\frac{4}{\frac{17}{3}}$; y como haciendo la division de 4 por $\frac{17}{3}$ tenemos (§ 123) $\frac{12}{17}$, el $3+\frac{4}{5+\frac{2}{3}}$ se nos convertirá en $3+\frac{12}{17}=\frac{3\times17+12}{17}=\frac{63}{17}$. Luego la expresion (B) la tenemos reducida ya á $\frac{\frac{11}{4}}{\frac{63}{17}}$, que executando la division (122) se convierte en $\frac{11\times17}{4\times63}=\frac{187}{252}$ (C); luego todo el numerador ó dividendo de la expre-

sion (A), que es todo lo que se halla sobre la raya mayor, lo tendremos reducido á $\frac{\frac{187}{252}}{\frac{5}{9}}=\frac{187\times9}{252\times5}=\frac{1683}{1260}=\frac{561}{420}=\frac{187}{140}$ (D).

Pasemos ahora á la expresion (E) que sirve de divisor, que como es muy semejante á la expresion (B), la reduciremos por el mismo método, como aqui iremos indicando del modo siguiente: $\frac{5+\frac{4}{7}}{2+\frac{2}{2+\frac{3}{4}}}$ (E)

$$\frac{5+\frac{4}{7}}{2+\frac{2}{2+\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{5\times7+4}{7}}{2+\frac{2}{\frac{2\times4+3}{4}}}=\frac{\frac{39}{7}}{2+\frac{2}{\frac{11}{4}}}=\frac{\frac{39}{7}}{2+\frac{8}{11}}=\frac{\frac{39}{7}}{\frac{2\times11+8}{11}}=\frac{\frac{39}{7}}{\frac{30}{11}}=$$
$$\frac{39\times11}{7\times30}=\frac{429}{210}=(\S109)\,\frac{143}{70}.$$

Luego el denominador ó el divisor total de la expresion (A), habiéndósenos convertido en $\frac{143}{70}$, y el numerador en $\frac{187}{140}$, dicha expresion (A) la tendremos reducida á

$$\frac{\frac{187}{140}}{\frac{143}{70}}=(\S122)\,\frac{187\times70}{140\times143}=(\S79)\,\frac{187\times70}{2\times70\times143}=\frac{187}{2\times143}=\frac{187}{286}=(\S79)\,\frac{17}{26};$$

que es el valor de dicha expresion.

De la valuacion de los quebrados, y de los quebrados continuos.

128 Se dice que se *valúa* un quebrado quando se expresa en unidades de especie inferior á aquella á que se refiere el quebrado. Por exemplo: se sabe que $\frac{1}{3}$ de vara no se puede expresar en varas, porque no hay ninguna vara; pero como la vara tiene 3 pies, 1 pie es tambien la tercera parte de la vara, y por lo mismo (ax. 5.º) $\frac{1}{3}$ de vara $=1$ pie; luego hemos expresado el valor de $\frac{1}{3}$ de vara en pies, que es la unidad de especie inferior á la vara.

Para valuar un quebrado: *se multiplica el numerador por el número que expresa las veces que la unidad, en que se quiere valuar el quebrado, está contenida en aquella á que se refiere el quebrado, y esto se parte por el denominador; si de la division resulta un número mixto y hay todavía unidades de especie inferior, se hace con el quebrado del número mixto lo mismo; y así se continúa hasta que no haya mas unidad de especie inferior; en cuyo caso si queda todavía quebrado, se desprecia si el numerador no llega á ser la mitad del denominador: y se añade en vez del quebrado una unidad á las unidades anteriores, si el numerador llega ó pasa de la mitad del denominador.*

1.er exemplo. Si quiero saber quánto valen $\frac{5}{7}$ de doblon, multiplicaré el numerador 5 por 4 que son los pesos que tiene el doblon, y dividiré el producto 20 por 7, lo que da 2 pesos y $\frac{6}{7}$ de peso. Para averiguar

los reales que hay en $\frac{6}{7}$ de peso, multiplicaré el numerador 6 por 15 que son los reales que contiene un peso, y dividiré por 7 el producto 90, y tendré 12 reales y $\frac{6}{7}$ de real. Para averiguar los maravedíses que hay en $\frac{6}{7}$ de real, multiplicaré el numerador 6 por 34 que son los maravedíses que tiene un real, y el producto 204 le dividiré por 7, y tendré que hay 29 maravedíses y $\frac{1}{7}$ de maravedí; que como no hay unidad inferior al maravedí, y el numerador 1 no es la mitad del denominador 7, le desprecio y tengo que los $\frac{5}{7}$ de doblon valen 2 pesos, 12 reales y 29 maravedíses.

2.º exemplo. Si quisiera hallar quánto valian los $\frac{3}{5}$ de 27 doblones, como aqui se toman por unidad los 27 doblones, que es á lo que se refiere el quebrado, para hallar los doblones que hay, multiplicaré el numerador 3 por 27, y dividiré por 5 el producto 81, y despues sacaré 16 doblones y $\frac{1}{5}$ de doblon. Para averiguar quántos pesos hay en $\frac{1}{5}$ de doblon, multiplicaré el numerador 1 por 4, que son los pesos que componen el doblon; y como no puedo dividir el producto 4 por 5, digo que no hay ningun peso, y que solo hay $\frac{4}{5}$ de peso. Para averiguar los reales que hay en $\frac{4}{5}$ de peso, multiplicaré el numerador 4 por 15 que son los reales que tiene un peso, y el producto 60 le dividiré por 5, y sacaré que hay 12 reales; y como no queda resta, infiero que $\frac{3}{5}$ de 27 doblones equivalen á 16 doblones, 0 pesos y 12 reales.

3.er exemplo. Si quisiera averiguar quánto valian los $\frac{5}{6}$ de 1 quintal, executando las operaciones correspondientes, hallaria que valian exâctamente 3 arrobas, 8 libras, 5 onzas, 5 adarmes y 1 tomin.

Esta regla está fundada en que un quebrado es lo mismo que una division indicada (103), y por lo mismo no pudiéndose executar la division del dividendo se reduce á su especie inmediata inferior, se executa la division, y si sale un quociente exâcto quedará valuado; si sale un número mixto, se vuelve á valuar este quebrado hasta que se llegue á la unidad de especie ínfima; en cuyo caso si aun resulta un quebrado, hemos dicho que se desprecie si su numerador es menor que la mitad del denominador, ó se añada una unidad si llega á la mitad ó pasa. Esto se funda en que al matemático le toca decir lo que á cada uno le pertenece; le sale, por exemplo, al fin de un resultado, como en el primer caso, que uno debe recibir 29 maravedíses y $\frac{1}{7}$; como la última moneda que hay es el maravedí, no se le puede dar la séptima parte; y así ó se le ha de dar por este séptimo un maravedí, en cuyo caso recibiria demas $\frac{6}{7}$ de maravedí, ó él ha de perder $\frac{1}{7}$ de maravedí; como de despreciar un séptimo solo resulta este perjuicio, y de darle en vez de él un maravedí, resulta que se le paga $\frac{6}{7}$ mas, siempre se procura hacer que resulte el menor perjuicio, lo que se consigue en virtud de lo que acabamos de decir (*).

(*) *En las tesorerias públicas no se atiende á esto: los picos quedan á beneficio de la caxa, por las equivocaciones y quiebras de moneda que puede tener.*

129 En muchas ocasiones sucede que la unidad á que se refiere el quebrado es otro quebrado, y entonces vienen seguidos dos quebrados separados con la preposicion *de*, que forman un *quebrado de quebrado*; y lo primero que se debe hacer, es reducirlos á un quebrado solo, multiplicando los numeradores entre sí, y despues los denominadores; luego, se valúa este quebrado por las reglas dadas antes (128).

1.er exemplo. Quiero averiguar quánto valen los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de vara: primero reduciré los dos quebrados á uno solo, diciendo: 2 por 4 son 8; 3 por 5 son 15; con lo que tengo ya reducida la expresion á $\frac{8}{15}$ de vara; averiguando ahora el valor de $\frac{8}{15}$ de vara, encuentro que es 1 pie, 7 pulgadas, 2 líneas y $\frac{2}{5}$ de línea.

2.º exemplo. $\frac{3}{8}$ de $\frac{16}{21}$ de quintal valen: 1 arroba, 3 libras, 9 onzas y 2 $\frac{2}{7}$ adarmes.

La razon de esta práctica consiste en que tomar, por exemplo, los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, es lo mismo que multiplicar el $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$; porque si tubiera que tomar solo la 3.ª parte de $\frac{4}{5}$ estaria reducida la operacion á hacer tres veces menor el $\frac{4}{5}$, lo que se consigue multiplicando por 3 su denominador, y tendria $\frac{4}{15}$; pero como no tenia que tomar la tercera parte, sino dos veces la tercera parte, despues de multiplicado el denominador por 5, deberé tomar dos veces esta expresion $\frac{4}{15}$, lo que se consigue multiplicando por 2 el numerador; y tendré que $\frac{8}{15}$ expresará las dos terceras partes de $\frac{4}{5}$.

Ahora, si fuese $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{9}$, reducidos los dos primeros á $\frac{8}{15}$, tendríamos que esto era lo mismo que $\frac{8}{15}$ de $\frac{2}{9}$, que por lo dicho antes será $\frac{16}{135}$.

Quando se da para valuar un quebrado de quebrado, ó para reducirle á quebrado comun, conviene indicar la multiplicacion de los numeradores y denominadores; y si alguno se puede descomponer en factores se executa para hacer la simplificacion que se pueda, sin necesidad de practicar la multiplicacion; por exemplo: si quisiera averiguar quánto valian los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{2}{5}$ de una arroba, indicaria la operacion, descomponiendo los términos en factores, como aqui se presenta:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{5}{6} \text{ de } \frac{2}{5} \text{ de arroba} = \frac{2.\cancel{5}.\cancel{2}}{3.\cancel{2}.3.\cancel{5}} \text{ de arroba} = \frac{2}{3.3} \text{ de arroba} = \frac{2.25}{9} \text{ de}$$

libra $= \frac{50}{9}$ de libra $=$ 5 libras $+$ $\frac{5}{9}$ de libra; y valuando el quebrado $\frac{5}{9}$ de libra, sacaré 8 onzas, 14 adarmes y $\frac{2}{9}$ de adarme.

Del mismo modo si quisiera averiguar quánto valian los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{2}$ de 10 doblones, indicaria la operacion como aqui se presenta:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{5}{6} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ de 10 doblones} = \frac{\cancel{2}.\cancel{2}.2.\cancel{5}.1.2.5}{3.\cancel{5}.\cancel{2}.3.\cancel{2}} \text{ de doblon} = \frac{2.2.5}{3.3}$$

de doblon = 2 doblones, o pesos, 13 reales, 11 $\frac{1}{3}$ maravedíses.

130 Quando los términos de un quebrado son demasiado grandes, no percibimos bien su valor: porque nuestro entendimiento no puede formar una idea bastante exâcta del valor de una parte de una unidad que está

dividida en muchas, y luego despues saber á quánto equivaldrá un gran número de ellas. En este caso para percibir su valor se divide el numerador y el denominador por el numerador, y se tendrá un nuevo quebrado igual con el dado, que tendrá por numerador la unidad, y por denominador el quociente que resulte de dividir el denominador por el numerador. Si este quociente es exâcto, es decir, si es un número entero, se concebirá con claridad el valor exâcto de dicho quebrado; porque estará reducido á otro, cuyo numerador es la unidad y el denominador un número no muy grande. Si es un número mixto, no se podrá percibir con exâctitud su valor; pero habrá dos quebrados entre los quales estará el valor del quebrado dado; estos quebrados serán: el primero el que resulta de poner por numerador la unidad y por denominador el quociente entero que se sacó: el segundo tendrá por numerador la unidad, y por denominador el quociente entero mas la unidad; y el quebrado dado será menor que el primero, y mayor que el segundo.

1.er exemplo. Sea el quebrado $\frac{527}{2108}$ que no se puede simplificar por las reglas dadas (109). Así como está, no se puede conocer su valor; porque no se puede concebir con claridad una unidad, por exemplo, una manzana, un maravedí, &c. dividida en 2108 partes, y quánto valen las 527 de estas partes; por esto dividiré los dos términos del quebrado por el numerador 527, lo que no altera su valor, y le convierte en $\frac{1}{4}$; por lo que veo que dicho quebrado $\frac{527}{2108}$ equivale á la quarta parte de la unidad; cuyo valor se percibe muy claramente, porque todos saben figurarse bien una unidad qualquiera dividida en quatro partes, y conocer de este modo el valor de una de ellas.

2.º exemplo. Si el quebrado fuese $\frac{2125}{7528}$, advertiria que tampoco se puede simplificar; pero dividiendo el numerador y el denominador por el numerador 2125, se me convertirá en $\frac{1}{3\frac{1153}{2125}}$, cuyo valor tampoco puedo conocer bien, á causa de que en el denominador se halla el quebrado $\frac{1153}{2125}$; si le desprecio tendré el quebrado $\frac{1}{3}$ que será (106) mayor que el $\frac{1}{3\frac{1153}{2125}}$, y por consiguiente mayor tambien que el $\frac{2125}{7528}$; y si en vez de despreciar el quebrado, añado una unidad al denominador 3, tendré otro quebrado $\frac{1}{4}$ que será (106) menor que el $\frac{1}{3\frac{1153}{2125}}$, y por consiguiente menor que el primitivo $\frac{2125}{7528}$; y como es muy fácil concebir lo que es la quarta parte de la unidad y la tercera parte, tambien lo es el concebir un valor mayor que el primero y menor que el segundo; y así queda averiguado que el quebrado $\frac{2125}{7528}$ es mayor que $\frac{1}{4}$ y menor que $\frac{1}{3}$.

Si quisiera encontrar otros quebrados mas aproximados, no despreciaria el quebrado $\frac{1153}{2125}$, sino que executaria lo mismo con él que con el primitivo; esto es, dividiria sus dos términos por el numerador 1153, y

se convertiria en $\dfrac{1}{1+\frac{972}{1153}}$, y por consiguiente el primitivo en

$\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\frac{972}{1153}}}$, el qual, despreciando el quebrado último, será $\dfrac{1}{3+\frac{1}{1}}=\frac{1}{4}$;

y si en vez de él añado una unidad, se tendrá $\dfrac{1}{3+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{3\times2+1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}$.

Ahora, este quebrado que nos resulta es mayor que el primitivo, porque aumentando el número mixto $1+\frac{972}{1153}$ que sirve de denominador del último quebrado, disminuye (106) dicho quebrado; y disminuyendo este quebrado, disminuye el número mixto $3+\frac{1}{2}$ que sirve de denominador al primitivo, y por lo mismo este aumenta.

En vez de despreciar el quebrado $\frac{972}{1153}$, podremos dividir sus dos términos por el numerador, y así podríamos ir procediendo hasta encontrar una division que no nos diese resta; con lo qual tendríamos descompuesto nuestro quebrado en otro, cuyo numerador era la unidad, y el denominador un número mixto, en que el quebrado tenia por denominador otro número mixto, cuyo denominador del quebrado seria otro número mixto, &c. A estas fracciones se les da el nombre de *fracciones continuas ó de quebrados continuos*; cuya teoría es muy importante, por quanto nos proporciona conocer entre qué números se halla el valor de una expresion, de cuyo valor no tenemos una justa idea.

131 Como el método que hemos seguido ha sido dividir el denominador por el numerador, este por la resta, esta resta por la que queda de la division anterior, &c. resulta que el método para *transformar en quebrado continuo un quebrado qualquiera, está reducido á encontrar el máxîmo comun divisor de los dos términos del quebrado, y poner por numeradores siempre la unidad, y por denominadores los quocientes enteros, con el mismo órden con que vayan saliendo.* Luego si queremos transformar en quebrado continuo el $\frac{2125}{7528}$, hasta que el último quebrado tenga por numerador la unidad, practicaremos con sus dos términos las mismas reglas que para hallar el máxîmo comun divisor, en esta forma:

7528	2125	1153	972	181	67	47	20	7	6	1
	3)	1)	1)	5)	2)	1)	2)	2)	1)	6
1153	0972	0181	067	047	20	07	06	1	0	

y poniendo ahora la unidad por numerador y por denominadores los quocientes, tendremos que $\frac{2125}{7528}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}}}}}$;

donde vemos que siempre que tratemos de simplificar un quebrado por el máxîmo comun divisor, y nos encontramos con que no se puede executar, los quocientes nos pueden servir para transformarle en quebrado continuo. Pero aun hay mas, por estos mismos quocientes se halla con mucha sencillez una multitud de quebrados, entre los quales se encuentra el valor del propuesto. Para esto, se colocan todos en un reglon, y debaxo de cada quociente se pone su quebrado correspondiente de esta manera: *se multiplican los dos términos del quebrado anterior por el quociente, cuyo quebrado se busca: al numerador se añade el del anterior, y al denominador el denominador.* Esta regla supone que se tengan ya calculados dos quebrados; por esta causa dicen los mas de los autores que el primer quebrado se halla, desde luego, poniendo por numerador la unidad, y por denominador el primer quociente; y para hallar el segundo dicen que se ponga antes este quebrado $\frac{0}{1}$; más se puede hacer que el primero resulte tambien por la regla general, poniendo antes de los quocientes estas dos expresiones $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$ (*) en forma de quebrado. Así, si queremos hallar entre qué quebrados se halla el valor del $\frac{2125}{7528}$, pondremos los quocientes que ha dado la operacion del máxîmo comun divisor con el órden que han salido, y aqui se presenta:

$$3,\ 1,\ 1,\ 5,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 6$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{11}{39},\ \frac{24}{85},\ \frac{35}{124},\ \frac{94}{333},\ \frac{223}{790},\ \frac{317}{1123},\ \frac{2125}{7528}$$

y pondremos dos lugares mas hácia la izquierda del 3 las dos expresiones $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$; y para calcular el quebrado que corresponde al quociente 3, diremos: 3 por 0 es 0, que añadiéndole el numerador del $\frac{1}{0}$ es 1, que expresa el numerador del quebrado que buscamos; para hallar su denominador diremos: 3 por 1 es 3, y 0 son 3, que es dicho denominador. Para llegar al correspondiente al primer 1, diremos: 1 por 1, numerador del $\frac{1}{3}$, es 1, y 0, numerador del $\frac{0}{1}$, es 1, y tengo el numerador; para hallar el denominador diré: 3 por 1 es 3, y 1, denominador del anterior, son 4; y tendremos que $\frac{1}{4}$ es el que corresponde al primer 1. Para hallar el que corresponde al segundo diremos: 1 por 1 es 1, y 1 son 2; 1 por 4 es 4, y 3 son 7, luego será $\frac{2}{7}$. El del 5 se hallará diciendo: 5 por 2 son 10, y 1 son 11; 5 por 7 son 35, y 4 son 39, luego será $\frac{11}{39}$. Encontraremos el del 2 diciendo: 2 por 11 son 22, y 2 son 24; 2 por 39 son 78, y 7 son 85, luego será $\frac{24}{85}$. Siguiendo del mismo modo se ob-

---

(*) *La primera expresion es el símbolo de una cantidad, que puede llegar á ser mayor que qualquiera otra, y que se llama como diremos en su lugar,* infinita: *y la segunda el símbolo de cero: y hemos dicho que se pueden poner antes de los quebrados que van saliendo, porque toda cantidad dada está comprendida entre el infinito y cero.*

tendrán todos los que alli se ven, debiendo salir el último igual con el primitivo, como en efecto se verifica.

Todos los quebrados que ocupan un lugar ímpar son mayores que el quebrado propuesto, y menores los que ocupan un lugar par. Para convencernos de ello, basta observar que si en el quebrado continuo omitimos el quebrado que acompaña al entero en el número mixto, que es denominador del quebrado que ocupe un lugar ímpar, resulta mayor quebrado; así es, que de suprimir lo que acompaña al 3, resulta mayor en efecto por lo dicho (106); para verlo quando se omite el $\frac{1}{5\frac{1}{2}}$ &c. que acompaña al segundo 1, observaremos que de este modo disminuye el denominador $1\frac{1}{5}$&c.; disminuyendo este, crece el quebrado $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$&c.; y creciendo este, crece todo el denominador $1\frac{1}{1\frac{1}{5}}$&c.; creciendo este denominador disminuye el quebrado $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{5}}}$&c., por consiguiente todo el denominador $3\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{5}}}$ &c. y disminuyendo este, crece por consiguiente el $\frac{1}{3\frac{1}{1}}$ &c. que resulta. Del mismo modo lo demostraríamos de los demas. Respecto de los pares diremos: que omitiendo el $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ &c. disminuye el denominador $1\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ &c. y por consiguiente crece el quebrado $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{5}}}$ &c. y el número mixto $3\frac{1}{1}$&c. luego se disminuirá el quebrado $\frac{1}{3\frac{1}{1}}$ &c.: y como lo mismo demostraríamos de los demas pares, queda demostrada la proposicion.

Terminemos este asunto sacando todos los quebrados que pueden expresar el valor del $\frac{1000000000}{3141592653}$, porque en lo sucesivo le necesitaremos; para lo qual trataremos de hallar el máxîmo comun divisor de sus dos términos, como aqui se presenta:

3141592653	1000000000	14159265,3	8851429	88212,1,8	30211	2081,7	394	267	127	13	10	3	1
	3)	7)	15)	1)	291)	1)	75)	1)	2)	9)	1)	3)	3)
141592653	0088851429	03307836 3	0030211	27790 1	00394	0223 7	127	013	010	03	01	0	
		0882121 8		00600 2 8		026 7							
				298 1 7									

Ahora dispondremos los quocientes con el órden que nos han salido, y sacaremos los quebrados por las reglas que acabamos de exponer, del modo siguiente:

3, 7, 15, 1, 291, 1, 75, 1,

$\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$, $\frac{32989}{103638}$, $\frac{33102}{103993}$, $\frac{2515639}{7903113}$, $\frac{2548741}{8007106}$,

2, 9, 1, 3, 3,

$\frac{7613121}{23917325}$, $\frac{71066830}{223263031}$, $\frac{78679951}{247180356}$, $\frac{307106683}{964804099}$, $\frac{1000000000}{3141592653}$.

De los quebrados ó fracciones decimales.

132 La teoría de los quebrados embaraza mucho los cálculos por dos razones: la primera porque hay que atender en ellos á dos números quales son el numerador y el denominador; y la segunda porque casi siempre se necesita practicar operaciones auxîliares, como reducirlos á un comun denominador, antes de executar las operaciones que se desean. Con la mira de facilitar las operaciones, y hacer que su práctica aparezca con la misma sencillez que la de los números enteros, se ha tratado de substituir á las fracciones ó quebrados comunes, fracciones ó quebrados cuyos denominadores sean 10, 100, 1000, &c. ó en general, la unidad seguida de ceros, y que les sean iguales en valor; estos quebrados son los que se llaman *quebrados decimales.*

Estos quebrados los podríamos dar á conocer fundándonos en la qüestion resuelta (121); pero es mejor manifestar su teoría directamente, considerándolos como una conseqüencia del sistema de numeracion.

En efecto, formaremos una idea exâcta de ellos concibiendo la unidad dividida en diez partes iguales, que cada una de ellas se llama *décima* de la unidad; concibiendo despues cada décima dividida en otras diez partes, que se llaman *centésimas*; concibiendo cada centésima dividida en otras diez partes, que se llaman *milésimas*; cada milésima en otras diez, que se llaman *diezmilésimas*; cada diezmilésima en diez *cienmilésimas*; cada cienmilésima en diez *millonésimas*; cada millonésima en diez *diezmillonésimas*; y así en adelante, *cienmillonésimas*, *milmillonésimas*, *diezmilmillonésimas*, *cienmilmillonésimas*, &c.

Estos quebrados se escriben del mismo modo que los números enteros, poniendo á la derecha de las unidades las décimas, á la derecha de estas las centésimas, despues las milésimas, luego las diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, cienmillonésimas, &c.

El guarismo que expresa las unidades se determina poniendo á continuacion de él, esto es, entre las unidades y las décimas, una coma; y sino hay unidades se pone o antes de la coma, paraque ocupe el lugar de las unidades. Por exemplo: si quiero expresar *treinta y dos unidades y quatro décimas*, escribiré así: 32,4; y la coma da á entender que el guarismo 2 expresa las unidades, y el 4 las décimas; si solo hubiera querido escribir *quatro décimas*, hubiera puesto o en el lugar de las unidades, y tendria escritas las quatro décimas de este modo: 0,4.

Puesto que *quatro décimas* es lo mismo que quatro partes de aquellas de que la unidad consta de diez, tendremos que $0,4=\frac{4}{10}$, y que $32,4=32\frac{4}{10}$; luego aqui la coma hace los oficios de denominador, y por lo mismo ella nos proporciona el que en estos quebrados solo tengamos necesidad de atender á su numerador, y de colocar convenientemente la coma. Como por otra parte en estos quebrados cada unidad sigue la ley

de ir siendo de diez en diez veces menor, contando de izquierda á derecha como en los números enteros, resulta que los podemos calcular del mismo modo que estos, sabiendo la colocacion que se debe hacer de la coma.

Paraque se conozca bien la clase de unidades paraque está destinado cada lugar, presentaremos aqui un número qualquiera de cifras ó guarismos, y pondremos al lado de cada uno el nombre de la unidad que representa, segun el lugar que ocupe, en esta forma:

&c. &c.
7 centenas de millar.
6 decenas de millar.
5 millares.
4 centenas.
3 decenas.
4, unidades.
8 décimas.
5 centésimas.
7 milésimas.
4 diezmilésimas.
5 cienmilésimas.
6 millonésimas.
1 diezmillonésimas.
3 cienmillonésimas.
9 milmillonésimas.
6 diezmilmillonésimas.
5 cienmilmillonésimas.
8 billonésimas.
7 diezbillonésimas.
5 cienbillonésimas.
2 milbillonésimas.
&c. &c.

Ponemos &c. tanto á la izquierda como á la derecha del número, para indicar que todavía se pueden poner los guarismos que se quieran; y con esto se ve que el sistema de las decimales no es mas que una extension del de los enteros; pues así como este proporciona medios para escribir un número por grande que sea, aquel nos los proporciona para escribir un número tan pequeño como se quiera, siguiendo siempre una misma ley.

133 Las decimales vayan ó no acompañadas de enteros se leen del mismo modo que estos números; solo que antes se necesita averiguar el nombre que se debe pronunciar al fin. Para lo qual se va diciendo desde la coma á la derecha en el primer lugar: *décimas*, en el segundo *centésimas*, y así sucesivamente, hasta que se llegue al último guarismo, cuyo nombre se apunta paraque no se olvide si es complicado el número. En este caso se van separando los guarismos en periodos de seis en seis, empezando de derecha á izquierda, poniendo en el primer periodo un 1, en el segundo un 2, &c.; y dividiendo despues cada uno de estos periodos en dos de tres guarismos con una coma, se lee como un número entero, pronunciando al fin la especie de unidades que se apuntó, ó que expresaba el último guarismo. Paraque no se confundan estas comas con la primitiva, la separacion se puede hacer por arriba poniendo la coma inversa. Por exemplo: si quisiera leer el número 8234,565297035008752, averiguaria la especie de unidades que expresaba el último guarismo 2, y hallaria por el método acabado de exponer que expresaba *milbillonésimas*. Despues le dividiré de derecha á izquierda en periodos de seis en seis guarismos, y luego cada uno de estos

en dos de tres; y haciendo la division por arriba, le tendré preparado como aqui se ve:

$$8^{3}234,'565^{2}297'035^{1}008'752$$

y le leeré así: *ocho trillones, doscientos treinta y quatro mil quinientos sesenta y cinco billones, doscientos noventa y siete mil treinta y cinco millones, ocho mil setecientas cincuenta y dos milbillonésimas.*

Esto se puede hacer tambien leyendo primero el entero por las reglas dadas (21), y las decimales por las reglas acabadas de exponer; así, el número 3470265081725,3006125635777̣27, le prepararia de este modo:

$$3_{2}470,265_{1}081,725,30^{2}061'256^{1}357'727$$

que se lee: *tres billones, quatrocientos setenta mil doscientos sesenta y cinco millones, ochenta y un mil setecientos veinticinco enteros ó unidades, treinta billones, sesenta y un mil doscientos cincuenta y seis millones, trescientas cincuenta y siete mil setecientas veintisiete cienbillonésimas.*

134 Pues que las decimales son quebrados que tienen denominadores particulares, como 10, 100, 1000, &c. tambien debe haber casos en que no se altere su valor. Estos son *quando á continuacion de los guarismos significativos se añaden ó quitan los ceros que se quieran*; porque con añadir un cero, hacemos que el número de unidades sea diez veces mayor; pero como en este caso cada una es diez veces menor queda compensado; y por lo mismo $0,4=0,40=0,400=0,4000=$ &c. lo que por otra parte es tambien muy fácil de concebir; porque $0,4=\frac{4}{10}$; $0,40=\frac{40}{100}$; $0,400=\frac{400}{1000}$; &c. y todos estos quebrados son iguales por resultar del primitivo multiplicando sus dos términos por 10, por 100, por &c.

135 *Quando los ceros se colocan entre la coma y los guarismos significativos, se hace el quebrado tantas veces menor, como expresa la unidad seguida de tantos ceros como se han puesto entre la coma y los guarismos significativos*; porque en este caso se hace diez, ciento, mil, &c. veces menor el valor de cada unidad, y no se hace diez, ciento, mil, &c. veces mayor el número de ellas.

Del mismo modo, si en un número que lleva enteros con decimales se corre la coma un lugar mas hácia la izquierda, como su guarismo que antes expresaba unidades, ahora expresará décimas; el que antes décimas, ahora centésimas; y así sucesivamente, resulta que á cada parte se le ha hecho diez veces menor; y por lo mismo esta mutacion de la coma habrá convertido al número propuesto en otro diez veces menor; si se hubiera corrido la coma dos lugares hácia la izquierda, hubiéramos hecho cien veces menor á dicho número; y en general, *con correr la coma un número qualquiera de lugares hácia la izquierda, se hace al número tantas veces menor, como expresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

Por el contrario *corriendo la coma un número qualquiera de lugares hácia la derecha, quedará hecho el número tantas veces mayor, como*

expresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma. De donde resulta que si en el número 352,48652 colocamos la coma entre el 3 y el 5 tendremos 3,5248652, que será cien veces menor que el propuesto; y si la hubiéramos puesto entre el 6 y el 5, hubiéramos obtenido 352486,52 que es mil veces mayor que el propuesto.

136 Pues que la utilidad de los quebrados decimales, es el evitar los comunes, lo primero que debemos enseñar es á reducir á quebrado decimal todo quebrado comun. Para esto *se añaden á su numerador tantos ceros como guarismos decimales se quieran sacar*; y *dividiendo despues por el denominador, no hay mas que separar de derecha á izquierda en el quociente tantos guarismos con la coma, como ceros se añadieron al numerador.* Por exemplo: si quiero reducir el quebrado $\frac{9}{14}$ á uno decimal, que tenga solo dos guarismos decimales, añadiré al 9 dos ceros, y tendré 900; divido ahora 900 por 14, y saco 64; en este quociente debo separar dos guarismos con la coma; y como entonces no queda nada á la izquierda de la coma, necesito poner un cero de modo que tendré 0,64 ó *sesenta y quatro centésimas*, que no es mas que un valor aproxîmado del $\frac{9}{14}$; pero cuya aproxîmacion la hubiera podido continuar tanto como hubiera querido, sacando mas guarismos.

$$\begin{array}{r|l} 900 & 14 \\ 060 & \overline{64} \\ 04 & \end{array}$$

Esta práctica está fundada en lo que hemos manifestado (121); pues con añadir ese número de ceros no hacemos mas que multiplicarle por el denominador que queremos que tenga. Más este método no es en la práctica el mas expedito, porque es embarazoso tener despues que saber donde se ha de poner la coma, y ademas puede haber equivocacion al ir baxando los ceros. Ademas de que en sí estriba en una cosa que las mas de las veces no sabemos; pues en muchas ocasiones puede salir quociente exâcto, antes de haber sacado los guarismos que nos proponíamos. Y así, vamos á dar otra regla que es mas general y ventajosa, á saber: *tómese el numerador del quebrado por dividendo, y el denominador por divisor, y divídase el uno por el otro; más si el quebrado es propio, el denominador que aquí hace de divisor, será mayor que el numerador que hace de dividendo, y por lo mismo no cabrá el divisor en el dividendo; y así, se pone 0 en el quociente y despues del 0 la coma. Añádanse despues al dividendo tantos ceros como se necesiten, paraque el divisor esté contenido alguna vez en dicho dividendo con los ceros, y pónganse á continuacion de la coma tantos ceros menos uno, como se añadieron al dividendo; véase ahora quántas veces cabe el divisor en este dividendo; póngase este guarismo por quociente, multiplíquese este quociente por el divisor, y réstese del dividendo; añádase un cero á la resta, vuélvase á ver quántas veces está contenido el divisor en este segundo dividendo parcial, póngase en el quociente, multiplíquese por el divisor, réstese del dividendo; á la resta añádase otro cero, y continúese de este modo hasta sacar los guarismos que se quieran.*

1.er exemplo. Si quiero sacar con tres decimales el valor de $\frac{6}{13}$, executaré la operacion como aqui se ve:

```
  60   | 13
  080  |------
   020 | 0,461
    07 |
```

Tomo el 6 por dividendo, y el 13 por divisor: veo que el 13 no está contenido ninguna vez en el dividendo 6, y por lo mismo pongo o en el quociente y despues la coma; ahora debo añadir al dividendo 6 los ceros que necesite paraque el 13 esté contenido en él alguna vez, y advierto que es suficiente añadir un cero, porque en 60 está contenido el 13; como no he tenido que añadir mas de un o, no debo poner ahora ningun o á continuacion de la coma; y así, veré quántas veces está contenido el 13 en 60: son 4, que pongo en el quociente despues de la coma; multiplico este quociente por el divisor, le resto del dividendo 60 y saco la resta 8. Á esta resta añado un o, veo que el 13 está contenido seis veces en 80, pongo 6 en el quociente, multiplico por el divisor, y resto del dividendo 80; al lado de la resta 2 pongo otro o, veo que el 13 en 20 está contenido una vez, pongo 1 en el quociente, multiplico por el divisor y resto; del mismo modo continuaria hasta sacar los guarismos decimales que quisiese; con lo qual tengo reducido el quebrado $\frac{6}{13}$ á quebrado decimal, aproxîmado hasta milésimas, esto es, que le falta para ser igual con el dado menos de una milésima parte de la unidad.

2.º exemplo. Si quiero reducir á quebrado decimal el $\frac{7}{832}$, executaré la operacion en esta forma:

```
 7000    | 832
 03440   |----------
  01120  | 0,008413
   02880 |
```

Tomaré el 7 por dividendo, el 832 por divisor, y como este no está contenido ninguna vez en 7, pongo inmediatamente en el quociente o y coma; veo quántos ceros necesito añadir al 7 paraque contenga alguna vez al 832, y son tres; los pongo, y despues de la coma pongo dos ceros, esto es, uno menos de los que he tenido que añadir al dividendo. Empiezo ahora la division diciendo: 832 en 7000 cabe ocho veces, pongo 8 en el quociente despues de los dos ceros, multiplico por el divisor y resto; á la resta le añado un o, y así continuaré la division hasta sacar los guarismos que necesite, que supongo aqui que son seis, y tengo el quebrado 0.008413, que es el mismo que el $\frac{7}{832}$ con diferencia de menos de una millonésima parte de la unidad.

La razon de porque se han de poner en general tantos ceros menos uno despues de la coma como se añadieron, es el que se ha de hacer que el quociente primero que salga ocupe un lugar despues de la coma, expresado por el número de ceros que se añadieron al dividendo; pues con esto se hace el quociente tantas veces menor como veces mayor se hizo el numerador del quebrado ó dividendo con añadirle los ceros; y como él ha de ocupar un lugar determinado, se sigue que los demas se han de llenar con ceros.

Quando se trata de reducir á quebrado decimal un quebrado comun concreto, esto es, que se refiere á una unidad determinada, se suele

poner por condicion que no se pierda tal ó tal parte de alguna de las partes alíquotas de la unidad primitiva. En este caso debemos manifestar quántos guarismos decimales se necesitan sacar; para lo qual se executará lo siguiente: *véase quántas veces está contenida en la unidad primitiva, aquella parte que no se quiere despreciar, y tantos como sean los guarismos con que se escriba este número, tantos guarismos decimales se deberán sacar.* Propongámonos, por exemplo, reducir á quebrado decimal este quebrado comun $\frac{5}{7}$ de doblon, sin que se llegue á perder medio maravedí; para esto observaré que teniendo el doblon 60 reales, y cada real 34 maravedíses, el doblon equivaldrá á 2040 maravedíses, ó á 4080 medios maravedíses; por consiguiente deberé sacar en el quebrado decimal lo menos quatro guarismos exâctos; y executándolo tendré $\frac{5}{7}$ de doblon $=0,7142$ de doblon.

137 Al reducir quebrados comunes á decimales, solo se hallará quociente exâcto quando el denominador no tenga otros factores que el 2 y el 5; pero quando no sale quociente exâcto, resulta al cabo de cierto tiempo que los guarismos del quociente se repiten otra vez los mismos, y á estas fracciones se les da el nombre de *fracciones periódicas.*

Si quisiera reducir á quebrados decimales los quebrados comunes $\frac{13}{25}$, $\frac{1}{16}$ y $\frac{6}{11}$, executaria las operaciones como aqui se ve:

(A)		(B)		(C)	
130	25	100	16	60	11
0050	———	0040	———	050	———
00	0,52	080	0,0625	060	0,545454 &c.
		00		050	
				060	

donde observo que de los dos primeros (*A*), (*B*) hallo quociente exâcto; porque los factores de sus denominadores son respectivamente 5×5 los del primero, y 2×2×2×2 los del segundo; y en el tercero (*C*) advierto que se van repitiendo los guarismos 54, y por lo mismo los podré poner tantas veces como quiera.

Debe salir por precision *quociente exâcto* quando los factores del denominador son 2 ó 5; porque con añadir un 0, se multiplica el numerador por 10, cuyos factores siendo 2 y 5, por cada cero que añadamos desaparece uno de los factores; y en el otro caso debe salir por precision *fraccion periódica*, porque la resta que resulta despues de hecha una division parcial siempre ha de ser menor que el divisor; y por consiguiente todas las restas que pueden resultar, solo son tantas menos una como unidades tenga el divisor. Así, despues de puestos en el quociente tantos guarismos menos uno como unidades tenga el divisor, la resta que resulta será una de las antecedentes, á la qual añadiendo 0, dará uno de los guarismos puestos en el quociente, y despues se irán repitiendo todos los guarismos que habia en el quociente, entre los dos que se repitan primero.

1.er exemp. Si quiero reducir el quebrado $\frac{2}{3}$ á decimal, advierto que como la resta ha de ser menor que el divisor 3, solo podrá ser 2 ó 1; y así, al sacar la tercera resta ya se ha de volver á repetir alguna de estas, por lo qual infiero que se volverán á repetir los guarismos del quociente; y executando la operacion como aqui se manifiesta:

Veo que el 3 cabe en 20, que es el dividendo despues de haber añadido un 0, seis veces y dexa 2 por resta, que es la misma que el dividendo; y así, añadiéndole un cero se convertirá en 20, y cabrá el 3 en él otras seis veces, y dexará la misma resta, y así en adelante; por lo qual pondré el 6 todas las veces que quiera.

20	3
20	0,66666 &c.
20	

2.º exemp. Si quiero reducir el $\frac{4}{7}$, lo primero que advierto es que lo menos al sexto guarismo ya se ha de repetir alguna resta; y executada la operacion como aqui se presenta:

Sale en efecto, al sexto guarismo la resta 4 que es la misma que el dividendo, y por consiguiente añadiéndole el cero volverá otra vez el divisor 7 á estar contenido cinco veces, luego 7, &c. de manera que se podrá poner á continuacion del quociente hallado 0,571428, tantas veces como se quiera el periodo 571428, y nos resultará:

0,571428571428571428571428 &c.

40	7
050	0,571428
010	
030	
020	
060	
04	

No siempre la primera resta que se repite es el numerador ó dividendo (lo qual sucede quando el denominador tiene entre sus factores algunos 2 ó 5), y entonces la fraccion en parte es periódica y en parte no.

1er exemp. Si quisiera reducir la fraccion $\frac{5}{12}$ á decimal, executando la operacion como aqui se ve:

Encuentro que se repite la resta que da 6 por quociente; y así, á continuacion del 0,416 podré poner las veces que quiera el 6: porque si á la resta 8 le añado 0, volverá á caber seis veces el divisor y dexará la misma resta; y así tendré la fraccion 0,416666 &c. que en parte es periódica y en parte no.

50	12
020	0,416666 &c.
080	
08	

2.º exemp. Si reduzco á decimal el quebrado $\frac{137}{275}$ sacaré 0,498181 &c.

138 Ahora, para resolver la qüestion inversa, á saber: *dada una fraccion decimal, hallar el quebrado comun de donde provino*, observaremos que pueden ocurrir tres casos: 1.º que la fraccion decimal no sea periódica; 2.º que lo sea; y 3.º que en parte sea periódica y en parte no.

Quando no es periódica la fraccion decimal, *se pone en forma de quebrado comun, poniendo por numerador los guarismos significativos, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay, y despues se simplifica si se puede.*

1.er exemp. He visto (137) que el quebrado decimal 0,52 ha prove-

nido del comun $\frac{13}{25}$; si quiero venir en conocimiento de este por medio de aquel, le pondré por numerador los guarismos significativos del 0,52, y por denominador la unidad seguida de dos ceros, porque hay dos guarismos decimales; con lo qual tengo el quebrado $\frac{52}{100}$, que despues de simplificado dividiendo sus dos términos dos veces de seguida por 2, se convierte en $\frac{13}{25}$, que es el mismo que produxo al 0,52.

2.º exem. Si quisiera averiguar de donde provenia el quebrado 0,367, diria que era de $\frac{367}{1000}$ que no se puede simplificar.

139 Ahora, para dirigirnos á resolver el segundo caso, es necesario que demostremos el siguiente:

Teor. *Si el denominador de un quebrado es 9, 99, 999, &c. ó en general todos sus guarismos son 9, la fraccion decimal que resulte será periódica; el periodo se compondrá de tantos guarismos como nueves hay en el denominador, y estos guarismos serán los que hay en el numerador.*

Expl. Si tenemos, por exemplo, el quebrado comun $\frac{53}{99}$, voy á demostrar que la fraccion periódica que resulta es 0,5353 &c. y que si tubiese $\frac{53}{999}$, la que resultase seria 0,053053 &c.

Dem. Esto quedará demostrado si manifestamos, que en el primer caso los dos primeros guarismos que sacamos son el 5 y el 3, y que debe quedar una resta igual con el numerador, la qual daria por lo mismo otros dos guarismos iguales, y así sucesivamente; y en el segundo caso, si demostramos que los tres primeros guarismos son 0,5 y 3, quedando el mismo 53 por resta.

En el primero, para sacar dos guarismos deberemos añadir (136) dos ceros á su numerador, de manera que el quebrado se convertirá en $\frac{5300}{99}$; pero añadir dos ceros es multiplicar por 100, luego esto será igual á $\frac{53.100}{99}$; pero $100=99+1$, luego el numerador de esta expresion le podremos poner baxo esta forma: $53\times99+53\times1=53\times99+53$.

Pero al hacer la division de la primera parte dará por quociente el 53, y como la otra parte que es 53 no se puede dividir por 99, quedará esta resta; y por lo mismo los guarismos se repetirán de aqui en adelante.

En el 2.º caso para sacar tres guarismos deberemos añadir tres ceros al numerador, ó multiplicar por 1000; luego tendremos que se nos convertirá en $53000=53\times1000=53\times(999+1)=53\times999+53$; ahora, la primera parte es divisible por el denominador 999, y da por quociente 53; pero como estas 53 deben ser milésimas, debe haber antes un cero, luego serán 053 los tres primeros guarismos; y como queda la misma restá 53, se irán repitiendo los mismos periodos, y será $\frac{53}{999}=0,053053053$&c.

Hemos dicho que los guarismos del periodo son los mismos que los que tiene el numerador, porque aunque no haya tantos como en el denominador, se pueden concebir hácia la izquierda tantos ceros como se deseen.

140 Esc. *Quando despues de los nueves del denominador hay ceros, resultan en el quebrado decimal antes de empezar el periodo, tantos ceros*

como hay en el denominador despues de los nueves. Así, si tubiésemos $\frac{53}{9900}$, resultaria 0,005353 &c. y de $\frac{53}{99000}$ sacaria 0,0005353 &c. Esto se verifica así porque entonces deberíamos añadir al numerador, ademas de los ceros regulares para sacar tantos guarismos como nueves hay en el denominador, tantos mas quantos ceros hay despues de los nueves, paraque resulten los guarismos que se deseen; luego en este caso deberá haber este mismo número de ceros antes de empezar el periodo.

141 Entendido esto, para hallar el quebrado de donde proviene una fraccion periódica dada, *se pondrá por numerador el periodo; y por denominador tantos nueves como guarismos tiene el periodo. Si antes de empezar el periodo hubiese ceros, se pondrán en el denominador despues de los nueves tantos ceros como habia entre la coma y el periodo, y luego se simplifica si se puede.*

1.er exemplo. Si quiero averiguar el quebrado de donde proviene el 0,666 &c., pondré el 6 por numerador, y por denominador un 9, porque aqui el periodo se compone de un guarismo, y tendré $\frac{6}{9}$; que despues de simplificado se convierte en $\frac{2}{3}$, que es en efecto (137) el que produxo al 0,666 &c.

2.º exem. Si quiero hallar el quebrado de donde proviene el 0,5454&c. encontraré que es del $\frac{54}{99}$; que despues de simplificado, dividiendo dos veces sus dos términos por 3, se convierte en $\frac{6}{11}$, que es en efecto el que produxo al 0,545454 &c.

3.er exemp. Si tubiera la fraccion 0,05151 &c. diria que habia provenido de $\frac{51}{990}$, ó despues de simplificado de $\frac{17}{330}$.

142 Quando la fraccion es en parte periódica y en parte no, se halla la fraccion comun de donde provino, *multiplicando el número que componen los guarismos no periódicos por un número que conste de tantos nueves seguidos, como guarismos tenga el periodo; á este producto se añaden los guarismos que forman el periodo, y la suma que resulte es el numerador del quebrado que se busca. El denominador se compone de tantos nueves seguidos como guarismos tiene el periodo, y despues de los nueves tantos ceros como guarismos no periódicos habia. Despues se simplifica todo lo que se puede.*

1.er ex. Si quiero averiguar de donde proviene la fraccion 0,41666 &c. como aqui el periodo se compone de un solo guarismo, multiplicaré el número 41 que es el que se compone de los guarismos no periódicos por un 9, y al producto 369 le añadiré el periodo que es 6, y tendré por numerador del quebrado que busco 375. El denominador se compondrá de un solo 9, porque el periodo es de un solo guarismo, pero acompañado de dos ceros, porque hay dos guarismos no periódicos; y así tengo el quebrado $\frac{375}{900}$, que despues de simplificado se convierte en $\frac{5}{12}$, que es en efecto (137) el que produxo al 0,41666 &c.

2.º ex. Si quiero averiguar de donde proviene la fraccion 0,498181 &c. multiplicaré 49 por 99, al producto 4851 añadiré 81, y á la suma 4932

le pondré por denominador 9900, y tendré el quebrado $\frac{4932}{9900}$; que despues de simplificado se convierte en $\frac{137}{275}$, que es en efecto el que produce al 0,4981818I &c.

Esto se funda en que podemos descomponer, en este caso, en dos partes la fraccion propuesta: una la que no es periódica, y la otra la que lo es; v. g.: la 0,41666 &c. la descompondremos en 0,41+0,00666 &c. Hallaremos separadamente el quebrado de que proviene cada una, y tendremos: $0,41+0,00666\ \&c.=\frac{41}{100}+\frac{6}{900}=\frac{41}{100}+\frac{6}{9\times 100}=$

$\frac{41\times 9}{100\times 9}+\frac{6}{9\times 100}=\frac{41\times 9+6}{900}$; lo que suministra la regla dada.

De las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir decimales, ya vayan acompañadas de enteros, ya vayan solas; y de la valuacion de estos quebrados.

143 Como las decimales siguen la misma ley que los números enteros, resulta que las reglas por cuyo medio se executan las operaciones, son las mismas ya vayan acompañadas de enteros, ya vayan solas; y por lo mismo en los datos de las operaciones que vamos á executar entrarán ó no entrarán enteros indistintamente.

Para sumar las decimales *se ponen todos los sumandos los unos debaxo de los otros, de modo que se correspondan las décimas debaxo de las décimas, las centésimas debaxo de las centésimas, &c. esto es, que la coma en todos los sumandos forme columna; y despues empezando de derecha á izquierda, se suman exâctamente como si fuesen enteros, teniendo cuidado de poner la coma en la suma, de modo que forme columna con las de los sumandos.*

1.er exemp. Quiero sumar 8,32 con 0,7325, con 15,07, con 0,0083 y con 3,2. Pondré estos sumandos los unos debaxo de los otros, de modo que la coma esté en columna como aqui se ve:

```
 8,32
 0,7325
15,07
 0,0083
 3,2
---------
27,3308
```

Y despues de tirada la raya, empiezo por la derecha diciendo: 5 y 3 son 8, pongo 8 debaxo de la raya, y paso á la columna siguiente donde digo: 2 y 8 son 10, pongo 0 y llevo 1 para añadirla á la suma de la columna siguiente, en la que diré: 2 y 1 que llevaba son 3, y 3 son 6, y 7 son 13, pongo 3 y llevo 1; sigo: 3 y 1 que llevaba son 4, y 7 son 11, y 2 son 13, pongo 3 y llevo 1. Como aqui hallo la columna de las comas, pongo la coma paraque no se me olvide antes de pasar á sumar los enteros, y despues de puesta digo: 8 y 1 que llevaba son 9, y 5 son 14, y 3 son 17, pongo 7 y llevo 1; 1 y 1 que llevo son 2, y de 2 no llevo nada: con lo que saco la suma 27,3308.

2.° exem. Si quiero sumar 47,2356 con 128,035793, con 439,5128,

con 0,072, con 0,83, con 9,5 y con 15,732, executaré la operacion como he dicho y aqui se ve:

El fundamento de esta regla es que como haciendo la colocacion dicha y sumando en columna, sumamos todas las unidades de una misma especie, y todas las sumas parciales las reunimos en una sola al mismo tiempo que las vamos sacando, resulta que en esta tenemos la suma total.

47,2356
128,035795
439,5128
0,072
0,83
9,5
15,732
640,918193

144 Para restarlas *se executa lo mismo que con los enteros*; *así es que se pone el subtraendo debaxo del minuendo*, *de modo que se correspondan las unidades de cada especie*, *esto es*, *que la coma del subtraendo corresponda debaxo de la del minuendo*; *se tira una raya*, *y se resta como en los números enteros.*

Aqui puede ocurrir que no tengan un mismo número de guarismos decimales el minuendo y subtraendo; si el subtraendo tiene menos guarismos decimales que el minuendo, lo primero que se hace es poner aquellos guarismos que tiene demas el minuendo, y luego se restan los del subtraendo de los que quedan en el minuendo, teniendo cuidado de poner la coma en la resta de modo que forme columna con las del minuendo y subtraendo; si el minuendo tiene menos que el subtraendo, se resta el último guarismo del subtraendo de 10, y todos los demas de 9, hasta llegar al primer guarismo del minuendo, el qual se considera con una unidad menos.

1.er exemp. Quiero restar de 15,378 el número 3,625, pondré el subtraendo 3,625 debaxo del minuendo como he dicho y aqui se ve (*A*):

(*A*)	(*B*)	(*C*)
15,378	49,38753	45,32
3,625	27,052	36,213574
11,753	22,33553	09,106426

Y despues de tirada la raya, como tienen un mismo número de guarismos decimales, diré: de 5 á 8 van 3 que pongo debaxo; de 2 á 7 van 5; de 6 á 13 van 7; pongo ahora la coma y continúo diciendo: de 13 llevo 1; 3 y 1 que llevaba son 4, de 4 á 5 va 1; y de nada á 1 va 1; con lo que saco la resta 11,753.

2.º exemplo. Si de 49,38753 quisiera restar 27,052 los colocaria como se ve en (*B*).

Y como el subtraendo tiene menos guarismos decimales que el minuendo, pongo debaxo de la raya los dos guarismos 53 del minuendo, que no tienen correspondientes en el subtraendo, y despues resto diciendo: de 2 á 7 van 5; de 5 á 8 van 3; de 0 á 3 van 3; de 7 á 9 van 2; de 2 á 4 van 2; y colocando al mismo tiempo estos guarismos y la coma en sus lugares respectivos, hallo que la resta es 22,33553.

3.er exemp. Si de 45,32 quisiera restar 36,213574, pondria el subtraendo debaxo del minuendo como se ve en (*C*).

Tiraria la raya, y como el subtraendo tiene mas guarismos que el minuendo, diria : de 4 á 10 van 6 que pongo; de 7 á 9 van 2; de 5 á 9 van 4; de 3 á 9 van 6; ahora debo considerar al 2 del minuendo con una unidad menos, y diré : de 1 á 1 no va nada; de 2 á 3 va 1; de 6 á 15 van 9, y de 15 llevo 1; 3 y 1 que llevaba son 4, de 4 á 4 va 0; y saco la resta 9,106426.

En los dos primeros casos no tiene nada que demostrar la regla; en el tercero es porque se pueden considerar despues de los guarismos decimales, los ceros que se deseen sin alterar su valor, y queda reducida la operacion á la expuesta (48).

145 Para multiplicar las decimales *no se hace caso de la coma, se multiplican como si fuesen números enteros, y luego en el producto se separan con la coma tantos guarismos de derecha á izquierda como habia en ambos factores juntos; y sino hubiese bastantes se añadirán á la izquierda los ceros que se necesiten.*

1.er exemplo. Quiero multiplicar 3,74 por 5,8; tomaré por multiplicador, segun dixe en la multiplicacion de los enteros el 5,8 por tener menos guarismos, y le pondré debaxo del multiplicando como sino tubiese la coma; de modo que no importa nada el que la coma no forme columna, como aqui se ve (*A*).

(*A*)	(*B*)	(*C*)	(*D*)
3,74	0,46	0,37	27,326
5,8	0,5	0,2	45,3
2992	0,230	0,074	81978
1870			136630
21,692			109304
			1237,8678

Despues de tirada la raya multiplicaré el 3,74 por el 8, sin hacer caso de la coma, y saco por producto parcial 2992 que pongo debaxo de la raya; multiplico despues por 5, y coloco el producto parcial 1870 un lugar mas hácia la izquierda respecto del primero; tiro despues una raya y sumo estos dos productos parciales; y separando en la suma 21692 tres guarismos con la coma de derecha á izquierda, que son los guarismos decimales que habia en ambos factores juntos, saco el producto total 21,692.

2.º exemp. Si quiero multiplicar 0,46 por 0,5, executaré la operacion como se ve en (*B*).

Multiplicaré el 46 por 5, lo que me da el producto 230; y como en este producto debo separar tres guarismos con la coma, que son los que hay en ambos factores juntos, pondré antes un cero y tendré 0.230; pero como los ceros despues de los guarismos decimales no les aumentan

ni les disminuyen (134), borraré el 0 que hay despues del 3, y diré que el producto es 0,23.

3.^{er} exemplo. Si quiero multiplicar 0,37 por 0,2, executaré la operacion como se ve en (*C*).

Multiplicaré el 37 por 2, y como el producto 74 no tiene mas de dos guarismos, y debo separar tres con la coma, supliré con ceros los guarismos que me falten, y tendré el producto 0,074.

4.^{o} exemplo. Si quiero multiplicar 27,326 por 45,3, executaré la operacion como se ve en (*D*) y saco el producto 1237,8678.

La razon de porque se han de separar tantos guarismos en el producto como hay en ambos factores juntos, es porque con suprimir la coma en el multiplicando le hacemos tantas veces mayor, como expresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos habia en él; con suprimirla en el multiplicador le hacemos tantas veces mayor, como expresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hay en él; luego (87) el producto nos debe salir tantas veces mayor como expresa el producto de estos dos números; luego para obtener el verdadero le debemos hacer este mismo número de veces menor, lo que se consigue separando con la coma tantos guarismos como hay en ambos factores juntos.

146 De lo que hemos dicho (135) se deduce que un número que lleva enteros y decimales ó decimales solas, se multiplica por 10, *corriendo la coma un lugar hácia la derecha*; por 100, *corriéndola dos*; por 1000, *corriéndola tres*; y en general, para multiplicar por la unidad seguida de cierto número de ceros, *no hay mas que correr la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros hay despues de la unidad.* Si hubiese tantos ceros como guarismos decimales, quedaria hecha la multiplicacion con quitar la coma; y si hubiese menos guarismos decimales que ceros despues de la unidad, seria necesario borrar la coma y añadir tantos ceros como haya de diferencia entre el número de ceros que siguen á la unidad y los guarismos decimales. V. g. si quisiera multiplicar el número 43,52367 por 100, el producto seria 4352,367; si le hubiera querido multiplicar por 10000, el producto seria 435236,7; si le hubiera querido multiplicar por 100000, el producto seria 4352367; y finalmente si le hubiera querido multiplicar por 10000000, el producto hubiera sido 435236700.

147 En la práctica ocurre con mucha freqüencia el tener que multiplicar un número compuesto de muchas figuras decimales por otro; y segun el método que se sigue en la multiplicacion, los guarismos que se van sacando son los últimos; pero como nosotros en los resultados segun su mayor ó menor importancia, buscamos mas ó menos guarismos exactos, muchas veces queremos encontrarlos sin necesidad de hallar los que vienen despues: por esta causa se ha procurado abreviar esta operacion del modo siguiente.

En primer lugar executaremos una multiplicacion: y será por exemplo la de 53,25261 por 3,2945, donde nosotros á primera vista conocemos que el producto ha de contener nueve guarismos decimales; y si suponemos que no tengamos necesidad sino de tres exâctos, veremos el tiempo que nos ahorra la abreviacion. Más primero executemos la operacion con extension empezando por el guarismo de especie superior en esta forma:

53,252	61
3,29	45
159757	83
10650	522
4792	7349
213	01044
26	626305
175,440	723645

Y como no queríamos hallar sino tres guarismos exâctos, si separamos los demas con una raya que vaya de abaxo arriba, y separamos en los productos parciales los guarismos correspondientes; veremos que si se tubiera un medio para omitir la execucion de lo que hay á la derecha de la raya, nos ahorraríamos todo este tiempo, lo qual se consigue poniendo en práctica esta regla.

Véase qual es el guarismo de especie superior del multiplicador; si está en el lugar de las unidades, tómense en el multiplicando tantos guarismos decimales como se quieran en el producto, separando los demas con una raya si hay mas, ó añadiendo los ceros que se necesiten si hay menos. Si este guarismo se halla á la derecha de la coma, véase qué lugar ocupa despues de ella; el número que expresa este lugar se restará del que expresa los guarismos que se quieren sacar; y se tomarán en el multiplicando tantos guarismos como unidades tenga dicha resta, separando los otros con una raya si hay mas, ó añadiendo ceros si hay menos. Si dicho guarismo se halla á la izquierda de las unidades se verá qué lugar ocupa despues de ellas; el número que exprese este lugar se sumará con el que expresa los guarismos que se quieren sacar; y se tomarán en el multiplicando tantos guarismos como unidades tenga esta suma, separando los otros si hay mas, ó añadiendo ceros si hay menos. Hecha ya esta separacion, multiplíquese todo lo que queda del multiplicando á la izquierda de la raya por dicho guarismo de especie superior del multiplicador; póngase un punto sobre el último guarismo del multiplicando, y otro debaxo del del multiplicador; pásese á multiplicar todo el multiplicando, menos el guarismo apuntado, por el segundo guarismo del multiplicador, y su producto póngase debaxo del anterior, de manera que se correspondan en columna los últimos guarismos. Apúntese igualmente el último guarismo del multiplicando que hemos considerado con un punto, y el del multiplicador por qué hemos multiplicado; multiplíquese por el siguiente guarismo, y colóquese el producto debaxo de los anteriores sin correrle ningun lugar: y continúese del mismo modo hasta que no haya mas guarismos que apuntar en el multiplicando ó multiplicador; despues se suma todo esto, y en la suma se separan tantos guarismos como se quiera que resultasen en el producto.

Esc. *Al executar esta operacion conviene multiplicar por el último ó dos últimos guarismos apuntados, con el objeto de saber las que se llevan para añadirlas al producto del primer guarismo del multiplicando; pero á pesar de esto conviene hacer la operacion como si quisiéramos hallar un guarismo ó dos guarismos mas en operaciones bastante grandes.*

Así, para executar la operacion anterior abreviadamente, colocarémos el multiplicador debaxo del multiplicando de qualquier modo, pero es mas cómodo hacerlo de modo que se corresponda en columna la coma; y como el guarismo de especie superior del multiplicador expresa unidades, se deberán tomar en el multiplicando quatro guarismos, si queremos que en el producto no salgan mas de tres exâctos: y así, separarémos los demas con una raya como aquí se presenta:

```
     . . . . .
   5 3,2 5 2 6|1
     3,2 9 4 5
     . . . . .
  ---------------
 1 5 9 7 5 7 8
   1 0 6 5 0 5
     4 7 9 2 7
       2 1 3 0
         2 6 6
  ---------------
   1 7 5,4 4 0 6
```

Empezaré la multiplicacion diciendo: 3 por 1 (para saber las que llevo) son 3, y de 3 no llevo nada para añadir al producto del 6 por el 3, y diré: 6 por 3 son 18, y llevo 1; 3 por 2 son 6, y 1 que llevaba son 7, &c.; pongo un punto sobre el 6 del multiplicando y debaxo del 3 del multiplicador, y paso á multiplicar lo demas por el 2 del multiplicador, diciendo antes: 2 por 6 son 12, y de 12 llevo 1; 2 por 2 son 4, y 1 que llevaba son 5, que pongo y continúo del mismo modo; despues apunto el 2 de arriba y el 2 de abaxo, y paso á multiplicar por el 9 diciendo: 6 por 9 son 54, y de 54 llevo 5; 2 por 9 son 18, y 5 que llevaba son 23, y de 23 llevo 2 para añadirlas al producto 45 de 5 por 9, y será 47, pondré el 7 y llevo 4; 2 por 9 son 18, y 4 que llevaba son 22, &c.; paso á multiplicar por el 4, diciendo: 5 por 4 son 20, y de 20 llevo 2; 2 por 4 son 8, y 2 que llevaba son 10, &c.; paso á multiplicar por el 5, diciendo: 2 por 5 son 10, y de 10 llevo 1; 3 por 5 son 15, y 1 que llevaba son 16, pongo 6, y de 16 llevo 1; 5 por 5 son 25, y 1 que llevaba son 26 que pongo. Lo sumo todo, en la suma separo con la coma quatro guarismos, y tendré executada la operacion; donde se ve que tenemos sacados exâctos los tres guarismos decimales que nos proponíamos.

Si quisiera multiplicar 5.6421768 por 0,00456837214, sacando seis guarismos exâctos, haria la operacion como para sacar siete; y como aquí el guarismo de especie superior del multiplicador ocupa el tercer lugar despues de la coma, diremos: de 3 á 7, que expresa los guarismos que quiero sacar, van 4, y por lo mismo deberemos tomar quatro guarismos en el multiplicando: hecho lo qual procederemos como se ve en (*f*).

Y como en la suma solo hay seis guarismos, y debo separar siete, supliré con un cero el que falta.

Supongamos ahora que se quiera multiplicar 25832.52742 por el número 324.72659347, como en este caso el primer guarismo del multi-

```
          (A)                               (B)

5,6 4 2 1|7 6 8                2 5 8 3 2,5 2 7 4 2 0 0 0
0,0 0 4 5 6 8 3 7 2 1 4            3 2 4 7 2 6 5 9 3 4 7
-----------------------        ---------------------------
  2 2 5 6 8 7                  7 7 4 9 7 5 8 2 2 6 0 0 0
    2 8 2 1 0                    5 1 6 6 5 0 5 4 8 4 0 0
      3 3 8 5                    1 0 3 3 3 0 1 0 9 6 8 0
        4 5 1                      1 8 0 8 2 7 6 9 1 9 4
          1 6                        5 1 6 6 5 0 5 4 8
            3                        1 5 4 9 9 5 1 6 4
-----------------------                1 2 9 1 6 2 6 3
0,0 2 5 7 7 5 2                          2 3 2 4 9 2 7
                                             7 7 4 9 7
                                             1 0 3 3 3
                                               1 8 0 8
                               ---------------------------
                               8 3 8 8 5 0 8,6 2 9 8 1 4
```

plicador ocupa el segundo lugar hácia izquierda de las unidades, si quiero sacar quatro guarismos exàctos, haré la operacion como si quisiera sacar seis, porque esta es complicada, y diré: 2 (lugar que ocupa el guarismo del multiplicador por donde empieza la multiplicacion) y 6 (número de guarismos que quiero sacar) son 8; y estos serán los guarismos decimales que debo tomar en el multiplicando: pero como él no contiene sino cinco, deberé añadir tres ceros, y executaré la operacion como se vè en (*B*).

Entendida ya bien la regla, vamos á manifestar el fundamento de ella, contrayéndonos al primer exemplo; en el qual, como nos proponíamos hallar solo quatro guarismos decimales, y el de especie superior del multiplicador tenia unidades, y las unidades paraque el producto ocupe el quarto lugar decimal se deben multiplicar por un guarismo que se halle en el quarto lugar, resulta que por eso suprimimos los demas, porque nos darian un producto que se deberia colocar en el quinto guarismo; pero como de este producto podria resultar alguna unidad para el lugar inmediato, hemos aconsejado que en la multiplicacion se cuente con él. En el segundo exemplo nos proponíamos sacar siete: y como el primer guarismo 4 del multiplicador ocupa el tercer lugar decimal, debe multiplicarse por el quarto decimal del multiplicando para dar siete en el producto. En el tercer caso como el guarismo del multiplicador por donde empezaba la multiplicacion expresaba centenas, y las centenas para producir unidades que se hallen en el sexto lugar decimal, se deben multiplicar por un guarismo que se halle en el lugar octavo, se debe buscar dicho guarismo. Ahora se suprime un guarismo en el multiplicando en cada multiplicacion parcial, porque como el gua-

rismo del multiplicador por qué se va á executar la operacion es diez veces menor que el anterior, paraque el producto resulte en el mismo lugar que el precedente, se debe multiplicar por un guarismo que sea diez veces mayor que el del multiplicando anterior, esto es, por el que está á la izquierda del último de dicho multiplicando; y por lo mismo este se debe apuntar, y el del multiplicador tambien paraque no se olvide.

Esta abreviacion conforme la hemos presentado nos parece mas natural y sencilla que la que se atribuye á Ougtred, de que hacen uso algunos autores, y consiste en escribir el multiplicador en un órden inverso.

148 Para dividir las decimales *se añaden al dividendo ó divisor tantos ceros como se necesiten paraque en ambos haya un mismo número de guarismos decimales; entonces se borra la coma y se executa la division como la de los enteros, sin tener que hacer nada con el quociente. Despues, si la division no sale exàcta, aquella resta que se habia de poner al lado del quociente en forma de quebrado, se convierte en quebrado decimal*; esto es, luego que se ha baxado el último guarismo se añade á la resta un cero, é inmediatamente se pone la coma en el quociente; se ve quántas veces cabe el divisor en esta resta, se pone en el quociente despues de la coma este número de veces, ó cero sino cabe ninguna vez; se multiplica por el divisor y se resta; á la resta se le añade otro cero, se ve quántas veces está contenido el divisor; y así se continúa hasta haber sacado los guarismos decimales que se quieran.

1.er exemplo. Quiero dividir 0,5 por 0,125; añadiré al dividendo 0,5 dos ceros y se convertirá en 0,500; despues borro la coma en el dividendo y divisor, y queda reducida la operacion á dividir 500 por 125, lo que executado como se ve en (*A*):

```
  (A)              (B)                              (C)
500 | 125    2400  | 725           24632,5 | 7000
000 |----    02250 |--------       03632 5 |------------------
    |  4      00750  3,31034        0132 5   35,189285714285714 &.
               02500                 062 5
                03250                 06 5
                 0350                  0 20
                                         060
                                          040
                                           050
                                            010
                                             030
                                              020
```

Da 4 por quociente, y digo que el 0,125 está contenido en 0,5 quatro veces.

2.º exemplo. Si quiero dividir 24 por 7,25, como el dividendo no tiene ningun guarismo decimal le debo añadir dos ceros: y borrando la

coma en el divisor queda reducida la operacion á dividir 2400 por 725, la que executada como se presenta en (B):

Da 3 por quociente y dexa 225 por resta, la qual en vez de ponerla al lado del quociente 3 con la raya y el divisor debaxo, la reduciré á decimales añadiéndole un cero, poniendo la coma despues del 3, y continuando la division; para esto veo que el 725 está contenido tres veces en 2250, pongo este 3 despues de la coma; multiplico por el divisor y resto; á la resta 75 añado otro cero, veo que está contenido una vez el divisor, pongo 1 en el quociente; y así continúo hasta sacar los guarismos decimales que desee, que aqui supongo son cinco.

3.er exemplo. Si quisiera dividir 246,325 por 7, añadiria al divisor 7 tres ceros, porque no teniendo ningun guarismo decimal, le faltan tres para tener los que el dividendo; borro despues la coma en el dividendo, y queda reducida la operacion á dividir 246325 por 7000, y executada la operacion como se ve en (C): saco el quociente 35; y en vez de poner la resta 1325 á la derecha del quociente con la raya y el divisor debaxo, le deberé añadir un cero y poner la coma en el quociente; pero quando el divisor acaba en ceros, en vez de añadir un cero á la resta, se borrará uno en el divisor; y así, borraré un cero en el divisor, pondré la coma en el quociente, y averiguaré quántas veces el 700 está contenido en 1325, hallo que cabe una vez; pongo 1 en el quociente despues de la coma, multiplico por el divisor y resto; borro otro cero en el divisor, y se convierte en 70, veo que está contenido ocho veces en 625, pongo 8 en el quociente, multiplico y resto; borro otro cero en el divisor, y se me convierte en 7, hallo que está contenido nueve veces en 65, pongo 9 en el quociente, multiplico y resto; y como ya no hay mas ceros en el divisor que poder borrar, añado á la resta 2 un cero, veo que en 20 está contenido dos veces el 7, pongo 2 en el quociente, multiplico y resto; y así continúo hasta sacar los guarismos que quiera; y advierto que desde el décimo guarismo decimal se empiezan otra vez á repetir, saliendo una fraccion, que en parte es periódica y en parte no.

Para manifestar el fundamento de esta regla, solo observarémos que con añadir los ceros que se necesiten al término que tiene menos guarismos, no alteramos de ningun modo su valor (134); y con suprimir la coma en los dos términos, los multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hay, lo que no altera el valor del quociente (93).

149 Tambien se presenta aqui abreviacion quando el divisor es la unidad seguida de ceros; porque en este caso como está reducida la operacion á hacer al número 10, 100 &c. veces menor, lo que se consigue en virtud de lo dicho (135), estableceremos en general *que para dividir un número qualquiera que contenga decimales por la unidad seguida de un cierto número de ceros, no hay mas que correr la coma tantos lugares hácia la izquierda como ceros hay despues de la unidad; y sino*

hay bastantes guarismos hácia la izquierda de la coma, se suplen con ceros.

Por exemplo: si quiero dividir por 100 el número 452,3, ó lo que es lo mismo, si le quiero hacer cien veces menor, correré la coma dos lugares hácia la izquierda, y tendré 4,523; si le quisiera haber dividido por 1000 la hubiera corrido tres, y tendria 0,4523; y si le hubiera querido dividir por 100000 la hubiera corrido cinco lugares en esta forma 0,004523. Si el número no tubiese decimales se separarian con la coma tantos guarismos como ceros hubiese despues de la unidad; y así dividiendo por 100 el número 585 tendré 5,85; y dividiéndole por 10000 tendré 0,0585.

150 Tambien es susceptible la division de las decimales de una abreviacion análoga á la de la multiplicacion, y consiste en ir disminuyendo ó suprimiendo un guarismo en el divisor á cada division parcial. Por exemplo: si quisiera dividir 58,326432 por 3,257243, empezaria executando la operacion como aquí se ve (*A*):

```
          (A)                                         (B)

               . .....                                    . ......
 5832643,2 | 3 257243           85232794,0      | 52 743029
 2575400 2 |-----------         32489765 0      |--------------
 0295330 1 | 17,906688          00843947 60     | 16,1600112121
  002178 3                        316517 310
     224 0                        000059 1360
      28 6                            06 3930
       2 6                             1 1187
                                       0 0639
                                          112
                                          007
                                            2
```

Donde advertimos despues de sacado el quociente entero, que si queremos el quociente total con seis guarismos, le podremos hallar suprimiendo ó señalando con un punto encima un guarismo en el divisor, en vez de añadir un cero en el dividendo; esta operacion hace que el divisor sea algo menor, y por consiguiente el quociente deberá ser algo mayor; pero como el error está en el séptimo guarismo del divisor, resultará tambien que el error se originará en el séptimo del quociente; luego hallaremos los seis exâctos. Despues se executa la division diciendo: 3 en 29 cabe nueve veces, se pone 9 en el quociente á la derecha de la coma, y al hacer la multiplicacion se multiplica tambien por el guarismo apuntado para ver si se lleva algo, y añadirlo al producto del primero por que se ha de hacer la multiplicacion efectiva; despues se va suprimiendo otro guarismo, &c.

Si se quisieran sacar mas guarismos exâctos que los que tiene el divisor menos uno, entonces se sacarán añadiendo á la resta tantos ceros

como exprese la diferencia entre los que queremos sacar exâctos, y los que hay en el divisor menos uno, y despues se sacarian los demas suprimiendo guarismos en el divisor. Por exemplo: si quisiera sacar con diez guarismos exâctos el quociente de 852,32794 por 52,743029, executaria la operacion como se ve en (*B*): siguiéndola por el método regular sacaria tres guarismos exâctos, y despues seria quando empezaria á suprimir ó apuntar los guarismos del divisor.

151 Como en los quebrados decimales hace la coma los oficios de divisor ó denominador, resulta que para valuarlos *se multiplican por el número que expresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado. Si hay unidades de especie inferior todavía, se vuelve á multiplicar el quebrado que resulte por el número de veces que la unidad en que se quiere valuar ahora este quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado. Así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior; y si al fin queda quebrado se desprecia sino llega á cinco décimas, y se añade en vez de él una unidad si llega ó pasa de cinco décimas.*

1.er exemp. Si quiero averiguar quánto valen 0,37 de doblon, multiplicaré (*A*) el 0,37 por 4 que son los pesos que tiene un doblon, y saco un peso y 0,48 de peso; que para reducirlo á reales multiplico el 0,48 por 15 que son los reales que tiene el peso. Para esto coloco el 15 debaxo del primer producto 1,48; pero no multiplicaré el entero 1, y saco 7,20, en el qual borraré el 0 y multiplicaré por 34 las dos décimas, y saco 6,8, esto es, 6 maravedíses y 8 décimas de maravedí; pero como 8 décimas es mayor que 5, diré que son 7 maravedíses; y las 0,37 de doblon valdrán 1 peso, 7 reales y 7 maravedíses.

(*A*)	(*B*)	(*C*)
0,37 de doblon.	0,3251 de vara.	0,7432 de quintal.
4	3	4
1,48 pesos.	0,9753 pies.	2,9728 arrobas.
15	12	25
240	19506	48640
48	9753	19456
7,2~~0~~ reales.	11,7036 pulgadas.	24,32~~00~~ libras.
34	12	16
6,8 maravedíses.	14072	192
	7036	5,12 onzas.
	8,4432 lineas.	16
		72
		1,92 adarmes.

2.º exem. Si quisiera averiguar quánto valian 0,3251 de vara, haria la operacion como se ve en (*B*): y hallaria 0 pies, 11 pulgadas y 8 lineas.

3.er exemp. Si quisiera averiguar quánto valian 0,7432 de quintal, executaria la operacion como se ve en (*C*): y sacaria 2 arrobas, 24 libras, 5 onzas y 2 adarmes, porque en lugar de las 92 centésimas se debe tomar una unidad mas.

En el párrafo (136) nos propusimos reducir á quebrado decimal el $\frac{5}{7}$ de doblon sin que se perdiera medio maravedí, y obtuvimos 0,7142; si queremos ahora averiguar si en efecto conseguímos nuestro intento, le valuaremos, y executándolo hallaremos que sale 2 pesos, 12 reales y 28,968 maravedíses; cuyo resultado comparado con el que obtuvimos (128), vemos que no se diferencia en medio maravedí.

De las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.

152 Se da el nombre de *números complexos ó denominados, á aquellos que constan de unidades de diferentes especies relativas todas á un mismo género*: como 7 varas, 2 pies, 5 pulgadas y 8 lineas, y 6 quintales, 2 arrobas y 7 libras. Es indispensable que todas las unidades se refieran á un mismo género; así, 8 pesos y 5 varas no componen un número denominado; porque las unidades no se refieren á un mismo género ó clase como de peso, de medida, de moneda, &c.

Aunque nosotros hemos puesto la division y subdivision de las unidades de pesos y medidas muy desde el principio, porque era indispensable para las aplicaciones que teníamos que hacer de las demas operaciones, no obstante las volveremos aqui á poner con el objeto de presentarla en tablas, cuya inteligencia es muy importante porque se suelen presentar en las aplicaciones muchas de esta especie.

Medidas de longitud.

linea.				
12	pulgada.			
144	12	pie.		
432	36	3	vara.	
2880000	240000	20000	$6666\frac{2}{3}$	legua.

Medidas de áridos.

ochavillo.					
4	ochavo.				
16	4	quartillo.			
64	16	4	celemin.		
768	192	48	12	fanega.	
9216	2304	576	144	12	cahiz

Medidas de tiempo.

tercero.

60	segundo.			
3600	60	minuto.		
216000	3600	60	hora.	
5184000	86400	1440	24	dia.

Medidas de superficie ó agrarias.

pie quadrado.

9	vara quadrada.				
144	16	estadal quadrado.			
1728	192	12	quart. de tierra		
6912	768	48	4	celemin.	
82944	9216	576	48	12	fanega.

De peso.

grano.

12	tomin.					
36	3	adarme.				
576	48	16	onza.			
9216	768	256	16	libra.		
230400	19200	6400	400	25	arroba.	
921600	76800	25600	1600	100	4	quintal.

De moneda.

maravedí.

34	real.		
510	15	peso.	
2040	60	4	doblon.

Estas tablas estan dispuestas de manera que empiezan por la unidad de especie inferior, y el número que está á la izquierda de cada clase de unidades manifiesta quantas unidades vale esta respecto de la que hay encima de la casilla donde se halla dicho número. Por exemplo: en la tabla de las unidades de peso, el 16 que hay inmediatamente á la izquierda de la palabra *libra*, manifiesta que la libra equivale á 16 onzas, que es el nombre que tiene encima; luego, á la izquierda del 16 hay 256, que indica que la libra equivale á 256 adarmes; y tambien á 768 tomines y á 9216 granos.

Cada nacion usa de diferente division y subdivision en sus unidades de

pesos y medidas; pero las que nos son de un conocimiento necesario son las de las naciones francesa é inglesa, tanto porque las de la primera han estado autorizadas en nuestra nacion por mucho tiempo, y los escritores ó traductores han caido lo tan poco sobre este punto, que hablan de pesos y medidas poniendo los resultados en medidas francesas como si fuesen españolas; como por las relaciones que debe haber entre nuestra nacion y la inglesa.

En efecto, por real órden de 25 de Julio de 1750 se mandó que todas las dimensiones de cañones, morteros, pedreros y sus montages, se expresasen siempre con arreglo á la vara de Castilla dividida en tres pies, cada pie en doce pulgadas, cada pulgada en doce lineas, y cada linea en doce puntos, en lugar de explicarse por la medida del pie de Rey que estaba en uso; y por otra de 22 de Julio de 1753 se previno que en las dependencias de guerra y marina se usase de la medida de la vara castellana del marco de Búrgos, dividida en pies, pulgadas y lineas, en lugar de la toesa y pie de Rey que habian estado en uso; pero posteriormente en 9 de Junio de 1760 se dixo de real órden: que atendida la confusion que causaba la novedad introducida de haberse cambiado en vara de Castilla el uso de la medida conocida con el nombre de toesa, queria S. M. que las escalas de planos y medidas militares de que se tratase en lo sucesivo, se arreglasen y explicasen por la toesa, restableciendo el uso de esta voz, y entendiendo la subdivision de ella en pies de Rey, pulgadas y lineas, sin variacion del uso que habia tenido siempre.

Desde entonces se han servido los diferentes ramos que comprende el cuerpo nacional de artillería de las medidas lineales de Paris, sin embargo de que generalmente se ha hecho uso del marco real de Castilla en todos los pesos.

Con el objeto de que se consiguiese la uniformidad de pesos y medidas, mandada observar tantas veces en los últimos años del reynado de Carlos IV, se mandó que la academia militar de Segovia y los directores de las fábricas de artillería, informasen acerca de la posibilidad ó dificultades de realizar la adopcion de las medidas españolas; y que al propio tiempo propusiesen una que pudiese substituir á la toesa en las mediciones de considerable extension. Unánimemente manifestaron, así la Academia como los directores de fábricas, la ninguna dificultad que presentaba el adoptar las medidas nacionales, tanto porque las plantillas de las maestranzas y fábricas no deben experimentar variacion alguna, como porque formando tablas de reduccion, no pueden ocurrir dudas ni equivocaciones en la práctica á los operarios que conozcan la numeracion; opinando tambien que en lugar de la toesa se substituyese la *braza*, por ser esta una medida conocida en toda la nacion, y contener dos varas ó seis pies de Castilla.

Con estos antecedentes se mandó que desde luego se procediese á la formacion de las tablas de reduccion al pie de Castilla, de las dimensio-

nes que arregladas al de Paris regian en las fábricas, y que se construyesen en Madrid juegos de medidas castellanas compuestos de un pie, una vara y una braza; estando esta dividida en dos varas, una de ellas en pies, uno de estos en pulgadas, y una de ellas en lineas; y el pie subdividido en doce pulgadas, la pulgada en doce lineas, y la linea en doce puntos.

Presentados los juegos de medidas sacadas de los patrones primarios y originales, se determinó que se pasase uno á cada departamento y fábrica de artillería, paraque sirviese de norma y modelo en lo sucesivo: y por último se mandó que se circulasen las competentes prevenciones á fin de que se tubiese el conveniente conocimiento tanto en la península como en los dominios de indias; y se consiguiese por medio de los nuevos patrones de medidas lineales de laton ó de hierro, arreglados á una temperatura determinada, la uniformidad y exâctitud que corresponde en todos los ramos de artillería.

Con la idea de contribuir por mi parte para un fin tan deseado en la nacion por tantos siglos, voy á poner aqui la division y subdivision de las pesas y medidas francesas, tanto antiguas como modernas, con la correspondencia á nuestras medidas y pesas sacadas de un excelente escrito que aun tiene inédito el infatigable D. Juan de Peñalver, director general de los canales de Aragon y de Castilla (*).

Más con el fin de que los jóvenes se acostumbren á ver la colocacion con que se suele presentar la division y subdivision de dichas unidades de pesos y medidas, pondremos estas baxo otro aspecto, empezando por la de especie superior y no haciendo uso de las rayas, porque de este modo no les sorprenderá quando las encuentren así en otros autores.

Tabla de las medidas y pesas antiguas de Francia.

MEDIDAS LINEALES.

de Francia equivalen á . . . . de España.

Toesas.	Brazadas.	Pies de Rey.	Pulgadas.	Lineas.		
1	$1\frac{1}{5}$	6	72	864. . . .	6,99494	pies.
	1	5	60	720. . . .	5,829	idem.
		1	12	144. . . .	1,165823	idem.
			1	12. . . .	1,165823	pulgadas.
				1. . . .	1,165823	lineas.

La *ana* ú *ona* (aune) . . . . 1,422 varas.

La longitud del péndulo simple que oscila los segundos en Paris es de 440,5593 lineas del pie de Paris. . . . . 513,614 lineas.

(*) *D. Josef Rebollo en su excelente traduccion de la Aritmética de Lacroix ha publicado un extracto de este escrito, hecho con mucho acierto.*

El estadal ó pértiga (perche) varía; el mas general tiene de largo 22 pies de Rey. . . . 25,648 pies.

MEDIDAS ITINERARIAS.

La legua comun es de 2283 toesas ó. . . . . . . 0,798473 leguas. (*)
La legua de 2500 toesas equivale á. . . . . . . 0,874367 leguas.
La posta es de dos leguas comunes ó. . . . . . . 1,596946 leguas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

El pie quadrado equivale á. . . . . 1,359144 pies quadrados.

El estadal quadrado á. . . . . { 657,826 pies quadrados. 4,568 estad. quadrados. (**)

El *arpent* es por lo comun de 100 pértigas ó estadales quadrados; pero como el estadal varía, tambien varía el arpent { 456,82 estad. quadrados. 1,142 aranzadas.

La legua quadrada de 2500 toesas es de . 0,7645186 leguas quadradas.

MEDIDAS DE SOLIDEZ.

Pie cúbico . . . . 1,58452 p.s cúbicos.
Toesa cúbica. . . . . 342,2563 p.s cúbicos.

En la Arquitectura, excavaciones, &c. usan de la expresion: *pie de toesa cúbica*, que significa el sólido que tiene por base el quadrado de una toesa y por altura 1 pie. En este mismo sentido se dice: *pulgada de toesa cúbica*, y *linea de toesa cúbica*.

PARA LAS MADERAS.

De Francia equivalen à . . . . de España.

Ciento de madera de carpintería.	Solive.	Pie cúbico.	Pie de solive.	Pulgada de solive.	Linea de solive.		
1	100	300	600	7200	86400	475,356	pies cúbicos.
		3	6	72	864	4,75356	idem.
		1	2	24	288	1,58452	idem.
			1	12	144	0,79226	idem.
				1	12	0,06602	idem.
					1	0,00550	idem.

MEDIDAS DE ÁRIDOS.

De Francia valen en medidas. . . . . de España.

Muid ó tonneau.	Setier.	Mine.	Minot.	Boisseau.	Litron.	Pulgada cubica.		
1	12	24	48	144	2304	92160	32,8895	fanegas.
	1	2	4	12	192	7680	2,7408	idem.
		1	2	6	96	3840	1,3704	idem.
			1	3	48	1920	8,2224	celemines.
				1	16	640	2,7408	idem.
					1	40	0,6852	quartillos.
						1	1,584522	pulg. cúb.

(*) *Leguas de 20000 pies de España.*
(**) *Estadales de 4 varas ó 12 pies españoles de lado.*

PARA LA AVENA.

Muid ó tonneau.	Setier.	Mine.	Minot.	Boisseau.	Picotin.	Pulgada cúbica.		
1	12	24	48	288	1152	184320 .	65,77896	fanegas.
	1	2	4	24	96	15360 .	5,48158	idem.
		1	2	12	48	7680 .	2,74079	idem.
			1	6	24	3840 .	1,37039	idem.
				1	4	640 .	2,74079	celemines.
					1	160 .	2,74079	quartillos.
						1 .	1,584522	pulg. cúb.

PARA LOS LÍQUIDOS.

Muid.	Feuil-lette.	Quar-taut.	Pie cú-bico.	Velte ó verge.	Quarte ó pot.	Pinte.	Cho-pine ó setier.	Pois-son.	Ro-quille.	Pul-gada cúbica.		
1	2	4	8	36	144	288	576	2304	9216	13824.	16,9933	cánt.
	1	2	4	18	72	144	288	1152	4608	6912.	8,4967	idem.
		1	2	9	36	72	144	576	2304	3456.	4,2483	idem.
			1	$4\frac{1}{2}$	18	36	72	288	1152	1728.		
				1	4	8	16	64	256	384.	3,776	azumb.
					1	2	4	16	64	96.	3,776	quart.
						1	2	8	32	48.	1,888	idem.
							1	4	16	24.	3,776	copas.
								1	4	6.	0,944	idem.
									1	$1\frac{1}{2}$	0,236	idem.
										1.	1,584522	pu.c.

PARA LA SAL.

Muid.	Setier.	Mine.	Minot.	Bois-seau.	Medida de sal.	Litron.	Pulgada cúbica.		
1	12	24	48	192	1152	3072	122880 .	43,85268	fanegas.
	1	2	4	16	96	256	10240 .	5,65439	idem.
		1	2	8	48	128	5120 .	1,82719	Idem.
			1	4	24	64	2560 .	10,96314	celem.
				1	6	16	640 .	2,74079	idem.
					1	$2\frac{2}{3}$	$106\frac{2}{3}$.	1,8272	quartill.
						1	40 .	0,6852	idem.
							1 .	1,584522	pul. cúb.

La pinta de aceyte equivale á . . . . 1,8948 libras.

PESAS.

Miller.	Quin-tal.	Libra.	Marco.	Onza.	Grueso ó dracma.	Escrú-pulo ó dinero.	Grano.		
1	10	1000	2000	16000	128000	384000	9216000.	10,63928	quint.
	1	100	200	1600	12800	38400	921600.	1,063928	idem.
		1	2	16	128	384	9216.	1,063928	libras.
			1	8	64	192	4608.	1,063928	marc.
				1	8	24	576.	1,063928	onzas.
					1	3	72.	1,063928	ochav.
						1	24.	1,063928	tomin.
							1.	1,063928	granos.

La libra para la sal es de 15 onzas. . . . . { 15,95892 onzas. / [illegible] }

153 El cálculo que se hace con los números denominados es sumamente complicado como veremos en adelante; por otra parte la division y subdivision de las unidades de pesos y medidas, no ofreciendo ninguna union ni dependencia, forman un sistema vago é incoherente: ademas de esto cada nacion, y aun en cada nacion, cada provincia usa de diferente subdivision, de manera que expresando con un mismo nombre unidades de diferente valor, resulta una multitud de incertidumbres y de errores en el comercio, en la sociedad y en las ciencias. Con el fin de evitar todos estos inconvenientes trataron los franceses de elegir un nuevo sistema filosófico; y como este era un punto que interesaba á todas las naciones, las mas de las civilizadas de Europa embiaron sus comisionados para presenciar todos los experimentos; por nuestra parte fueron Don Agustin Pedrayes y D. Gabriel Ciscar, como ya hemos citado en otro lugar.

En el nuevo sistema se reducen todas las medidas á la unidad de longitud; esta convenia que fuese invariable y se tomase en la naturaleza, por lo qual se eligió un quadrante del meridiano terrestre, y se tomó la diezmillonésima parte de esta distancia que es 3 pies, o pulgadas y 11,296 lineas francesas ó 3.5889216 pies españoles. A esta distancia se le llamó (*mètre*) ó *metro* de una palabra griega que significa *medida*, como queriendo decir: *medida fundamental* ó *medida por excelencia*. Se llama despues (*are*) *ara* á la unidad de superficie, y se convino en representarla por un quadrado que tubiese por lado una longitud de 10 metros. Se ha llamado *stere* á la unidad de solidez, y convinieron en entender por esta palabra el valor de un metro cúbico, es decir, una medida que tubiese un metro de largo, de ancho, y de profundo. Para tener despues la unidad de medida para las capacidades, se ha elegido el *decímetrocúbico*, es decir, una medida hueca de la figura de un cubo, y que tiene una décima de metro en longitud, ancho y alto, y se ha dado á esta medida el nombre de *litre*. Para los pesos se estableció la *grama*, que se ha hecho igual al peso de un *centímetrocúbico* de agua destilada. En quanto á la unidad de moneda que se llama *franco*, su valor es el de una pieza que contiene nueve décimas de plata con una décima de cobre, y su peso es de cinco gramas.

Con los nombres colectivos griegos *deca* (diez), *hecto* (ciento), *kilo* (mil), y *myria* (diez mil), formaron despues las palabras reunidas á las primitivas para significar unidades diez veces, cien veces, &c. mayores que las que significaba su raiz; y con las partitivas latinas *deci*, *centi*, *mili*, &c. para significar las que eran diez, ciento, mil &c. veces menores.

Entendido esto, hé aqui la correspondencia de estas medidas y pesas.

Nuevas medidas y pesas de Francia.

MEDIDAS LINEALES.

De Francia equivalen á medidas. . . . . de España.

Quadrante de meridiano.	Grado terrestre.	Myriametro.	Kilómetro.	Hectómetro.	Decámetro.	Metro.	Decímetro.	Centímetro.	de España.
1	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	35889216 pies.
	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	3588921,6 id.
		1	10	100	1000	10000	100000	1000000	35889,216 id. / 1,79446 leguas.
			1	10	100	1000	10000	100000	3588,9216 pies.
				1	10	100	1000	10000	358,89216 id.
					1	10	100	1000	35,889216 id.
						1	10	100	3,5889216 id.
							1	10	0,35889216 id. / 4,31 pulg.s
								1	0,035889216 pies. / 5,17 lineas.

El grado terrestre tiene 17,9446 leguas de 20000 pies españoles segun la última medicion hecha por los Franceses.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

Myriara.	Kilara.	Hectara.	Ara.	Deciara.	Centiara.	Metro quadrado.	
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	89446,87 Estadales quadrados de á 12 pies.
	1	10	100	1000	10000	100000	8944,687 Estadales quadrados de á 12 pies.
		1	10	100	1000	10000	894,4687 Estadales quadrados de á 12 pies.
			1	10	100	1000	89,44687 Estadales quadrados de á 12 pies.
				1	10	100	8,944687 Estadales quadrados de á 12 pies.
					1	10	0,894469 Estadales quadrados de á 12 pies.
						1	0,089447 Estadales quadrados de á 12 pies. / 12,88035 pies quadrados.

La hectara vale { 2,27234 aranzadas de 400 estadales quadrados.
1,5529 fanegas de 576 estadales quadrados.

MEDIDAS DE CAPACIDAD.						MEDIDAS DE ÁRIDOS.		MEDIDAS DE LÍQUIDOS.	
Kilo-litre.	Hecto-litre.	Deca-litre.	Litre.	Centi-litre.	Metro cúbico.				
1	10	100	1000	10000	1 . . .	17,9909	fanegas.	61,9653	cántaras.
	1	10	100	1000	0,1 . . .	1,79909	idem.	6,19653	idem.
		1	10	100	0,01 . . .	2,15890	celemines.	4,957226	azumbres.
			1	10	0,001 . . .	3,454249	ochavos.	1,98289	quartillos.
				1	0,0001 . . .	1,3815	ochavillos.	0,198289	idem.
					0,00001 . . .	0,13815	idem.	0,0198289	idem.
					1 . . .	1,712095	varas cúbicas.	46,226565	pies cúbicos.

La litra de aceyte tiene 1,98971 libras.

PARA LA LEÑA..... Stere igual al cubo del metro.

PESAS.

Ba-ro.	Decí-baro.	Myria-grama.	Kilo-grama.	Hecto-grama.	Deca-grama.	Grama.	Decigrama.	Centigrama.	Miligrama.	Metro cúbico de agua pura.
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	1..2 1,7 34736 quint.
	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	0,1..2,1 7 34736 id.
		1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	0,0 1..2 1,7 34736 libras.
			1	10	100	1000	10000	100000	1000000	0,0 0 1..2,1 7 34736 id.
				1	10	100	1000	10000	100000	0,0 0 0 1..3,4 7 7 5578 onzas.
					1	10	100	1000	10000	0,0 0 0 0 1..2 0 0,307333 gran.
						1	10	100	1000	0,0 0 0 0 0 1..2 0,0 307333 id.
							1	10	100	0,0 0 0 0 0 0 0 1..2,0 0 307333 id.
								1	10	0,0 0 0 0 0 0 0 0 1..0,2 0 0 307333
									1	0,0 0 0 0 0 0 0 0 0 1..0,0 2 00307333 id.

Tambien se suelen presentar estas tablas en la forma que vamos á poner aqui la anterior, que es del modo siguiente:

Baro (diez decíbaros).	21,734736	quintales.
Decíbaro (diez myriagramas)	2,1734736	idem.
Myriagrama (diez kilogramas).	21,734736	libras.
Kilograma (diez hectogramas)	2,1734736	idem.
Hectograma (diez decagramas)	3,4775578	onzas.
Decagrama (diez gramas).	200,307333	granos.
Grama (diez decigramas).	20,0307333	idem.
Decigrama (diez centigramas)	2,00307333	idem.
Centigrama (diez miligramas)	0,200307333	idem.
Miligrama (0,000000001 del peso del metro cúbico de agua pura).	0,0200307333	idem.

Correspondencia de las medidas y pesas inglesas con las españolas.

MEDIDAS INGLESAS DE LONGITUD.

El pie ingles (*foot*) equivale á 1,0938951 pies españoles.
La *yarda* ó vara equivale á 3 pies ingleses.

La *ana* para los texidos ordinarios (*the english ell*) equivale á 1,3674 varas españolas. La *ana* para los lienzos superfinos (*the flemish ell*) equivale á 0,82042 de la vara española.

La milla equivale á 0,28885 de la legua española.

El estadal (*pole*) equivale á 18,0488 pies españoles, ó lo que es lo mismo, á 1,504 estadales españoles.

AGRARIAS.

El (*rood*) equivale á 40 estadales ingleses quadrados, y de consiguiente á 90,48 estadales quadrados españoles.

El *acre* legal equivale á 4 *roods*, y de consiguiente á 361,92 estadales quadrados españoles.

El *acre* no es generalmente de la misma extension, porque el estadal ingles varía desde $16\frac{1}{2}$ á 28 pies ingleses.

DE CAPACIDAD.

El *gallon* de cerveza equivale á 9,1626 quartillos españoles: y el de vino y otros líquidos á 7,50589 quartillos.

La pipa ó bota de vino contiene 126 *gallons*, y se divide en dos *hogsheads*.

El *gallon* de aceyte equivale á 7,53289 libras españolas.

El *bushel* para los granos equivale á 7,7052 celemines, y se divide en 4 *pecks*.

La *quartera* (*quarter*) contiene 8 *bushel*, y de consiguiente equivale á 5,1368 fanegas.

PESAS.

La libra llamada de *troy* tiene 12 onzas, y la de *avoir du pois* 16

onzas; pero las onzas de la primera son mayores que las de la segunda. La primera equivale á 0,81111, y la segunda á 0,98556 de la libra española. La libra de *avoir du pois* es para las mercancías, y la de *troy* es para los metales preciosos y joyas.

El quintal (*hundred*) tiene 112 libras inglesas, y equivale á 110,3824 libras españolas.

MONEDAS EFECTIVAS.

		R.s v.n	mar.s
De oro..	La guinea (*guiney*) es de 21 chelines y vale.	103..	10,152
	La moneda de 7 chelines corresponde á.....	34..	14,717
De plata.	La corona (*crown*) es de 5 chelines y vale....	22..	15,893
	El chelin (*shilling*) corresponde á.........	4..	16,776
De cobre.	El penique (*penny*).....................		12,731
	El (*farthing*).........................		3,182

Del cotejo de las monedas de oro inglesas hecho con las nuestras del mismo metal, se deduce que la libra esterlina, moneda imaginaria equivalente á 20 chelines, corresponde á 98 reales y 12,9 maravedíses de vellon; pero del cotejo de las monedas de plata resulta que la libra esterlina equivale á 89 reales 29.52 maravedíses de vellon; y á este respecto nuestro peso de plata equivale á 40,216 peniques ó dineros.

154 Entendido esto, pasemos á manifestar como se executan las operaciones con estos números.

Para sumar los números denominados, *se ponen todos los sumandos los unos debaxo de los otros de modo que se correspondan las unidades de cada especie; se tirará una raya, y se empieza á sumar por la especie inferior; si la suma de estas contiene alguna ó algunas unidades de la especie superior inmediata, se guardan para sumarlas con las de la otra columna; se suman estas, y así se continúa hasta haber sumado las de especie superior, y el número que resulta debaxo de la raya es la suma pedida.*

1.er exemplo. Quiero sumar 8 pesos, 3 reales y 7 maravedíses con 5 pesos, 12 reales y 23 maravedíses, con 23 pesos, 7 reales y 15 maravedíses, y con 1 peso, 5 reales y 3 maravedíses; colocaré todos los sumandos los unos debaxo de los otros como aqui se ve:

(1	(1	
8 p.s	3 r.s	7m.
5	12	23
23	7	15
1	5	3
	28	48
38 p.s	13 r.s	14m

Tiraré una raya y empezaré sumando los maravedíses, lo que me da 48 que pongo debaxo de los maravedíses, hasta que esté bastante diestro para conservar en la memoria el resultado, y hallar los que quedan despues de sacadas las unidades que hay para la columna inmediata; veo que en 48 maravedíses hay un real y quedan 14 maravedíses; borro el 48, pongo debaxo los 14 maravedises que me quedan, y el real que llevo para sumarle con los reales de la columna inmediata, le pongo encima de los reales separado con una media luna, y sumo todos

estos reales, lo que me da 28 reales; pero en 28 reales hay 1 peso y quedan 13 reales; borro el 28, pongo debaxo los 13 reales que me quedaron, y el 1 peso le coloco sobre los pesos, y sumo, lo que me da 38 pesos; y por tanto digo que la suma es 38 pesos, 13 reales y 14 maravedíses.

2.º exemplo. Si quiero sumar 15 quintales, 3 arrobas, 23 libras y 7 onzas, con 47 quintales, 1 arroba y 15 onzas, con 3 quintales, 5 libras y 12 onzas, y con 13 quintales, 2 arrobas, 5 libras y 2 onzas, executaré la operacion como aqui se ve:

(1	(1	(2	
15 *quint.s*	3 *arr.s*	23 *lib.s*	7 *on.s*
47	1		15
3		5	12
13	2	5	2
	7	35	36
79 *quint.s*	3 *arr.s*	10 *lib.s*	4 *on.s*

Como en esta operacion hemos sumado todas las partes de que se componen todos los sumandos, no nos queda duda de que hemos sumado todos los sumandos.

155 Para restar los números denominados *se pone el subtraendo debaxo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya, y se va restando cada especie de unidades del subtraendo de las correspondientes en el minuendo, empezando por las de especie inferior. Aqui puede ocurrir que en alguna especie haya mas unidades en el subtraendo que en el minuendo; para poder restar en este caso, se toma una unidad de la especie inmediatamente superior, y se descompone en las de aquella especie de que se trata, se suman con las que hay, y de esta suma se restan las del subtraendo; despues es menester tener presente en la columna inmediata que se quitó una unidad al minuendo para rebaxársela. Si en la especie de unidades inmediata no hay ninguna unidad, se pasa á tomarla de la otra, y en caso de no haberla tampoco en esta, se pasa á la otra, y así hasta llegar á una en que las haya; entonces se toma una de estas unidades, se descompone en las de especie inferior inmediata, y como con sola una de estas hay bastante para poder restar de ella las de la especie inferior que se trata de restar, se conciben dexadas en la columna inmediatamente inferior tantas unidades menos una, como tenia la de especie superior inmediata; esta unidad que queda se descompone en unidades de la especie inferior siguiente, y si es de estas de las que se habia de restar se executa la resta; sino, se dexa con el pensamiento en esta columna tantas unidades menos una, como contenia la de especie superior inmediata, y esta que queda se descompone en las que le siguen: y así se procede hasta que se llega á la columna en que se trataba de restar, lo qual executado, se pasa á las columnas siguientes, teniendo cuidado de rebaxar una unidad á aquella de quien se quitó. Esto se hará mas claro con los exemplos.*

1.er exemplo. De 75 doblones, 3 pesos, 12 reales y 27 maravedíses

quiero restar 12 doblones, 1 peso, 7 reales y 19 maravedíses; colocaré el subtraendo debaxo del minuendo, y despues de tirada la raya, empezaré á restar por la columna de los maravedíses, lo que da 8 maravedíses de resta; paso á restar los reales del subtraendo de los correspondientes del minuendo, y hallo 5 reales de resta; paso á los pesos, y encuentro 2 pesos; y finalmente pasando á los doblones hallo que la resta total es 63 doblones, 2 pesos, 5 reales y 8 maravedíses.

75 *dob.s*	3 *pesos.*	12 *r.s*	27 *mar.s*
12	1	7	19
63 *dob.s*	2 *pesos.*	5 *r.s*	08 *mar.s*

2.° exemplo. De 59 quintales, 2 arrobas, 23 libras, 6 onzas y 13 adarmes quiero restar 37 quintales, 3 arrobas, 15 libras, 9 onzas y 4 adarmes.

59 *quint.s*	2 *arr.s*	23 *lib.s*	6 *on.s*	13 *adarm.s*
37	3	15	9	4
21 *quint.s*	3 *arr.s*	7 *lib.s*	13 *on.s*	9 *adarm.s*

Despues de colocado el subtraendo debaxo del minuendo y tirada la raya, empiezo restando los adarmes, y hallo 9 adarmes de resta; paso á las onzas, y como de 6 onzas no puedo restar 9 onzas, tomo una unidad de la especie superior inmediata que es la de las libras; y como la libra tiene 16 onzas, añado á estas 16 las 6 que habia en la columna de las onzas, y tengo 22 onzas; restando ahora 9 onzas de 22 onzas saco 13 de resta; paso á la columna de las libras, y como tomé una unidad de las libras del minuendo para poder restar las onzas, consideraré el 23 libras con una menos, es decir, como si fuese 22, y restando 15 de 22 saco por resta 7 libras; paso á la columna de las arrobas, veo que no se pueden restar 3 arrobas de 2 arrobas, por consiguiente tomo una unidad de los quintales, que como tiene 4 arrobas, digo: 4 y 2 que tenia son 6, de 3 á 6 van 3, pongo en la resta 3 arrobas; y pasando á restar los quintales, teniendo presente que he tomado uno de los del minuendo, saco por último que la resta total es 21 quintales, 3 arrobas, 7 libras, 13 onzas y 9 adarmes.

3.er exemp. De 29 varas y 5 lineas quiero restar 15 varas, 2 pies, 8 pulgadas y 7 lineas; colocaré el subtraendo debaxo del minuendo ocupando con ceros los lugares donde no hay unidades en el minuendo conforme aqui se ve:

	2	11	
29 *var.s*	0 *pies*	0 *pulg.s*	5 *lin.s*
15	2	8	7
13 *var.s*	0 *pies*	3 *pulg.s*	10 *lin.s*

Y despues de tirada la raya, empiezo á restar por las lineas; pero como de 5 lineas no puedo restar 7 lineas, voy á tomar una unidad de la columna inmediata; más como no las hay, paso á la otra que tampoco tiene, y así tengo que tomar una unidad de la columna de las varas; 1 vara tiene 3 pies, y como para restar las lineas solo se necesita un pie, dexo con el pensamiento los otros 2 pies en la columna de los pies, ó para

mayor claridad pongo 2 encima del 0 pies; 1 pie que es el que me queda tiene 12 pulgadas, y como para restar las lineas es suficiente 1 pulgada, dexo las otras 11 en la columna de las pulgadas, y luego digo: 1 pulgada tiene 12 lineas, y 5 que hay en la columna de las lineas son 17, quitando de 17 lineas 7 lineas que hay en el subtraendo quedan 10 lineas; restando despues 8 pulgadas de 11 pulgadas, 2 pies de 2 pies y 15 varas de 28 varas, porque antes quité una, saco por resta total 13 varas, 0 pies, 3 pulgadas y 10 lineas.

4.º exemp. Si de 327 doblones quiero restar 258 doblones, 2 pesos, 13 reales y 27 maravedíses, executaré la operacion como aqui se ve:

Como aqui tambien restamos todas las partes del subtraendo de todas las del minuendo, y todas la restas parciales las tenemos reunidas en un solo número, este expresará la resta total.

	3	14	34
327 *dob.s*	0 *p.s*	0 *r.s*	0 *mrs.*
258	2	13	27
068 *dob.s*	1 *p.s*	01 *r.s*	07 *mrs.*

156 En la multiplicacion de los números denominados se pueden seguir tres métodos: 1.º el poner en forma de número fraccionario cada número denominado, lo que se consigue reduciéndole todo á las unidades de especie inferior, y poniendo á esto por denominador el número que expresa las veces que la unidad de especie inferior está contenida en la superior, y executando despues la multiplicacion; 2.º el practicar tres reglas que diremos; y el 3.º el que se conoce con el nombre de las partes alíquotas.

Los dos primeros son, aunque complicados, independientes del talento del calculador, y por eso se deben preferir, porque están al alcance de los demas; el otro es mas filosófico, y al mismo tiempo mas corto, por lo que tambien debe llamar nuestra atencion; y siendo el 2.º algo mas breve que el primero será el que en general aconsejemos que se siga, y por lo mismo le vamos á dar á conocer.

Este método consiste en practicar las tres reglas siguientes: 1.ª *redúzcanse el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies*; 2.ª *multiplíquense entre sí estos dos números despues de reducidos*; 3.ª *divídase el producto por el número que expresa quantas veces la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en la mayor, y el quociente expresará el producto en las unidades de especie inferior del multiplicando; por lo que se deberán reducir á las de especie superior segun las reglas dadas* (78).

En esta qüestion es indispensable conocer qual es el multiplicando y qual el multiplicador, para practicar la tercera regla; y así, recordaremos que esto se conoce viendo de que especie es lo que buscamos, y el número de los datos que sea de esta misma especie, será el multiplicando, y el otro será el multiplicador.

Para hacer aplicaciones de estas reglas, supongamos que se quiera averiguar quánto valen 5 varas y 2 pies, costando la vara á 6 pesos y 3

reales. Reduciré primero el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies, y tendré el primero reducido á 123 reales, y el segundo á 17 pies; multiplico 123 por 17 y saco el producto 2091; divido este producto por 3, que expresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en el mayor, y tendré el quociente 697, que expresa los reales que valen las 5 varas y 2 pies; más como la qüestion venia propuesta en pesos, reduciré estos 697 reales á pesos, y sacaré 46 pesos y 7 reales.

2.º exemplo. Si quisiera averiguar quánto costaban 3 quintales, 2 arrobas y 7 libras de azucar, costando el quintal 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, reduciré el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies, y se me convertirán en 473 reales y 357 libras; multiplicaré estos dos números entre sí, y el producto 168861 le dividiré por 100, lo que me dará 1688,61 reales; que reducidos á doblones hacen 28 doblones, 0 pesos y 8,61 reales, que vienen á ser 8 reales y 21 maravedíses.

3.er exemplo. Si quiero multiplicar 8 varas y 2 pies por 5 varas y 1 pie, reduciré el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies, y tendré que multiplicar entre sí los números 26 pies y 16 pies, lo que da el producto 416; ahora tendria que dividir por 3 este producto segun la tercera regla; pero como luego tengo que volver á dividir por 3 paraque salgan reducidas á la especie superior que se daba en el multiplicando, le dividiré desde luego por el producto de 3 por 3 que es 9, y sacaré $46 \frac{2}{9}$ varas; pero estas varas no son de la misma especie que las del multiplicando y multiplicador, sino que son varas *quadradas*. Estos casos en que el multiplicando y multiplicador son de una misma especie, no ocurren comunmente sino en la medicion de las tierras.

De estas reglas solo debemos manifestar el fundamento de la tercera; la qual se ha de practicar porque quando multiplicamos el multiplicando por las unidades de especie inferior del multiplicador, multiplicamos, contrayéndonos al primer exemplo, el valor de la vara no por el número de varas, sino por el número de pies; y así, el producto que nos resulte de practicar la regla, debe ser tantas veces mayor que el verdadero, quantas veces el pie sea menor que la vara; luego le debemos hacer el mismo número de veces menor, lo que se consigue dividiéndole por 3 en este caso, ó en general por el número que exprese las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador esté contenida en la superior.

El método de las partes alíquotas consiste en *multiplicar todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, y yendo colocando los productos en columna de modo que se correspondan las unidades de cada especie; despues, para multiplicar por las de segunda, se ve aquel número de unidades qué parte alíquota es de la unidad principal, y se toma esta misma parte del valor de dicha unidad; luego, se pasa á ver el número de unidades de tercera especie qué parte alí-*

quota es del anterior, y si es complicada esta parte se elige como auxiliar otra, que luego se borra; y así se continúa hasta que no haya mas unidades en el multiplicador, que entonces se hace la suma total, y esta expresará el producto.

Propongámonos executar por este método los dos primeros exemplos de antes paraque se puedan comparar, y tendremos, para resolver el primero, que averiguar quánto valen 5 varas y 2 pies costando la vara 8 pesos y 3 reales; y así diremos: 5 varas á 8 pesos son ó valen 40 pesos, que pondremos como aqui se presenta:

5 *v.s*	á 8 *p.s valen*	40 *pesos*	
	á 3 *rs.*	1	
2 *pies*		5	7 *rs.*
5 *v.s* y 2 *pies* á 8 *pesos* y 3 *rs. valen*		46 *p.s* y	7 *rs.*

Luego, diremos: 5 varas á 3 reales son 15 reales; pero como 15 reales valen 1 peso, pondremos 1 debaxo de los pesos; no se necesita repetir 5 varas y por eso se omite, y solo se pone en la operacion á 3 reales. Luego, se trata de tomar el valor de dos pies, y como dos pies son los $\frac{2}{3}$ de la vara, todo estará reducido á tomar los $\frac{2}{3}$ del valor de la vara, esto es, de 8 pesos y 3 reales, lo que executaremos diciendo: las dos terceras partes de 8 pesos son 5 pesos y $\frac{1}{3}$ de peso: pongo por consiguiente los 5 pesos debaxo de los pesos, y el $\frac{1}{3}$ de peso le reduzco á tercios de real y son $\frac{15}{3}$ ó 5 reales; luego, digo: las $\frac{2}{3}$ de 3 reales son 2 reales, y 5 reales que me dió la resta anterior son 7 reales, que pongo en la columna de los reales; y sumándolo todo saco lo que dice el renglon de debaxo de la raya.

Para resolver el segundo exemplo diremos, como aqui se presenta:

3 *q.s* á 7 doblones valen. .	(4 21 dobl.s (3				
á 3 pesos.		9 p.s (2			
á 8 reales.			24 r.s (1		
2 arrobas.	3	3	11	17 m.rs	
5 libras.	0	1	8	22 $\frac{1}{10}$	$\frac{5}{50}$
1 libra.		0	4	24 $\frac{41}{50}$	$\frac{41}{50}$
1 libra.		0	4	24 $\frac{41}{50}$	$\frac{41}{50}$
Valor pedido.	28	46	53	88	87
		0	8	20	50
					$\frac{37}{50}$

Tres quintales á 7 doblones son ó valen 21 doblones: á 3 pesos valen 9 pesos, que pongo á su derecha en la columna que ha de servir para los pesos; luego, digo: á 8 reales son 24 reales que pongo otro lugar mas á la derecha. Despues como dos arrobas es la mitad de un quintal, pues este tiene 4 arrobas, tomaré la mitad del valor del quintal, diciendo: la mitad de 7 doblones son 3 doblones, y me queda un doblon;

este doblon reducido á pesos da 4 pesos, y 3 pesos son 7 pesos; la mitad de 7 pesos son 3 pesos y queda un peso ó 15 reales; que juntos con los 8 reales da 23 reales; la mitad de 23 reales son 11 reales y queda 1 real ó 34 maravedíses, y diré: la mitad de 34 maravedíses son 17 maravedíses, con lo que tendré el valor de las dos arrobas. Ahora me falta hallar el valor correspondiente á las 7 libras; pero como 7 libras no es parte alíquota sencilla de 2 arrobas, que es el valor que tengo antes, debo investigar quál es el partido que debo tomar; para lo qual lo mas fácil es tomar primero el valor de 5 libras que es $\frac{1}{10}$ de 2 arrobas, y así diremos: la décima parte de 3 doblones es 0 doblones, y quedan 3 doblones que valen 12 pesos, y 3 que hay alli son 15; la décima parte de 15 pesos es 1 peso, y quedan 5 que valen 75 reales; 75 reales y 11 reales son 86 reales; la décima parte de 86 es 8, y quedan 6 que valen 204 maravedíses, que juntos con los 17 maravedíses hacen 221; la décima parte de 221 son 22 y $\frac{1}{10}$ que pongo.

Ahora, para hallar el valor de las dos libras que faltan para 7, tomaré las dos quintas partes del valor de las 5 libras, ó lo que es mas sencillo, se tomará el valor de una libra, que es la quinta parte, y se pondrá dos veces diciendo: la quinta parte de un peso da 0 pesos, y un peso ó 15 reales de resta, que juntos con los 8 reales da 23 reales; la quinta parte de 23 reales son 4 reales y quedan 3 reales que valen 102 maravedíses, que juntos con los 22 $\frac{1}{10}$ dan 124 $\frac{1}{10}$ de maravedí; la quinta parte de 124 $\frac{1}{10}$ maravedíses son 24 $\frac{41}{50}$ maravedíses; cuyo valor puesto otra vez dará el valor de las dos libras.

Para hallar el valor total sumaré todos estos valores; y para sumar los quebrados observo que quedarán reducidos á un comun denominador (108) multiplicando los dos términos del primero por 5 que le convertirá en $\frac{5}{50}$; y sumando despues todo lo demas saco el valor que está debaxo de la raya. Donde vemos que los resultados son los mismos por ambos métodos.

157 Para dividir los números denominados se practicarán las tres reglas siguientes: 1.ª *se reduce el divisor á la menor de sus especies*; 2.ª *se hace la division empezando por las unidades de especie superior del dividendo; y si de esta division queda alguna resta, se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y se añaden las unidades de esta especie que hay en el dividendo; se dividen por el divisor, y si queda alguna resta se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior*; 3.ª *despues se multiplica todo este qüociente por el número que expresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, teniendo cuidado de empezar esta multiplicacion por las unidades de especie inferior, para que si de esto resultan unidades de especie superior, se saquen para añadirlas al producto que resulte de la columna inmediata.*

1.er exemp. Sé (156) que 5 varas y 2 pies han costado 46 pesos y 7

reales; si quiero averiguar á cómo ha costado la vara, no tendré mas que dividir 46 pesos y 7 reales por 5 varas y 2 pies. Aqui conozco qual es el dividendo, porque en estos casos es de la misma especie que lo que se busca. Practico la primera regla y se me convierte el divisor en 17 pies; ahora empiezo á dividir, y lo executo como aqui se ve:

Empiezo por los pesos y digo: 46 entre 17 les toca á 2, que son pesos, y me quedan de resta 12 pesos; que para reducirlos á reales los multiplicaré por 15, y al producto 180 le añadiré los 7 reales que hay en el dividendo; veo que el 17 cabe en 187 onze veces, y no dexa ninguna resta. Ahora debo multiplicar por 3 el quociente 2 pesos y 11 reales, porque 3 expresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 8 pesos y 3 reales, que es en efecto el valor de la vara.

```
46 pe.s 7 rs. | 17
12            |------------
15            | 2 pe.s 11 rs.
---                     3
60              ------------
12              8 pe.s  3 rs.
---
180
  7
---
187
017
 00
```

2.° exemplo. Sé que 3 quintales, 2 arrobas y 7 libras de azucar han costado 28 doblones, 0 pesos y 8,61 reales; si quiero averiguar á cómo ha costado el quintal, reduciré primero el divisor 3 quintales, 2 arrobas y 7 libras á libras, y se me convierte en 357.

Empiezo la division como aqui se ve:

```
28 dob.s 0 p.s 8,61 rs. | 357
  4                     |--------
----                    | 0 dob.s
 112                      0 pe.s
   0                      4,73 rs.
----                      1 00
 112                      --------
  15                      473 rs. | 15
----                      023     |--------| 4
 560                       08     | 31 pe.s|--------
 112                              | 3      | 7 dob.s
----
1680
   8,61
-------
1688,61
0260 6
 010 71
  00 00
```

Y advierto que en el quociente no sale ningun doblon; reduzco los doblones á pesos y veo que tampoco sale en el quociente ningun peso; lo reduzco á reales, añado los 8,61 que habia en el dividendo, y saco

por quociente 4,73, reduciendo á decimales la resta 260,61 que habia quedado del quociente entero 4; este quociente 4,73 le debo multiplicar por 100 porque el quintal contiene cien veces á la unidad de especie inferior del divisor que es la libra, y saco 473 reales; que reducidos á doblones componen 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, que es el valor del quintal de azucar.

De estas reglas solo tenemos que demostrar la tercera; la qual se funda en que dividimos lo que se nos dió por el número de unidades de especie inferior del divisor; y así nos resultará un quociente tanto menor como unidades tiene el número que expresa las veces que dicha unidad cabe en la de especie superior; y por lo tanto le deberemos hacer este mismo número de veces mayor, lo que se consigue practicando dicha tercera regla.

158 Concluiremos este asunto observando que todo número denominado se puede presentar como número mixto: para lo qual se reducen todas las unidades de especie inferior á la primera, á la inferior de todas, y este es el numerador del quebrado que debe acompañar á las unidades de especie superior; despues se le pone por denominador el número que expresa las veces que la unidad de especie inferior está contenida en la mayor. Por exemplo: para poner como número mixto el número 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, reduciré los pesos á reales, y tendré 53 reales, que será el númerador del quebrado que debe acompañar al 7 doblones; despues veo que el real cabe sesenta veces en el doblon, y tendré que 7 doblones, 3 pesos y 8 reales es lo mismo que 7 doblones y $\frac{53}{60}$ de doblon.

Tambien podré reducir el quebrado $\frac{53}{60}$ á decimales, y sacaré que 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, ó 7 doblones $\frac{53}{60}$ de doblon, ó 7,883333 &c. es una misma cosa.

De aqui se sigue que el cálculo de los números denominados, que como se ha visto es muy complicado, se puede hacer con mucha sencillez, reduciendo á decimales los factores en la multiplicacion, y los dos términos en la division. V. g. si quiero resolver el segundo exemplo (156) tendré que el multiplicando será 7,8833 doblones, y el multiplicador será 3.57 quintales, cuyo prducto es 28,1434 doblones; que valuando el quebrado decimal sale por último 28 doblones, 0 pesos, 8 reales, 20,536 maravedíses, que es lo mismo que dieron los otros métodos. Lo mismo sucederia en la division.

PRINCIPIOS DE ÁLGEBRA.

159 Hasta ahora solo hemos considerado la cantidad en quanto está expresada por números; de aquí en adelante vamos á tratar de ella generalmente, esto es, considerándola solo en quanto es susceptible de aumento ó diminucion; y la ciencia que tiene esto por objeto se llama *Algebra* (*). De manera que Algebra es la *ciencia que trata del cálculo de las cantidades consideradas en general*. Los signos de que se vale para expresarlas son las letras del alfabeto, porque son de un uso mas fácil y cómodo que ninguna otra clase de signos; y así, por *a* podemos expresar una cantidad de qualquier especie que sea, como numérica, de peso, de medida, de movimiento, de extension &c; esto es, en sí la letra *a* expresa una cosa en quanto es susceptible de aumento ó de diminucion.

El Algebra es mucho mas general que la Aritmética; pues aunque en la Aritmética se prescinde del valor específico de la cantidad, no se puede prescindir del numérico; y así, el 4 aunque es cierto que puede expresar 4 hombres, 4 caballos, 4 libras, &c. no puede dexar de expresar 4

(*) *La palabra Álgebra la derivan algunos de la voz árabe* algiabarat *que significa el* restablecimiento de una cosa rota, *suponiendo falsamente que la principal parte del Álgebra consiste en la consideracion de los números rotos ó quebrados. Otros piensan que el Algebra tomó su nombre de Gebert filósofo químico y matemático célebre, á quien los árabes llaman* Giabert, *el qual se cree que fue entre ellos el inventor de esta ciencia, y el que construyó la Giralda de Sevilla. Otros pretenden que esta palabra viene de la palabra* geber, *y que con la partícula* al *se ha formado la palabra* Algebra, *que es puramente arábiga, y significa propiamente la* reduccion de los números rotos á números enteros. *En quanto al orígen del Algebra no se sabe nada de cierto; se atribuye ordinariamente su invencion á Diofanto, autor griego, que vivia en el siglo quarto de la era cristiana, y que escribió trece libros de ella, aunque no nos quedan sino seis que se publicaron por primera vez en 1575. Se cree que los árabes, sino la inventaron por sí mismos, al menos la cultivaron mucho; tambien se dice que ellos la habian recibido de los persas, y los persas de los indios. Lo que parece mas cierto es que los árabes la traxeron á España, de donde segun la opinion de algunos pasó á Inglaterra antes de ser conocido allí Diofanto.*

Lucas de Burgo es el primero en la Europa que ha escrito sobre este punto; su libro que está en italiano, se imprimió en Venecia en 1494. Segun él, el Algebra viene originariamente de los árabes; y como no hace ninguna mencion de Diofanto, se puede inferir que este autor no era aun conocido en Europa.

segun nuestro sistema; y la *a* no solo puede expresar hombres, caballos, pesos, &c. sino que puede ser 4, 40, 70, 80, &c.

Por muchas cantidades que hayan de entrar en una qüestion, tiene el Álgebra signos para expresarlas; porque hace uso del alfabeto minúsculo y mayúsculo: tambien echa mano del alfabeto griego (por eso está al principio del libro) y aun del aleman. Ademas una letra qualquiera tal como *a* poniéndole un acento en esta forma a', expresa ya otra cantidad diferente de la que expresaba *a*; despues se le pueden poner dos, tres, quatro, &c. acentos en esta forma: a, a', a'', a''', a^{IV}, &c. quando estas letras estan acentuadas se leen: *a primera*, *a segunda*, *a tercera*, *a quarta*, &c. segun el número de acentos que tenga.

Los acentos tambien se ponen antes en esta forma; $'a$, $''a$, $'''a$, ^{IV}a, &c. y entonces se leen: *primera a*, *segunda a*, *tercera a*, *quarta a*, &c. Aun los acentos se pueden colocar por la parte inferior bien á la derecha como $a_{,}$, $a_{,,}$ &c, en cuyo caso se pueden leer: *a subprimera*, *a subsegunda* &c. ó bien á la izquierda como $_{,}a$, $_{,,}a$, &c. en cuyo caso se leerán: *subprimera a*, *subsegunda a*, &c. De donde se infiere que si con una misma letra podemos señalar tantas cantidades, con todas ellas podremos señalar quantas se deseen.

160 Algunos definen el Álgebra diciendo que es la *ciencia que trata de reducir á reglas generales todas las qüestiones que pueden ofrecerse acerca de las cantidades.* El Álgebra tiene dos partes: la 1.ª trata del modo de executar las operaciones de sumar, restar, multiplicar &c. con las cantidades expresadas por letras; y la 2.ª del modo de servirse de este cálculo para la resolucion de los problemas.

La segunda parte fue la primera que se inventó, pues los libros de Diofanto se reducen á resolver qüestiones; despues la adelantaron mucho Vieta, Fermat y Descartes, resolviendo un gran número de problemas importantísimos. Luego que se vió su utilidad y excelencia, se echó de ver que era necesario explicar en general el modo de executar la primera parte; y el primer escrito que yo conozco tenga esto por objeto, es el que se halla con el título de *Principia Matheseos universalis seu introductio ad Geometriæ Methodum Renati Descartes Conscripta ab Er. Bartolino*; en el principio del segundo tomo de la edicion de la Geometría de Descartes hecha en Amsterdam en 1683.

161 Para dar á conocer como solo con el auxilio del raciocinio se pudieron resolver las qüestiones, antes de enseñar á executar las operaciones con las letras, nos propondremos resolver la primera qüestion del libro primero de Diofanto, que nos hará conocer al mismo tiempo el método de invencion, y la necesidad de exponer la primera parte del Álgebra antes de la segunda.

Qüestion. *Dividir un número propuesto en dos partes cuyo intervalo ó diferencia sea dada.*

Resolucion de Diofanto. « Sea el número dado 100 y el intervalo ó

« diferencia 40, conviene hallar los números. Supongamos que el menor « sea *N* (esto es llamando *N* á dicho número; Diofanto usaba de la le- « tra griega llamada *stigma* que equivale á *St*, y que se ha reemplazado « despues por la letra *N*), con lo qual tendremos que el *mayor equival-* « *drá á* $1\times N$ y 40 *unidades*; luego *ambos juntos equivaldrán á* $2\times N$ « *mas* 40. Pero como por el supuesto los dos juntos habian de componer 100, « se tendrá que 100 *unidades son iguales á* $2\times N$ *mas* 40, y quitando á « ambas cantidades 40 unidades, quedarán $2\times N$ *igual á* 60 *unidades.* « Luego si el duplo del número menor es 60 unidades, tomando la mitad « *se tendrá dicho número menor que será* 30 *unidades*; y como el mayor « habia de tener 40 unidades mas que el menor, *será igual á* 70; donde « se ve que los dos juntos equivalen á 100, y por lo mismo la demos- « tracion es manifiesta. »

Esta qüestion está enunciada en general, y solo está resuelta en particular; esto es lo que hace Diofanto en todas sus qüestiones. Veamos el método de resolverla en general usando solo del raciocinio.

Llamemos *número menor* á la parte menor, y tendremos que el *mayor* será igual á dicho *número menor mas el intervalo ó diferencia*; y reuniendo los dos, será *dos veces el número menor mas el intervalo igual al número propuesto.* Luego si del número propuesto quitamos el intervalo, nos vendrá el *duplo del menor*; y *si de la diferencia entre el número propuesto y el intervalo dado, tomamos la mitad, nos vendrá el número menor*; *y añadiendo á esto el intervalo se tendrá el mayor.* Luego vemos ahora que si el propuesto fuese 100, y el intervalo 40, diríamos 100 menos 40 son 60, y tomando la mitad se tendrá 30 que será el menor, y añadiendo á este 40, será 70 el mayor, como antes.

Aqui tenemos ya resuelta nuestra qüestion con toda generalidad; más si en vez del número que buscamos, usamos de una letra tal como por exemplo de la x, y, z, &c. y señalamos ademas el número propuesto con una letra tal como a, y al intervalo dado por otra letra tal como b, conseguiremos dos cosas: 1.ª resolver la qüestion con toda generalidad; y 2.ª aliviar nuestra memoria, disminuyendo los esfuerzos que tiene que hacer para retener las diferentes cosas que son necesarias para el descubrimiento de la verdad que indagamos.

En efecto, llamando x á la parte menor, a al número propuesto y b al intervalo, resultará que $x+b$ será el mayor; y debiendo a ser igual á los dos juntos, se tendrá $a=x+x+b$, ó $a=2x+b$; y quitando de ambas cantidades el intervalo b, será $a-b=2x$; y dividiendo ambas por 2, resultará $x=\frac{a-b}{2}$; y este resultado nos suministra la regla que deberemos seguir en todos los problemas de esta especie: pues nos da á conocer que *del número propuesto se reste el intervalo, y de lo que quede se tome la mitad con lo que se tendrá la parte menor*; y añadiendo á esta el intervalo

b, se tendrá la mayor; luego la mayor será igual con $\frac{a-b}{2}+b$, ó con $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{2b}{2}$ ó con $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, y quiere decir que tambien se pudiera hallar directamente la mayor, *añadiendo á la mitad del número propuesto la mitad del intervalo conocido*.

Usando del método de Diofanto vemos que la qüestion no se resuelve con generalidad; usando del raciocinio es necesario tener una gran tension de espíritu para conservar todo lo que se ha dicho, á pesar de ser esta la qüestion mas sencilla que nos podemos proponer. Usando de las letras y de los signos que ya conocemos, vemos que desaparecen estos inconvenientes; más como en este exemplo hemos tenido necesidad de executar sumas, restas, &c.: vamos á tratar ahora de la 1.ª parte del Algebra, para poder tratar despues la 2.ª con la generalidad que corresponde.

152 Por esta causa vamos á recordar ahora que el signo + señala la adicion y se lee *mas*, de manera que $a+b$ quiere decir que el valor de la cantidad b se debe añadir á la cantidad a; el signo — la sustraccion y se lee *menos*, de manera que $a-b$ expresa que el valor de la cantidad b se debe restar del valor de la cantidad a; el signo × ó el (.) la multiplicacion, de manera que $a\times b$ ó $a.b$ expresa que el valor de a se debe multiplicar por el valor de b. Tambien se indica la multiplicacion de la a por la b poniéndolas una á continuacion de otra sin signo, de manera que ab es lo mismo que $a\times b$ ó que $a.b$; en la Aritmética no se puede suprimir el signo de la multiplicacion, porque como los guarismos significan diferentes cosas segun el lugar que ocupan, resultarian grandes errores; por exemplo: si en 3×4 ó en 3.4 suprimimos el signo de la multiplicacion tendremos 34, que á causa de la ley del sistema de numeracion, expresa *treinta y quatro* unidades, quando su producto solo vale *doce*.

El signo — entre dos cantidades que estan la una sobre la otra, ó dos puntes (:) expresan la division: de manera que $\frac{a}{b}$ ó $a:b$ (*) expresa que el valor de a se ha de dividir por el de b.

(*) *Este método de indicar la division con dos puntos le inventó* Leibnitz *para no desfigurar los renglones; le preguntó á Juan Bernoulli si le aprobaba. Este le respondió que le parecia muy cómodo; pero que seria dificil de hacerlo adquirir á los que estan acostumbrados á la division vulgar, que apenas saben distinguir á primera vista el dividendo y el divisor; y principalmente en una fraccion complicada, como si en vez de* $\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}}$ *se escribiese* $\overline{a+b:c}:\overline{e-f:g}$.

El signo $=$ expresa el resultado de todas las operaciones, y se lee *igual* (*).

El signo $>$ es el de mayoría, de manera que $a>b$ expresa que a es mayor que b; el signo $<$ es el de menoría, por manera que $b<a$ indica que b es menor que a; de donde se deduce en general que la cantidad que hay en la boca del signo es mayor que la que se halla en la punta.

163 En el Algebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino al modo con que influyen en la qüestion que el calculador se propone resolver. Desde luego se advierte que al resolver una qüestion solo se pueden encontrar dos clases de cantidades que influyan en ella: cantidades que conspiren al fin que se propone el calculador, y cantidades que conspiren á un fin opuesto; pues si entrasen otras cantidades que no conspirasen á ninguno de estos fines serian indiferentes en la qüestion; y por lo mismo se las despreciaria, puesto que el resultado que buscamos no depende de ellas.

A las cantidades que conspiran al fin que se propone el calculador se les da el nombre de cantidades *positivas*, y á las que conspiran á un fin opuesto el de *negativas*. Acerca de las cantidades negativas se han dicho muchos desatinos; porque se les ha llamado cantidades *falsas*, y se ha dicho que no exîstian, &c.; pero en la idea de cantidad negativa no entra otra sino la de conspirar al fin contrario al que el calculador se propone, debiendo advertirse que una misma cantidad puede ser positiva en una qüestion y negativa en otra. Por exemplo: si nos proponemos averiguar en quánto tiempo se llenará un estanque de agua, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendremos que atender no solo al agua que entra sino tambien al agua que sale; y como el agua que entra conspira al fin que nos proponemos, esta será la positiva: y la que sale que conspira á vaciar el estanque, que es lo contrario de llenarle, será la negativa. Propongámonos al contrario averiguar el tiempo en que se vaciaria un estanque, en que sabemos que por una parte entra agua y por otra sale; y tendremos que atender tambien en este caso al agua que entra y al agua que sale; pero como aquella conspira al fin opuesto será la negativa.

Propongámonos por segundo exemplo averiguar lo que ahorra un hombre anualmente: y tendremos que todas las rentas de este sugeto, como conspiran al fin que nos proponemos, serán las cantidades positivas en

---

(*) *No siempre se ha usado para la igualdad del signo* $=$. *Descartes usaba del* ∞ *para esto, y en la introduccion á su Geometria, que ya hemos citado, se usa del signo* $=$ *para indicar la diferencia entre dos cantidades, quando no se sabe qual es la mayor: por exemplo: con* a—b *se expresaba el exceso que* a *llevaba á* b, *con* b—a *el que* b *llevaba á* a, *quando era mayor que ella: y con* a=b *la diferencia que habia entre estas dos cantidades quando se ignoraba qual era la mayor. Nuestro Tosca usaba para la igualdad de este signo* ≏.

nuestra qüestion; y como los gastos conspiran al fin opuesto, serán las negativas.

Supongamos ahora que nos proponemos averiguar en quánto se atrasa ó empeña un sugeto al año; y tendremos que como en este caso los gastos conspiran á nuestro fin, serán las cantidades positivas; y como las rentas conspiran al fin opuesto serán las negativas. Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador; y la cantidad que en una qüestion sea positiva, en la qüestion opuesta será negativa.

Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tiran de aumentar el resultado que se busca; y por lo mismo se señalan estas cantidades con el signo + que es el de aumento ó de adicion; y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan con el signo —; de manera que de aqui en adelante no podremos escribir una cantidad sin poner el signo que le corresponde para indicar su naturaleza. Sin embargo quando es el signo + el que lleva una cantidad se suprime, de modo que a es lo mismo que $+a$; pero quando de ningun modo se puede omitir el signo es quando es menos ó —; de manera que en $-a$ no se puede dexar de poner el signo —, pues entonces no se expresaria que en qualquiera qüestion donde debia entrar la a, habia de conspirar á disminuir el resultado en todo el valor que ella tubiese.

164 Las cantidades negativas no se han necesitado considerar en la Aritmética; porque alli en la resolucion de las qüestiones se suple todo por palabras, y se executan las operaciones separadamente. Por exemplo: propongámonos averiguar quánto ahorra un sugeto que tiene por su destino *dos mil y trescientos ducados anuales; que tiene que mantener dos hijos en una casa de educacion, que cada uno le cuesta quinientos ducados; que por otra parte se sabe que tiene un mayorazgo que le produce tres mil ducados; y que el gasto de su casa equivale á tres mil seiscientos cincuenta ducados.*

Para resolver esta qüestion por los conocimientos que tenemos de Aritmética, averiguaremos primero quánto importan las rentas de este sugeto, y por lo mismo sumaremos los 2300 ducados con los 3000 ducados, y tendremos que equivale todo á 5300 ducados; ahora averiguaremos todos los gastos, y tendremos en primer lugar que costándole la manutencion de cada hijo 500 ducados, la de ambos le costará 1000 ducados, los quales juntos con el gasto de su casa que es 3650 ducados, importan 4650 ducados; luego si restamos 4650 ducados de 5300, nos resultarán 650 ducados, que expresarán el ahorro de dicho sugeto.

Supongamos ahora que ademas de las circunstancias dichas se añada el que este mismo sugeto tiene dos niñas en otra casa de educacion, y que la manutencion de cada una sea de quatrocientos ducados. En este

caso para averiguar lo que ahorra este sugeto, sumaremos como antes, su renta total; y como la circunstancia que hemos añadido no aumenta la renta, tendremos que la renta del sugeto será la misma que antes, esto es, 5300, y los gastos ascenderán á 800 ducados mas que antes; luego si reunimos estos 800 ducados con los 4650 que gastaba antes, resultará que los gastos de este sugeto ascienden á 5450 ducados. Aqui vemos que siendo solo la renta 5300 y los gastos 5450, este sugeto no ahorrará, sino que al contrario se empeñará en cada año; y así encontraremos un resultado contrario del que buscábamos, pues procedíamos buscando ahorro y hallamos al contrario alcance. Ahora, pues que ya la qüestion nos dice que procedíamos baxo un supuesto falso, qual es el de haber ahorros, para hallar en quánto se empeña cada año, restaremos la renta 5300 de los gastos 5450; pues en tanto como los gastos excedan á la renta, en tanto será en lo que se empeñe cada año; y executando esta resta, se tendrá que se empeña cada año en 150 ducados.

165 El Algebra trata de indicar, solo con un corto número de signos, todos los razonamientos que pueden influir en los resultados, de manera que el Algebra es la escritura de la lengua de la cantidad. Los signos que hasta ahora hemos dado á conocer son suficientes para resolver estas qüestiones; y con otro corto número de ellos que manifestaremos en lo sucesivo, tenemos una lengua sumamente sencilla y perfecta, y que ademas tiene las circunstancias de ser general, porque todas las naciones la entienden del mismo modo.

Propongámonos traducir nuestra primera qüestion al lenguage algebráico, y diremos en primer lugar: los 2300 ducados anuales contribuyen á nuestro fin, que es el de hallar ahorros, luego esta será para nosotros una cantidad positiva, que deberemos señalar con el signo +; pero como es al principio de escritura, y estamos convenidos en que al principio de escritura se sobrentiende el signo +, pondremos solo 2300; despues la segunda circunstancia dice que tiene que mantener dos hijos en una casa de educacion, costándole cada uno 500 ducados, y por lo mismo inferimos que los dos juntos le costarán dos veces quinientos ducados; y como esta no contribuye al ahorro que buscamos, sino al contrario, esta será una cantidad negativa, luego la deberemos señalar con el signo — de este modo -2×500. Ahora, como el ahorro que buscamos debe resultar del conjunto del gasto y rentas, esta cantidad la pondremos al lado del 2300 con su signo menos, con lo qual tendremos ya escrito $2300-2\times500$. Dice despues la qüestion que este sugeto tiene ademas un *mayorazgo que le da de renta* 3000 *ducados*, y como esto conspira á nuestro fin, será una cantidad positiva; por lo mismo tendremos que poner $+3000$ al lado de lo que tenemos escrito, y nos resultará ahora $2300-2\times500+3000$. La última circunstancia dice que su gasto es de 3650 ducados, y como esto no conspira á nuestro fin que es el de buscar ahorros, sino al fin opuesto, le deberemos señalar con —; de

manera que pondremos -3650 al lado de lo que tenemos escrito, y se nos convertirá en $2300-2\times500+3000-3650$; y como ya no hay mas circunstancias, tenemos escrita toda nuestra question.

Ahora, la principal ventaja del Algebra consiste en que por su medio no se necesita executar sino muy pocas operaciones, y esas de las mas sencillas; puesto que todo el artificio de esta ciencia consiste en dar otra nueva forma á la expresion que tenemos, paraque haya cantidades iguales, que exerciendo oficios contrarios destruya la una el efecto que podia causar la otra; y por lo mismo nos podemos desentender de ambas, puesto que su reunion en nada altera el resultado. Así, si observamos, por exemplo, que la última cantidad -3650 es lo mismo que $-3000-650$, y colocamos estas dos en vez de la primera, tendremos:

$$2300-2\times500+3000-3000-650;$$

pero el $+3000$ con el -3000 quedan destruidos; porque lo que el uno aumenta el resultado, el otro le disminuye, y por lo mismo el resultado no dependerá en manera alguna de ellos; luego los podremos borrar y tendremos: $2300-2\times500-650$.

Ahora, el 2300 es lo mismo que $1300+1000$, y como 2×500 tambien es igual con 1000, la expresion de arriba se convertirá en

$$1300+1000-1000-650;$$

que borrando el $+1000$ y el -1000 por lo acabado de exponer, solo nos quedará $1300-650$;

y si observamos ahora que el 1300 es igual á dos veces 650, nos resultará que $2\times650-650$ será igual á una vez 650 ducados como antes; donde vemos que sin executar ninguna operacion formal, nos hemos puesto en el resultado.

No obstante, en esta operacion parece aun mas sencillo el otro método, porque el último exige esta descomposicion; pero quando las cantidades se señalan con letras está mas patente la destruccion. Más no es esta sola la ventaja del Algebra, sino que al mismo tiempo el resultado nos da á conocer si hemos caminado baxo un supuesto falso; porque, por exemplo, si caminamos en el supuesto de buscar ahorro, y nos encontramos con que se verifica lo contrario, el resultado de nuestra operacion nos lo debe dar á conocer, y esto lo executa por medio del signo negativo. Así, añadamos la circunstancia de la manutencion de las dos niñas, y tendremos que poner ademas de lo escrito antes, -2×400; de manera que toda la qüestion estará escrita de este modo:

$$2300-2\times500+3000-3650-2\times400;$$

haciendo la descomposicion del 2300 y del 3650 como antes, y observando que $2\times500=1000$ y que $2\times400=800$, se nos convertirá esta expresion en $1300+1000-1000+3000-3000-650-800$;

que borrando el $+1000$ con el -1000, y el $+3000$ con el -3000, se nos convertirá en $1300-650-800$;

y observando que el $1300=2\times650$, y que el -800 es lo mismo que $-650-150$, tendremos por último: $2\times650-650-650-150$;

en cuya expresion 2×650 quedará destruido por dos veces que se tiene el -650; luego resultará finalmente -150;
cuyo signo $-$ da á conocer que este resultado es contrario á lo que buscábamos, esto es, que en vez de ahorrar 150 ducados, se empeña en esto mismo; y el Algebra nos advierte quándo no hay resultado, fundándonos en lo que vamos á buscar, y al mismo tiempo nos da resuelta la qüestion opuesta, á que dan ocasion los datos que se conocen.

166 Si al resolver esta qüestion encontrásemos que el resultado era cero, diríamos que el sugeto ni ahorraba ni se empeñaba; y comparando el resultado anterior con este que sale *cero*, vemos que es mas ventajoso para el sugeto ahorrar cero que ahorrar -150; por esta causa se ha dicho que *las cantidades negativas eran menores que cero*; en lo qual no se ha procedido con el mayor acierto, puesto que formándonos nosotros la idea de cero, ó de la nada cuyo símbolo es, prescindiendo de todo lo que hay, para poder decir que hay nada; despues de haber prescindido de todo lo que hay, no se puede prescindir de mas, y por lo mismo no se puede formar idea de una cosa que sea aun menos que nada. No obstante esta es una expresion abreviada de que se usa para dar á conocer que una cantidad de esta especie reunida con otra de especie contraria, la disminuye en tanto quanto ella vale; luego esto equivale á menos que á haberle añadido nada ó cero.

Tambien ha conducido á esto el que, suponiendo que se pueda comparar una cantidad negativa con cero, resulta que el valor de aquella es menor que cero; porque sea por exemplo $-a$: si el valor de esta cantidad, comparado con nada ó cero no es menor, será igual ó mayor; si fuese igual, y supusiésemos que $-a=0$, como si á cosas iguales se añaden iguales, los resultados serán iguales, tendremos añadiéndoles $3a$ á ambas, que $3a-a=0+3a$; pero $3a-a$ es $2a$, porque podemos considerar á $-a$ como una unidad qualquiera, y quitando de tres veces esta unidad una vez esta unidad, nos resultará dos veces esta unidad ó $2a$;
y como $0+3a$ es $3a$, tendremos que $2a=3a$;
pero como esto es un absurdo, porque dos unidades ó cosas qualesquiera no pueden equivaler á tres; tendremos que el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo será; luego no puede ser $-a=0$.

Tampoco puede ser $-a>0$, porque en este caso añadiendo á ambas expresiones $3a$, tendríamos: $3a-a>0+3a$, ó $2a>3a$, absurdo tambien manifiesto; luego tampoco se puede suponer que $-a>0$, luego será forzosamente $-a<0$.

167 Figurémonos ahora que ajustamos las cuentas á otro sugeto, y encontramos que se empeña en 300 ducados cada año; si queremos comparar la situacion de estos dos sugetos, con el fin de averiguar el que mas se empeña, diremos que es este último; porque es mucho mayor 300 ducados que 150 ducados que sacámos antes. Pero si suponemos la qüestion resuelta por Algebra, con el fin de buscar el ahorro de este sugeto,

encontraríamos que su ahorro anual sería —300 ducados; y si quisiéramos comparar este ahorro con el anterior que era —150, no diríamos que —300 sea mayor ahorro que —150, sino al contrario; porque en un sentido absoluto, si buscamos qual de los dos ahorra mas, y encontramos que ninguno ahorra, el que tiene el estado mas ventajoso es aquel que menos se empeña. Por esta causa, quando se compara el valor absoluto de dos cantidades negativas, se dice que es mayor aquella que tiene menos unidades, esto es, que $-2a>-3a$.

Para demostrarlo con generalidad, observaremos igualmente que si $-2a$ no es mayor que $-3a$, será igual ó menor; si suponemos que sea igual, tendremos $-2a=-3a$, y añadiendo á ambas expresiones una misma cantidad, por exemplo $4a$, será $4a-2a=4a-3a$, ó $2a=a$, absurdo manifiesto; porque dos unidades ó cosas qualesquiera son mayores que una unidad ó cosa qualquiera. Si suponemos que $-2a<-3a$; añadiendo á ambas cantidades $4a$, será : $4a-2a<4a-3a$, ó $2a<a$, tambien absurdo; pues dice que dos cosas ó unidades son menores que una cosa ó unidad; luego sino puede ser $-2a$ ni igual ni menor que $-3a$, será mayor.

De todo esto se deduce que quando el resultado de una qüestion es negativo, responde á la qüestion opuesta ó al fin contrario de aquel para que se entabló el cálculo, ó que manifiesta una situacion contraria á la que nosotros supusimos; y que quando se considera en sí una cantidad señalada con el signo — sin suponerla el resultado inmediato de operacion, entonces al reunirse con otras cantidades hace menos efecto que el reunir cero en vez de ella.

168 Entendido esto, pasemos á manifestar los nombres con que se distinguen los varios conjuntos de letras que forman una expresion algebráica; ante todas cosas observaremos que quando se tiene repetida por sumando una misma letra, se omite esta repeticion, poniéndola una sola vez con un número antes que exprese las veces que está repetida por sumando, cuyo número se llama *coeficiente*; de manera que en vez de $a+a$ se escribe $2a$; en vez de $a+a+a+a$ se pone $4a$; en vez de $ab+ab+ab$, se pone $3ab$; y los números 2,4,3 son los coeficientes que *expresan que la cantidad á que afectan se ha de tomar por sumando tantas veces como unidades hay en ellos*. Tambien se pone coeficiente quando la letra ó cantidad está repetida con el signo —; y así, en vez de $-ab-ab-ab$ se pone $-3ab$. Quando una letra está repetida por factor, se pone una vez sola con un número escrito á su derecha un poquito mas alto, *que tenga tantas unidades como veces está repetida la letra por factor*; así, en vez de aa escribiremos a^2, en vez de aaa se escribe a^3, y en vez de $aaaaa$ se escribirá a^5. Este número se llama *exponente*, y su introduccion se debe á Descartes, con cuyo uso se evita la cacofonía que resulta de nombrar muchas veces de seguida una misma letra.

El coeficiente y el exponente convienen en una cosa, que es en que ambos expresan con sus unidades las veces que está repetida la letra ó cantidad á que ellos afectan; pero el coeficiente dice *que está repetida como sumando*, y el exponente *que está repetida como factor*. Así, no se debe confundir $3a$ con a^3; pues la una expresion es $a+a+a$, y la otra $a\times a\times a$ ó aaa; para hacer mas palpable el error que resultaria de confundir sus oficios, supongamos que a valga 4, y en este caso se tendrá que $3a=a+a+a=4+4+4=3\times4=12$, y $a^3=a\times a\times a=4\times4\times4=64$, resultados bien diferentes entre sí.

Tambien advertiremos que quando una letra se presenta sola tal como a, se le puede suponer la unidad por coeficiente, porque es una vez sumando en sí; la unidad por exponente, porque toda cantidad es una vez factor en sí; y tambien si se quiere la unidad por divisor, porque toda cantidad dividida por la unidad da por quociente la misma cantidad; por esta causa a es lo msimo que $1a$, que a^1, que $\frac{a}{1}$ y aun que $\frac{1a^1}{1}$.

Ahora, toda cantidad ó expresion de cantidad, sea de la especie que sea, separada de otras cantidades por medio del signo + ó —, se llama *término*; v. g. $-a$ se llama un término, $4ab$, $-5abc$, $\frac{ac}{e}$, $\frac{2ab}{cd}$, $\frac{a^4b^3c}{d-z}$ son tambien términos.

169 Se dice de un término que consta de tantas *dimensiones* quantas letras tiene, sino hay denominador; por exemplo: $+a$ es de una dimension, $4ab$ de dos, $-5abc$ de tres; donde debemos observar que el coeficiente no constituye dimension.

Si la expresion está en forma de quebrado, se saca su dimension de la diferencia entre el número de dimensiones del numerador y el del denominador; por exemplo: $\frac{ac}{e}$ es de una sola dimension, porque de dos dimensiones que hay arriba destruye una la dimension que hay abaxo, $\frac{2ab}{cd}$ es un término de dimension *nula*, ó de *cero* dimensiones, porque hay tantas dimensiones arriba como abaxo; y quando hay mas en el denominador que en el numerador, entonces se dice que es de una dimension *negativa*, expresada por la diferencia entre el número de dimensiones del denominador y el del numerador; así, el término $\frac{ab}{cde}$ es de *menos* una dimension. Finalmente quando las letras tienen exponente, se debe reputar cada letra por tantas dimensiones como unidades hay en su exponente. Así, $\frac{6a^4b^3c}{d^2}$ es un término de seis dimensio-

nes, porque a^4 se debe reputar por $aaaa$, b^3 por bbb, luego las dos juntas componen ya siete dimensiones, y una á causa de la c son ocho; y como en el denominador hay dos dimensiones á causa del exponente de la d, resultan seis dimensiones en el término.

170 Quando una expresion algebráica consta de un solo término se llama *monomia*, ó se dice que es un *monomio*: quando de mas de uno se llama en general *polinomio*, distinguiéndose en particular con los nombres de *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, &c. quando consta de *dos*, *tres*, *quatro*, &c. monomios. Así, las expresiones $a+b$, $3a^4-4b^2c^2$ son binomios, de los quales a y $3a^4$ son los primeros términos, y $+b$, $-4b^2c^2$ son los segundos; las expresiones $a+b-c$, a^2+b^2-cd son trinomios; la $5a^4b^2-7a^5c+3b^2d^3c-6c^6$ es un quadrinomio, &c.

Quando todos los términos de un polinomio tienen un mismo número de dimensiones, se dice que el polinomio es *homogéneo*; y quando no se verifica esta circunstancia que es *heterogéneo*. Todos los que hemos puesto hasta ahora son polinomios homogéneos; pero el $ab-c+3b^2d^3$ es un polinomio heterogéneo, porque el primer término tiene dos dimensiones, el segundo una y el tercero cinco.

171 Quando ya por la traduccion que hagamos de una qüestion al lenguage algebráico, ya por haber executado alguna operacion, lleguemos á tener un polinomio, debemos ante todas cosas averiguar si hay términos *semejantes*: advirtiendo que se da este nombre de semejantes *á aquellos que tienen unas mismas letras con unos mismos exponentes*; en cuyo caso aquel polinomio se puede poner baxo una forma mas sencilla; y como el Algebra trata de presentar los resultados con la mayor sencillez posible, se debe executar siempre esta simplificacion.

Sabiendo ya que hay términos semejantes, puede suceder una de dos cosas: ó que tengan un mismo signo ó que le tengan diferente; si tienen un mismo signo, la simplificacion que se hace se llama *reduccion*; para lo qual *no hay mas que sumar los coeficientes de los términos semejantes que llevan el mismo signo, y poner este coeficiente á uno de estos términos con su signo*. Quando los terminos semejantes tienen diferente signo, entonces la simplificacion que hay que hacer, se llama *destruccion*; y para executarla *se restan entre sí los coeficientes*, y *se pone una vez un término de ellos, con el signo que llevaba el término que le tenia mayor, y cuyo coeficiente sea la diferencia entre los coeficientes*.

Para hacer aplicacion de esto, supongamos que tenemos el siguiente polinomio: $2a^3-8bc+2ac+5a^3+5bc-d^2+a^3-5d^2-2ac+2b^3$;
en el qual observamos que hay tres términos donde se halla a^3 con un mismo signo, y por lo mismo hay tres términos semejantes con él; pues para la semejanza en nada influye el que tengan diferente coeficiente; y como tienen un mismo signo haremos la reduccion diciendo: 2, coeficiente de $2a^3$, y 5, coeficiente de $5a^3$, son 7, y 1 coeficiente de a^3 (§ 168), son 8; luego colocaré ó deberé poner un término en que haya a^3, con un

coeficiente 8 y con el signo +, que es el que llevan dichos términos; pero como es el primero que se vá á poner, se omitirá dicho signo. Luego, vemos que hay dos términos donde se halla bc, y como tienen diferente signo, haré la destruccion diciendo: la diferencia entre 8 y 5 son 3, que será el coeficiente que deberé poner á bc; y como el término $-8bc$ es el que tiene mayor coeficiente, deberé poner el signo — al $3bc$; como hay dos términos semejantes con d^2 y tienen un mismo signo, se hará la reduccion diciendo: 1, coeficiente de $-d^2$, y 5, coeficiente de $-5d^2$, son 6, que deberé poner por coeficiente al d^2 con el signo —, y tendré $-6d^2$; por fin paso á hacer la destruccion de los términos $+2ac$ y $-2ac$, diciendo: la diferencia entre 2 y 2 es cero, que deberá ser el coeficiente de ac; pero el cero por coeficiente manifiesta que no está el término aquel ninguna vez por sumando, y por lo mismo no se deberá poner. Quando ocurren términos que ademas de ser semejantes, son iguales por tener un mismo coeficiente, y tienen diferente signo como en este caso, el lenguage que se usa es decir como aqui: $+2ac$ y $-2ac$ *se destruyen*, y se borran, tachan ó rayan en el parage donde se hallan; y como ya no hay mas que el $+2b^3$ que no tiene ninguno semejante con él, este quedará del mismo modo en el resultado, el qual será:

$$8a^3-3bc-6d^2+2b^3.$$

Esta práctica consiste en que cada término sin coeficiente se puede considerar como una cosa qualquiera ó como una unidad; si tiene coeficiente, equivaldrá (168) á tantas veces aquella cosa ó unidad como unidades hay en su coeficiente. Luego si tenemos dos términos semejantes con un mismo signo, los dos equivaldrán á tantas veces aquella cosa ó unidad, como exprese la suma de dichos coeficientes; porque en la Aritmética, para averiguar á lo que equivalen dos números de cosas qualesquiera, se suman los números que expresan las cosas que hay, cuyos números son aqui los coeficientes. Quando los términos semejantes tienen diferente signo, como los que tengan el signo + conspiran á aumentar lo que buscamos, y los que el — á disminuirlo, en el que tenga mayor coeficiente quedará inutilizada una parte igual con el otro; la qual no influyendo en el resultado, se omite y queda solo la parte que influye, como aqui en $-8bc$ y $+5bc$: el $-8bc$ dice que ocho veces la cosa, unidad ó producto bc, influye contra el resultado que buscamos; el $+5bc$ nos dice que la cosa ó producto bc influye cinco veces á favor del resultado; luego estas cinco veces á favor, inutilizarán el efecto de cinco veces en contra; luego de los dos términos, solo nos quedará tres veces el bc que influye contra el resultado, ó $-3bc$.

De la suma de las cantidades algebráicas.

172 *Sumar en Álgebra es reunir en una sola expresion el valor de dos ó mas.* El Álgebra tiene sobre la Aritmética la ventaja de que quando por su medio se halla un resultado, este nos da la regla general que de

bemos practicar en todos los casos de la misma especie; nos propondremos hallar la suma de $+a$ con $+b$, y de $+a$ con $-b$, y el resultado nos suministrará la regla que debemos seguir para hallar la suma en todos los demas casos.

Con esta mira colocaremos debaxo del $+a$ el $+b$, tiraremos una raya, y debaxo de ella indicaremos la operacion de sumar del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} +a \\ +b \\ \hline +a+(+b) \end{array}$$

Señalamos aqui cada letra con su signo, porque el Álgebra no solo considera el valor absoluto de las cantidades, sino su modo de exîstir; y en nuestra indicacion el signo $+$ que hay fuera del paréntesis, indica que lo que hay dentro de él se ha de agregar á lo que hay fuera que es el $+a$; el signo $+$ de dentro del paréntesis indica que la cantidad $+b$, que está dentro, es positiva, esto es, que conspira al fin que nos proponemos; y como el fin que nos proponemos es aumentar por la reunion de las dos cantidades, tendremos que no habrá mas que reunir la b con el signo que indica su naturaleza, con $+a$, y nos resultará que $+a+(+b)=a+b$; y comparando este resultado con los datos que se nos dieron, vemos que *se ha executado la suma, solo con poner los dos sumandos uno á continuacion del otro con los mismos signos que llevaban.*

Supongamos ahora que con $+a$ se quiere reunir $-b$; en este caso indicaremos la operacion de este modo: $+a+(-b)$;
el signo de fuera del paréntesis indica que lo que hay dentro, se debe reunir con lo que está fuera; y como el signo $-$ de dentro del paréntesis indica que la naturaleza de la cantidad $-b$ es de conspirar al fin contrario del que se propone el calculador, resulta que siendo aqui el fin que nos proponíamos aumentar, el fin contrario será disminuir; luego deberemos reunir la b con la a, poniendo entre las dos el signo $-$ que indica esta diminucion; luego tendremos: $+a+(-b)=+a-b$.

Si ahora á esta suma tratásemos de añadirle otros sumandos qualesquiera, por exemplo: $+c$, $-3a$, $+4b$, lo indicaríamos de este modo:

$$+a-b+(+c)+(-3a)+(+4b);$$

que haciendo el mismo raciocinio que antes, tendremos por resultado:

$$+a-b+c-3a+4b;$$

y como lo mismo podríamos executar con todos los sumandos que se nos propusiesen, deducimos de estos resultados la siguiente regla general.

Para sumar en Algebra *no hay mas que poner todos los sumandos, los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que llevan: y como en todo resultado se debe averiguar si hay reduccion ó destruccion se deberá hacer despues.* Executando la reduccion y destruccion (171) en la expresion anterior se nos convertirá en $-2a+3b+c$.

Ahora, quando en un resultado la primer cantidad es negativa, se procura poner antes una positiva; porque de este modo nos ahorramos el poner un signo, puesto que el signo $+$ al principio de escritura se omite; así, la expresion antecedente la escribiremos de este modo: $c-2a+3b$.

173 Una de las propiedades mas sobresalientes del Algebra es la generalidad con que da los resultados; por lo mismo para abrazar á un tiempo dos qüestiones suele usar del signo $\pm$ que se llama signo de *ambigüedad*; y quiere decir que la cantidad á que afecta puede ser positiva ó negativa, y usando de este signo se demuestran á un tiempo las propiedades respecto de las unas y de las otras. Conviene que los principiantes se acostumbren á usar de este signo, y por lo mismo vamos á dar de una vez, usando de él, las dos demostraciones del párrafo anterior; para lo qual supondremos que con $+a$ se quiera reunir la cantidad $\pm b$; indicando nuestra operacion será: $+a+(\pm b)$;
y tendremos que el signo que hay fuera nos dice que se debe agregar á $+a$ lo que hay dentro del paréntesis; pero el signo de ambigüedad que hay dentro, nos dice que la cantidad b puede ser positiva ó negativa: quando es positiva conspira al fin que nos proponemos, y quando es negativa al fin contrario; luego en el resultado deberá quedar la misma duda; luego se deberá poner á continuacion de $+a$, con el signo de ambigüedad, y será: $+a+(\pm b)=+a\pm b$;
de donde podemos sacar de una vez la regla general para sumar. Esta regla que sacamos respecto de los monomios, es exâctamente la misma para los polinomios; porque si á $a\pm b$ quisiésemos añadir $\pm 3c\pm bd$, quedaria executada la suma con añadir todas las partes del $\pm 3c\pm bd$, pues entonces habiendo reunido todas las partes, tendríamos reunidos los todos; luego iríamos indicando nuestra operacion del modo siguiente:

$$a\pm b+(\pm 3c\pm bd)=a\pm b+(\pm 3c)+(\pm bd);$$

que, en virtud del raciocinio anterior, se convierte en $a\pm b\pm 3c\pm bd$; que da para los polinomios la misma regla que para los monomios.

Ahora solo falta que pongamos aqui algunos exemplos de sumar polinomios, con cuyo objeto nos propondremos sumar $4a^2b+3b^2c-5abc$, con $7abc+3d^2-3b^2c$, y con $5d^2+3d^2e-6a^2b$. Para esto aconsejan los autores que se coloquen los sumandos unos debaxo de otros como en la Aritmética, y que se ponga la suma debaxo de la raya, como aqui se presenta:

$$\begin{array}{l} 4a^2b+3b^2c-5abc \\ 7abc+3d^2-3b^2c \\ 5d^2+3d^2e-6a^2b \\ \hline 4a^2b+3b^2c-5abc+7abc+3d^2-3b^2c+5d^2+3d^2e-6a^2b \end{array}$$

y haciendo en la suma la reduccion y destruccion (171), se tendrá:

$$-2a^2b+2abc+8d^2+3d^2e, \text{ ó } 2abc+8d^2+3d^2e-2a^2b;$$

pero aunque los autores hacen dicha colocacion al explicar las operaciones, como despues no hacen uso de ella en la práctica (porque esto es separarse del curso de lo que se va executando, y es contra el objeto del Algebra, que trata de ir escribiendo las qüestiones y luego dar transformaciones hasta llegar al resultado mas sencillo) nosotros executaremos

esto, siguiendo la marcha del Algebra; esto es, indicando las operaciones y poniendo las transformaciones al lado, separándolas con el signo $=$; pues de este modo qualquiera que tome la operacion, leerá lo que se está executando; siendo así que estando colocados los sumandos como alli se presenta, no podríamos saber si esta colocacion era para sumarlos, ó para restar del primero la suma del segundo con el tercero, ó de la suma del primero y segundo restar el tercero, ó para multiplicarlos todos entre sí ó para qualquiera otra operacion.

Y así, pues que el Álgebra es una lengua, escribiremos en ella nuestra qüestion, del modo siguiente:

$$(4a^2b+3b^2c-5abc)+(7abc+3d^2-3b^2c)+(5d^2+3d^2e-6a^2b);$$

aqui encerramos dentro de un paréntesis á cada sumando, porque un signo qualquiera solo extiende sus facultades hasta donde encuentra un signo $+$ ó un signo $-$, de lo qual ya diximos algo en la Aritmética (53).

Ahora, practicando la regla (172) que equivale aqui á suprimir los paréntesis, se nos convertirá en

$$4a^2b+3b^2c-5abc+7abc+3d^2-3b^2c+5d^2+3d^2e-6a^2b,$$

que despues de hecha la reduccion y destruccion, resulta

$$2abc+8d^2+3d^2e-2a^2b.$$

Paraque los principiantes se exerciten, pondremos aqui dos exemplos en que solo se presentan indicadas las operaciones y transformaciones, sin explicacion:

1.° $(3b^2a+5a^2c-7abd)+(2b^2-5a^3)+(6abd+5a^3-7a^2c+6b^2a)+(7c^3-5a^4)=3b^2a+5a^2c-7abd+2b^2-5a^3+6abd+5a^3-7a^2c+6b^2a+7c^3-5a^4=9b^2a-2a^2c-abd+2b^2+7c^3-5a^4.$

2°. $(5a^3b^3c+8a^2b^3d-7abc^4)+(16abc^4-9a^2b^3d+32a^2b^5)+(9a^5m-3a^3b^3c)+(5a^4b^2-2abc^4)=5a^3b^3c+8a^2b^3d-7abc^4+16abc^4-9a^2b^3d+32a^2b^5+9a^5m-3a^3b^3c+5a^4b^2-2abc^4=2a^3b^3c-a^2b^3d+7abc^4+32a^2b^5+9a^5m+5a^4b^2.$

De la operacion de restar cantidades algebráicas.

174 *Restar en Álgebra es, del mismo modo que en Aritmética, hallar la diferencia entre dos cantidades, ó quitar una cantidad de otra dada.*

Para hallar las reglas que nos deben conducir en la operacion de restar, supondremos que de $+a$ se quiera quitar $\pm b$; y tendremos indicando la operacion: $a-(\pm b)$;

ahora, el signo $-$ que está fuera del paréntesis, indica (163) que la cantidad á que afecta, influye en el resultado de un modo inverso al que influiria si tubiese el signo $+$; pero si tubiese el signo $+$ el resultado de esta operacion seria (§ 173) $a\pm b$: luego como aqui ha de ser el inverso, será: $a-(\pm b)=a\mp b$; en cuyo resulta lo tenemos á un mismo tiempo estos dos: $a-(+b)=a-b$, y $a-(-b)=a+b$;

que pudiéramos haber sacado separadamente; pero hemos preferido ha-

cerlo así, para acostumbrar quanto antes al principiante á los resultados generales.

Para sacar de un resultado donde entran signos de ambigüedad, los dos que estan comprendidos en él, la máxîma que hay que seguir es tomar un resultado con los signos superiores, y otro con los inferiores, como hemos hecho aqui.

Si en vez de ser monomio el subtraendo fuese un polinomio, estaria reducido á ir indicando la sustraccion de todas sus partes; de manera que si de $a \pm b$ quisiéramos restar $\pm c \mp d$, indicaríamos nuestra operacion del modo siguiente: $(a \pm b)-(\pm c \mp d)$, ó $a \pm b-(\pm c)-(\mp d)$; que en virtud del raciocinio anterior se convierte en $a \pm b \mp c \pm d$; lo qual nos suministra esta regla para la práctica: para restar cantidades algebráicas *no hay mas que poner el minuendo y á su continuacion el subtraendo mudándole los signos* (*).

175 Podríamos aqui colocar tambien el subtraendo debaxo del minuendo, y efectuar la operacion como lo hacen comunmente los autores; pero nosotros seguiremos la marcha del Álgebra, indicando la operacion. Así, si nos proponemos restar de $5ab+3b^2-7c^3+4b^2c$ la cantidad $7b^2-4b^2c+2ab-d^2-5c^3$, primero indicaremos la operacion encerrando el subtraendo dentro de un paréntesis, luego practicaremos la regla que acabamos de dar, y finalmente haremos la reduccion como aqui se presenta:

$5ab+3b^2-7c^3+4b^2c-(7b^2-4b^2c+2ab-d^2-5c^3)=5ab+3b^2-7c^3+4b^2c-7b^2+4b^2c-2ab+d^2+5c^3=3ab-4b^2-2c^3+8b^2c+d^2$.

Si de $17a^7b^2-8c^4d+6a^2b^2c^3-5a^4$ quisiese restar la cantidad $3a^2b^2c^3-d^9-5a^7b^2-8c^4d$ executaria la operacion como aqui se ve:

$17a^7b^2-8c^4d+6a^2b^2c^3-5a^4-(3a^2b^2c^3-d^9-5a^7b^2-8c^4d)=17a^7b^2-8c^4d+6a^2b^2c^3-5a^4-3a^2b^2c^3+d^9+5a^7b^2+8c^4d=\ldots$
$22a^7b^2+3a^2b^2c^3-5a^4+d^9$.

De la multiplicacion algebráica.

176 *Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra, y tomarla del modo que diga se debe tomar.* Añadimos aqui esta circunstancia, porque como en el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino tambien á su modo de exîstir, el mul-

---

(*) *Laplace da la siguiente demostracion de la regla de los signos en esta operacion.*

Si de la cantidad a+b, *se tubiese que quitar* b, *es evidente que se tendria* a *por resultado; del mismo modo si de* ±a=±a+b−b, *nos proponemos quitar* +b, *viene por resta*: ±a−b;
y si de ±a=±a+b−b *se quita* −b, *la resta será*: ±a+b;
lo que demuestra la regla de los signos, esto es, que se han de mudar los del subtraendo.

tiplicador con sus unidades nos dice las veces que debemos tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que le debemos tomar.

En la multiplicacion algebráica pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un monomio por otro*; *un polinomio por un monomio*, ó al contrario; *y un polinomio por otro polinomio.*

Para multiplicar un monomio por otro, hay que atender á quatro cosas: á los *signos*, á los *coeficientes*, á las *letras* y á los *exponentes.*

Diofanto tomaba por axîoma que — por — daba +, y que — por + da —, pues hacia que entrase esto en la definicion 9.ª del libro 1.º

Para demostrar nosotros la regla de los signos, nos propondremos multiplicar $+a$ por $+b$, ó para mayor sencillez y claridad, tomaremos por multiplicador la unidad; y así indicaremos nuestra operacion de este modo: $+a\times+1$;
ahora, el multiplicador $+1$ nos dice con sus unidades que tomemos una vez al multiplicando, y con su signo + nos dice que le tomemos como él sea; el multiplicando $+a$ es positivo, luego le deberemos tomar una vez positivamente, y será por consiguiente el producto $+1a$ ó $+a$, omitiendo el coeficiente 1; luego $+a\times+1=a$ que en quanto á los signos da
$+\times+=+$.

Supongamos ahora que el multiplicador sea -1, y tendremos indicada nuestra operacion de este modo: $+a\times-1$;
aqui el multiplicador con sus unidades nos dice que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le tomemos al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le deberemos tomar una vez negativamente, y se tendrá: $+a\times-1=-1a=-a$;
lo que en punto á los signos da: $+\times-=-$.

Supongamos ahora que el multiplicando sea negativo tal como $-a$; si el multiplicador es $+1$, tendremos indicada la operacion de este modo:
$-a\times+1$;
donde el multiplicador $+1$ nos dice con sus unidades que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le debemos tomar como él sea; el multiplicando es negativo, luego le deberemos tomar una vez negativamente, y será: $-a\times+1=-1a=-a$;
lo que da para los signos $-\times+=-$.

Finalmente si el multiplicador fuese -1, tendríamos indicada la operacion de este modo: $-a\times-1$;
donde el multiplicador -1 nos dice con sus unidades que debemos tomar al multiplicando una vez, y con su signo que le debemos tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego le deberemos tomar positivamente, y se tendrá: $-a\times-1=+1a=a$;
lo que da para los signos $-\times-=+$.

Estos quatro casos se convierten en estos dos, á saber: que *signos semejantes*, esto es, + por + ó — por —, ó *en general* ± por ± ó ∓ por ∓, *dan siempre + en el producto*; *y signos desemejantes*, esto es,

+ por — ó — por +, ó *en general* ± por ∓ ó ∓ por ±, *dan siempre en el producto* — (*).

Ahora, como los coeficientes son números, *se multiplican por las reglas de Aritmética*: en punto á las letras que son diferentes en ambos factores, *se ponen unas á continuacion de otras sin interposicion de signos ningunos*; porque aqui quando entre dos letras no hay ningun signo, se da á conocer que estan multiplicadas.

En punto á los exponentes, *los de una misma letra se suman*; porque si se tiene que multiplicar a^3 por a^2, el exponente 3 del multiplicando nos dice que la a es tres veces factor, y el 2 del multiplicador nos dice que la a es en este dos veces factor; y como en el producto se

---

(*) *Laplace demuestra la regla de los signos del modo siguiente.*

Si se tiene que multiplicar a—a *por* +b *el producto debe ser* ab—ab; *porque siendo cero el multiplicando el producto debe ser cero*; *pero siendo el primer término* +ab, *el segundo debe ser* —ab *para satisfacer á esta condicion*; *luego* —a×+b=—ab.

Si se tiene que multiplicar a *por* b—b, *se hallará*, *haciendo el mismo razonamiento*, ab—ab *por producto*; *luego* 2.° +a×—b=—ab.

En fin, si se multiplica —a *por* b—b, *el primer término del producto siendo por lo que acabamos de demostrar* —ab, *el segundo será necesariamente* +ab: *en efecto*, —ab+ab=o; *luego* 3.° —*a*×—b=+ab.

El célebre Euler en su Álgebra da la demostracion de los signos de esta manera. Primero multiplica una cantidad positiva por otra positiva, y dice con razon que no hay motivo para dudar de que el producto sea +, *por lo que* +*a*×+b=+ab. *Pero se propone exâminar aparte lo que debe provenir de la multiplicacion de* +a *por* —b, *y de* —a *por* —b.

Principiemos (dice) por multiplicar —a *por* 3 ó +3, *y puesto que* —a *se puede considerar como una deuda, es claro que si se toma tres veces esta deuda, debe tambien hacerse tres veces mayor, y por consiguiente el producto buscado es* —3a. *Igualmente, si se trata de multiplicar* —a *por* +b, *se obtendrá* —ba, *ó lo que es lo mismo* —ab. *De aqui sacamos la conseqüencia de que una cantidad positiva multiplicada por una negativa, da un producto negativo; y establecemos por regla que* + *por* + *da* + *ó* mas, *y que al contrario* + *por* — *ó* — *por* + *da* —.

Aun nos falta (continúa) resolver el caso de — *multiplicado por* —, *ó por exemplo*, —a *por* —b. *Es evidente desde luego, que en quanto á las letras el producto será* ab; *pero aun es incierto si este producto ha de llevar el signo* + *ó el signo* —; *todo lo que se sabe es que será el uno ó el otro de estos signos; pero yo digo que no puede ser el signo* —; *porque* —a *por* +b *da* —ab, *y* —a *por* —b *no puede dar el mismo resultado que* —a *por* +b, *sino que debe dar el opuesto, es decir*, +ab: *por consiguiente tenemos esta regla*: — *multiplicado por* — *da* + *del mismo modo que* + *multiplicado por* + *da* +.

hallará la *a* tantas veces por factor como se halla en el multiplicando y multiplicador juntos, se deberá hallar tantas veces como unidades haya en ambos exponentes juntos; luego se deberá encontrar la letra en el producto con un exponente igual á la suma de los de los factores. Este raciocinio se hará sensible de este modo:

$$a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}.$$

Ahora, solo falta que apliquemos estas reglas á algunos exemplos. Propongámonos en primer lugar multiplicar $+5b^2a^3ce$ por $+3a^2b^4cd^2$, y diremos: $+$ por $+$ da $+$ que pondremos en el producto; 5 por 3 son 15 que pondremos despues del signo $+$; b^2 por b^4, sumando sus exponentes, será b^6; a^3 por a^2, sumando sus exponentes, será a^5; c por c, sumando sus exponentes que son 1, será c^2; y como no hay e en el multiplicador, ni d^2 en el multiplicando, se pondrán estas letras á continuacion las unas de las otras despues de lo que ya hemos sacado; de manera que tendremos: $+5b^2a^3ce \times +3a^2b^4cd^2 = +15b^6a^5c^2ed^2$.

Otros exemplos de multiplicacion de monomios:

$$(1.^o) -6a^4b^3c^2d^7 \times -4a^5d^3cm^4 = +24a^9b^3c^3d^{10}m^4.$$

$$(2.^o) -3a^6b^4m^5cd \times ab^8m^5c^4n^3 = -3a^7b^{12}m^{10}c^5dn^3.$$

Quando los exponentes son indeterminados, esto es, quando son letras, se indica la suma de los exponentes de los factores; así, si se quiere multiplicar $+3a^mb^3c^nd^r$ por $-5b^sa^te^5d^s$, tendremos que el producto será $-15a^{m+t}b^{3+s}c^nd^{r+s}e^5$.

177 Quando ocurre multiplicar muchos monomios entre sí, *se multiplican primero todos los signos*, *esto es*, *se ve qué signo resulta del conjunto de todos*; *despues se multiplican todos los coeficientes*; *luego se suman todos los exponentes de una misma letra*, *y las que no se hallen sino en un factor quedarán del mismo modo en el producto.* Así, si me propusiera multiplicar $5a^2bc^3$ por $-3a^4c^5m$, y esto por $2c^3b^4$, y lo que resultase por a^3c^2br, indicaria y executaria la operacion como aqui se ve: $5a^2bc^3 \times -3a^4c^5m \times 2c^3b^4 \times a^3c^2br = -30a^9b^6c^{13}mr$, diciendo: $+$ por $-$ da $-$, y por $+$ que tienen los otros dos da $-$ que pongo en el producto; luego, 5 por 3 son 15; 15 por 2 son 30, que pongo; sumo los exponentes de la *a*, y hallo que su suma es 9, y executando lo mismo con los demas tendré el producto que alli se presenta.

178 Para multiplicar un polinomio por un monomio, ó un monomio por un polinomio *se multiplicará cada término del polinomio por el monomio*; así, si tubiera que multiplicar $4b^3c^2 - 3a^2d^5 + 6bcd^4$ por $-5a^7d^6c$, indicaria así la operacion: $(4b^3c^2 - 3a^2d^5 + 6bcd^4) \times -5a^7d^6c = \ldots$
$-20b^3c^3a^7d^6 + 15a^9d^{11}c - 30bc^2d^{10}a^7$;
y multiplicaria el primer término $4b^3c^2$ por $-5a^7d^6c$, lo que (176) nos dará $-20b^3c^3a^7d^6$; luego, pasaria á multiplicar el $-3a^2d^5$ por $-5a^7d^6c$, lo que dará por producto $+15a^9d^{11}c$; y por último pasaré á multiplicar el $+6bcd^4$ por $-5a^7d^6c$, que dará $-30bc^2d^{10}a^7$, y tendremos que el producto será el que alli se presenta.

Si en el polinomio que sirve de multiplicando ó multiplicador, no se puede hacer reduccion ni destruccion, tampoco se podrá hacer en el producto; porque despues de haber añadido á cada término las letras que tenga el monomio que sirve de factor, no podrán hallarse términos que sean semejantes; y como al proponer una qüestion se deben presentar los datos simplificados, ó se deben simplificar antes de empezar á executarla, resulta que podemos establecer en general: que *de la multiplicacion de un polinomio por un monomio, no puede resultar simplificacion.*

Otros exemplos de multiplicacion:

(1.º) $2a^4b^3c^2 \times (5a^5d^4c^2 - 3b^4c + 8c^7d^6a^5m^6) = \ldots$
$10a^9b^3c^4d^4 - 6a^4b^7c^3 + 16a^9b^3c^9d^6m^6$.

(2.º) $(8a^4b^5c^md^2 - 6a^rc^nd^p + 7c^2b^5ad - 7a^4b^nc^7) \times -3a^2b^rc^qd^4 = \ldots\ldots$
$-24a^6b^{5+r}c^{m+q}d^6 + 18a^{r+2}c^{n+q}d^{p+4}b^r - 21a^3b^{5+r}c^{2+q}d^5 + 21a^6b^{r+n}c^{7+q}d^4$.

179 Para multiplicar un polinomio por otro polinomio, *se multiplica primero todo el multiplicando por el primer término del multiplicador; despues todo el multiplicando por el segundo término del multiplicador; despues por el tercero, &c. se van colocando los productos unos á continuacion de otros con los signos con que vayan saliendo; luego, se ve si hay reduccion ó destruccion, y se executa si se puede.*

Propongámonos, por exemplo, multiplicar $a+b$ por $a-b$, y tendremos que multiplicar primero $a+b$ por a, lo que da a^2+ab; y luego el multiplicando $a+b$ por $-b$, lo que da $-ab-b^2$, que puesto á continuacion del anterior da: $(a+b)(a-b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2$, porque $+ab$ con $-ab$ se destruye.

Este resultado le debemos traducir en regla, porque nos será muy útil en lo sucesivo, y nos dice: que *la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de estas cantidades con un exponente duplo del que tenian en los factores* (*); así es, que si en general se tiene que multiplicar a^m+b^m por a^m-b^m, su producto será $a^{2m}-b^{2m}$, como se ve en la operacion que aqui se presenta:

$$(a^m+b^m)(a^m-b^m) = a^{2m}+a^mb^m-a^mb^m-b^{2m} = a^{2m}-b^{2m}.$$

Propongámonos ahora multiplicar $5a^4b^3+3b^4a^3-2a^2b^5$ por a^2-b^2, y tendremos indicando la operacion:

$(5a^4b^3+3b^4a^3-2a^2b^5)\times(a^2-b^2) = 5a^6b^3+3b^4a^5-2a^4b^5-5a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7 = 5a^6b^3+3b^4a^5-7a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7$;

multiplicaremos primero todo el multiplicando por el primer término a^2 del multiplicador, lo que nos dará por producto $5a^6b^3+3b^4a^5-2a^4b^5$; despues multiplicaremos todo el multiplicando por el segundo término $-b^2$ del multiplicador, y el producto $-5a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7$, le ire-

(*) *Como* a^2 *veremos en adelante que es el* quadrado *de* a, *y* b^2 *el de* b, *esta proposicion se enunciará*: la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia da la diferencia de sus quadrados.

mos colocando á continuacion del primero como alli se ve; y executando la reduccion sale por último $5a^6b^3+3b^4a^5-7a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7$.

Si tubiéramos que multiplicar $6a^2b^2+4b^3a+a^4+4a^3b+b^4$ por $b^3-3ab^2-a^3+3a^2b$, indicaríamos y executaríamos la operacion como aqui se presenta: $(6a^2b^2+4b^3a+a^4+4a^3b+b^4)\times(b^3-3ab^2-a^3+3a^2b)=6a^2b^5+4b^6a+a^4b^3+4a^3b^4+b^7-18a^3b^4-12a^2b^5-3a^5b^2-12a^4b^3-3ab^6-6a^5b^2-4b^3a^4-a^7-4a^6b-a^3b^4+18a^4b^3+12a^3b^4+3a^6b+12a^5b^2+3a^2b^5=-3a^2b^5+ab^6+3a^4b^3-3a^3b^4+b^7+3a^5b^2-a^7-a^6b$

Del mismo modo si tubiéramos que multiplicar $a^4b+ab^4+a^3b^2+a^2b^3+a^5+b^5$ por $a-b$, indicaríamos la operacion y sacaríamos el resultado que aqui se presenta:
$(a^4b+ab^4+a^3b^2+a^2b^3+a^5+b^5)\times(a-b)=a^5b+a^2b^4+a^4b^2+a^3b^3+a^6+ab^5-a^4b^2-ab^5-a^3b^3-a^2b^4-a^5b-b^6=a^6-b^6$.

180 Antes de concluir la multiplicacion generalizaremos la proposicion (55); pues en todo lo que hemos dicho hasta aqui, hemos supuesto que la colocacion de los factores no influía en el producto; y como reflexionando con atencion la demostracion que dimos para probar que el producto era el mismo, ya se tomase por multiplicando al multiplicador ó al contrario, se echará de ver que era solo aplicable á los números enteros: vamos ahora á probar que esta proposicion siempre es verdadera.

Supongamos que los dos números sean A y B; si fuesen estos dos números iguales, entonces no hay dificultad en que $A\times B=B\times A$, puesto que substituyendo A en lugar de B ó B en lugar de A, tendrian ambos la forma $A\times A$ ó $B\times B$. Si son desiguales supongamos que A sea el mayor, y C la diferencia; con lo qual tendremos: $A=B+C$, por lo que substituyendo en vez de A este valor, se tendrá:

$A\times B=(B+C)\times B=B\times B+C\times B$, y $B\times A=B\times(B+C)=B\times B+B\times C$; donde vemos que como ambas expresiones convienen en el primer término del producto, serán iguales si llegamos á probar que $C\times B$ es lo mismo que $B\times C$. Del mismo modo si C y B no fuesen iguales, llegaríamos á demostrar, si suponíamos que B era el mayor é igual á $C+D$, que $C\times B$ y $B\times C$ serian iguales, si $C\times D$ y $D\times C$ lo eran; y continuando así, se llegaria á un caso en que los dos factores fuesen iguales entre sí, ó que el uno de ellos fuese igual con la unidad. En el primer caso hay igualdad como notámos al principio; en el segundo vendremos á tener $H\times 1$, y $1\times H$; pero en la idea que tenemos del número entra que una vez un número es lo mismo que aquel número de unidades; luego será lo mismo H veces uno que una vez H; y como la verdad de los resultados anteriores depende de la de este último se deduce que $A\times B=B\times A$.

Esta demostracion se extiende á todos los casos en que los factores (sean de la especie que sean) tengan una comun medida con la unidad; pero como hay muchas cantidades que no la tienen, acabaremos de generalizar esta proposicion, quando hayamos dado á conocer la existencia de estas cantidades.

De la division algebráica.

181 *Dividir en Álgebra es buscar quántas veces una cantidad contiene á otra, y del modo que la contiene*; de donde resulta que el divisor multiplicado por el quociente que obtengamos debe dar el dividendo; y por lo mismo podemos decir que el objeto que nos proponemos al executar una division algebráica es: *hallar una cantidad que multiplicada por el divisor dé el dividendo.*

En la division algebráica pueden ocurrir quatro casos: *dividir un monomio por otro*; *dividir un polinomio por un monomio*; *dividir un monomio por un polinomio*; y *dividir un polinomio por otro polinomio.*

Para dividir un monomio por otro hay que atender á quatro cosas que son: *signos*, *coeficientes*, *letras y exponentes.*

En punto á signos se observa la misma regla que en la multiplicacion, á saber: que signos semejantes dan + en el quociente, y signos desemejantes dan —. Para demostrarlo supongamos que se tenga que dividir una cantidad que lleve el signo + por otra que lleve tambien el signo +, esto es, $+a$, v. g., por $+b$, ó haciendo para mayor sencillez $b=1$, $+a$ por $+1$; é indicaremos la operacion del modo siguiente: $\frac{+a}{+1}$; ahora en el mismo hecho de querer intentar la operacion de dividir, consideramos al dividendo como un producto; y como el signo + de un producto solo puede provenir de + por + ó de — por —, y aqui conocemos el signo + de uno de los factores que es el divisor, resulta que solo puede provenir de + por +; luego el signo del otro factor que es el quociente que buscamos, será +; y como por otra parte la unidad está contenida en otra cantidad tantas veces como unidades tiene ella, 1 estará contenido en a, a veces, y por lo mismo tendremos:

$$\frac{+a}{+1}=+a\text{, ó atendiendo solo á los signos }\frac{+}{+}=+.$$

Sea ahora $\frac{-a}{+1}$, como debemos considerar al dividendo como un producto, su signo provendrá de + por — ó de — por +; pero como uno de estos signos ha de ser el + del divisor, resulta que el del otro factor que es el quociente, será —; luego en virtud de esto, y de lo que acabamos de exponer en el caso anterior, se tendrá:

$$\frac{-a}{+1}=-a\text{, ó con relacion solo á los signos }\frac{-}{+}=-.$$

Sea ahora $\frac{+a}{-1}$, como el + del dividendo debe resultar del producto de otros dos signos, y solo + por + ó — por —, pueden producirle, ten-

dremos que como aqui conocemos el signo de un factor que es el — del divisor, provendrá en este caso de — por —; luego el signo del otro factor será tambien — y se tendrá:

$$\frac{+a}{-1}=-a,\ \text{ó con relacion á los signos}\ \frac{+}{-}=-.$$

Por último, si tenemos $\frac{-a}{-1}$, como el — de arriba ha de provenir de + por — ó de — por +, y aqui conocemos que uno de los factores ha de tener —, resulta que el otro deberá tener el otro signo que queda, esto es +, y será: $\frac{-a}{-1}=+a$, ó respecto de los signos $\frac{-}{-}=+$.

Donde vemos que el primero y quarto caso en que los términos tenian signos semejantes, nos han dado +; y que el segundo y tercero en que eran desemejantes nos han dado —; luego es la misma regla que para la multiplicacion.

Ahora, combinando dos de estos resultados con el signo de ambigüedad, tendremos: $\frac{\pm a}{+1}=\pm a$; $\frac{\pm a}{-1}=\mp a$; $\frac{+a}{\pm 1}=\pm a$; $\frac{-a}{\pm 1}=\mp a$; $\frac{\pm a}{\pm 1}=+a$; $\frac{\pm a}{\mp 1}=-a$; $\frac{\mp a}{\pm 1}=-a$; $\frac{\mp a}{\mp 1}=+a$.

En quanto á los coeficientes *se dividen por las reglas de la Aritmética; y sino se puede executar la operacion con exâctitud se dexa indicada, y solo se hace la simplificacion que se pueda.*

En punto á las letras diferentes que haya en el dividendo y en el divisor, *se dexan donde estén; si son una misma letra sin exponente, ó con un mismo exponente, se borra en ambos, y quando tienen exponentes diferentes se resta el uno del otro, y se pone esta letra con el exponente igual á esta diferencia en el término donde se hallaba con mayor exponente.*

La regla de los coeficientes no tiene nada que demostrar, puesto que siendo números corresponde á la Aritmética el modo de executar las operaciones (*); la de dexar las letras que no sean comunes en su lugar correspondiente, tampoco; porque no pudiéndose executar la division se dexa indicada: y la de quando hay una misma letra sin exponente ó con un mismo exponente suprimirla, es porque esto equivale á partir el dividendo y el divisor por una misma cantidad, lo que hemos visto (93)

(*) *Sin embargo hé aqui una razon: el quociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo; luego el coeficiente del quociente por el del divisor dará el coeficiente del dividendo, y por lo mismo el coeficiente del quociente deberá ser lo que resulte de dividir el del dividendo por el del divisor.*

que no altera el quociente (*). Quando se restan los exponentes, es porque se puede descomponer la letra que se halla con el mayor exponente, en dos factores que el uno tenga por exponente el menor de ellos, y el otro la diferencia; y entonces el factor comun puede suprimirse en ambos términos, lo que equivale á dividirlos por aquella cantidad.

Entendido esto, pasemos á executar algunos exemplos de division de monomios.

1.º Si quisiéramos dividir $9a^4b^3c^2d$ por $-3b^2ac^5e^2$, diríamos: + que tiene el dividendo porque se le sobrentiende (163), dividido por — da —; 9 dividido por 3 da 3; a^4 dividido por a, es a^3, porque restando el exponente 1 de la a del divisor del exponente 4 de la a del dividendo, queda a^3; b^3 dividido por b^2, es b, porque $3-2=1$, y $b^1=b$; c^2 dividido por c^5 da c^3 en el denominador, porque la diferencia entre 2 y 5 es 3, y en el denominador es donde hay mayor exponente; la d quedará en el dividendo, y la e^2 en el divisor, de manera que tendré:

$$\frac{9a^4b^3c^2d}{-3b^2ac^5e^2}=-\frac{3a^3bd}{c^3e^2}.$$

Si tubiera que executar esta division indicada $\frac{12a^7b^4c^md^s}{8a^5b^3c^nd^r}$, diria primero: + por + da + que no pongo (163); 12 dividido por 8 no se puede executar; y así, ó lo dexaré indicado, ó simplificaré dividiendo ambas cantidades por 4, lo que las reducirá á $\frac{3}{2}$; ahora diré: a^7 dividido por a^5 es a^2 en el numerador; b^4 dividido por b^3 da b; c^m dividido por c^n no podemos hacer sino indicarlo; pero como no sabemos si m es mayor que n ó n mayor que m, no sabemos qual es la que se debe restar de qual; pero el mismo hecho de intentar la division parece da á conocer que en general la del dividendo debe ser mayor; así, se indicará la resta dexándola en él con la diferencia de los exponentes, y quedará c^{m-n}; por la misma razon quedará igualmente d^{s-r}, y tendremos por último:

$$\frac{12a^7b^4c^md^s}{8a^5b^3c^nd^r}=\tfrac{3}{2}a^2bc^{m-n}d^{s-r}.$$

Otros exemplos de division de monomios:

$$\frac{-20b^5m^8d^3}{-4a^3b^2m^5d}=\frac{5b^3m^3d^2}{a^3};\ \frac{4a^2b^9m^7d^8c^r}{12b^5a^7m^2d^nc^4}=\frac{b^4m^5d^{8-n}c^{r-4}}{3a^5}.$$

182 Antes de pasar mas adelante haremos algunas observaciones sobre la expresion $\frac{c^m}{c^n}$ que acabamos de considerar. Hemos visto que al

(*) *Allí lo demostrámos respecto de numeros, pero establecimos en general el raciocinio; y así, lo que demostrámos entonces queda demostrado para ahora.*

executar esta operacion de $\frac{c^m}{c^n}$ nos hallábamos embarazados por no saber qué exponente es mayor; y hemos dicho que el mismo hecho de intentar la division parece da á entender que el exponente del dividendo ha de ser mayor, y que así se pone c^{m-n}; en rigor, hallándonos en esta duda, la misma razon habrá para decir que $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}$, que para decir que era $\frac{1}{c^{n-m}}$; pero como la 1.ª expresion es mucho mas sencilla porque se presenta baxo la forma de entero, se ha preferido siempre. Veamos ahora las conseqüencias que resultan de dicha expresion $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}$ (A).

Tres casos queden ocurrir aqui: ó que $m>n$, ó que $m=n$, ó finalmente que $m<n$. Si $m>n$ será necesario añadir á n una cantidad qualquiera tal como u, paraque sea igual con m; de manera que se tendrá $m=n+u$, y substituyendo este valor en la expresion (A) será:

$$\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{n+u-n}=c^u.$$

porque $+n$ y $-n$ se destruyen. Este caso no nos enseña nada de nuevo.

Si $m=n$, haciendo esta substitucion en la expresion (A) será:

$$\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{n-n}=c^0;$$

aqui nos encontramos con una expresion c^0 desconocida para nosotros; y así, para ver lo que significa, haremos la substitucion de n por m antes de indicar la resta de los exponentes, y se tendrá: $\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^n}{c^n}=1$, porque toda cantidad dividida por sí misma equivale á la unidad; luego tenemos aqui dos expresiones de cantidad c^0 y 1 que son iguales á una tercera $\frac{c^n}{c^n}$, y por lo mismo serán (Introd. ax. 5.º) iguales entre sí; luego se tendrá $c^0=1$; pero por c indicamos una cantidad qualquiera, luego *toda cantidad elevada á cero es igual con la unidad.*

Ahora, si c es cero tambien se verificará la proposicion; luego $0^0=1$ (*).

En fin, quando $m<n$ será necesario añadir á m una cantidad qualquiera paraque sea igual con n; de manera que si la llamamos u será $m+u=n$, y poniendo en vez de n este valor en la expresion (A), tendremos: $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{m-(m+u)}=c^{m-m-u}=c^{-u}$.

(*) *Acerca de estas conseqüencias hay algunas consideraciones importantes en mi memoria sobre la curvatura de las lineas.*

Tambien nos encontramos aqui con una expresion c^{-u} no conocida para nosotros; y así, con el fin de indagar lo que nos expresa haremos la substitucion antes de indicar la resta de los exponentes, y se tendrá:

$$\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^m}{c^{m+u}}=\frac{c^m}{c^m c^u}=\frac{1}{c^u};$$

donde tenemos dos valores de $\frac{c^m}{c^n}$ á saber: c^{-u} y $\frac{1}{c^u}$ que por lo dicho (Introd. ax. 5.°) serán iguales, y tendremos $\frac{1}{c^u}=c^{-u}$; lo que nos dice que *toda cantidad se puede trasladar del divisor al dividendo mudando el signo á su exponente* (*).

Esta propiedad es muy interesante, y de ello nos convenceremos en lo sucesivo por las muchísimas aplicaciones que haremos.

183 Para dividir un polinomio por un monomio *se divide cada término del polinomio por el monomio*; porque dividiendo todas las partes

---

(*) *Estas dos últimas demostraciones las hubiéramos podido dar á* posteriori *en èstos términos.*

1.° *Si* $c^0=1$, *despues de multiplicadas por una misma cantidad deberán ser iguales tambien; y si esto no se verifica no lo serán dichas expresiones; pero multiplicando á ambas por* c^2, *se convierte la primera en* $c^0\times c^2=c^{0+2}=c^2$, *y la segunda en* $1\times c^2=c^2$; *y como estos productos resultan iguales, inferimos que tambien lo eran los factores* c^0 *y* 1.

2.° *Si* $c^{-u}=\frac{1}{c^u}$ *deberán permanecer iguales si se multiplican por una misma cantidad; y si los productos que resulten no son iguales será porque antes de hecha la multiplicacion no lo eran; pero si las multiplicamos por* c^{2u} *nos vendrá* $c^{-u}\times c^{2u}=c^{-u+2u}=c^u$, *y* $\frac{1}{c^u}\times c^{2u}=\frac{c^{2u}}{c^u}=c^u$; *y como estos productos son iguales con* c^u, *se infiere que los factores* c^{-u} *y* $\frac{1}{c^u}$ *tambien lo serán. Esto tambien se hubiera podido deducir de lo dicho acerca de las cantidades negativas; pues si* c^u *indicaba que la* c *era* u *veces factor,* c^{-u} *indicará que la* c *es* $-u$ *veces factor, ó que es* u *veces lo contrario de factor; pero lo contrario de factor es divisor, luego una cantidad que tiene exponente negativo se debe trasladar al denominador. Si tubiese exponente negativo hallándose ella en el denominador la deberíamos trasladar al numerador mudando el signo del exponente, de modo que* $\frac{a^2}{b^{-2}}$ *es lo mismo que* a^2b^2; *de esta transformacion se hace mucho uso, porque en unos casos conviene que una cantidad se halle en el numerador, y en otros conviene que se halle en el denominador.*

del dividendo y reuniendo todos los quocientes (Introd. ax. 3.°), nos debe resultar el quociente de todo el dividendo. Supongamos, v. g. que se quiera dividir la cantidad $12b^4c^3-8c^2a^3+16a^2b^7$ por $-4a^2bc^3$, y tendremos: 1.° $\frac{12b^4c^3}{-4a^2bc^3}=-\frac{3b^3}{a^2}$; 2.° $\frac{-8c^2a^3}{-4a^2bc^3}=+\frac{2a}{cb}$; y 3.° $\frac{16a^2b^7}{-4a^2bc^3}=-\frac{4b^6}{c^3}$; luego $\frac{12b^4c^3-8c^2a^3+16a^2b^7}{-4a^2bc^3}=-\frac{3b^3}{a^2}+\frac{2a}{bc}-\frac{4b^6}{c^3}$.

Del mismo modo hallaríamos que: $\frac{20a^7b^5c^2-35a^4d^8-9c^5d^{10}}{5a^2d^4}=\frac{4a^5b^5c^2}{d^4}-7a^2d^4-\frac{9c^5d^6}{5a^2}$; y que $\frac{40a^mc^rb^s-8a^3b^nc^2+24d^sg-16m^2c^nb^4}{8a^4d^nb^t}=\frac{5a^{m-4}c^rb^{s-t}}{d^n}-\frac{b^{n-t}c^2}{ad^n}+\frac{3d^{s-n}g}{a^4b^t}-\frac{2m^2c^nb^{4-t}}{a^4d^n}$.

184 Para dividir un monomio por un polinomio hay que seguir un método análogo al que expusimos en la Aritmética para la division de los números; esto es: *se divide el monomio por el primer término del divisor, y lo que resulta se coloca en el quociente*; *luego, se multiplica este quociente por todo el divisor y se resta del dividendo*; *la resta se divide por el primer término del divisor, y así se continúa tanto como se quiera*; pero advirtiendo que jamas se puede obtener quociente exâcto.

Propongámonos, por exemplo, dividir a por $a-b$. Colocaremos el divisor á la derecha del dividendo con las rayas que se tiran para la division en esta forma:

a	$a-b$
$-a+b$	$1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\ldots\ldots\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$
$+b$	
$+\frac{b^2}{a}$	
$+\frac{b^3}{a^2}$	
&c.	

y diremos, dividiendo por el primer término del divisor: $+a$ dividido por $+a$ es $+1$ que pondremos en el quociente; ahora deberemos multiplicar este quociente 1 por todo el divisor y restarle del dividendo, diciendo: 1 por a es a, que como se ha de restar del dividendo se colocará debaxo de él, mudándole el signo y por consiguiente será $-a$; ahora multiplicaremos el quociente 1 por el segundo término $-b$ del divisor diciendo: 1 por $-b$ es $-b$, pero como se ha de restar del dividendo se le mudará el signo y será $+b$; tiraremos debaxo una raya, y executare-

mos nuestra resta; y como —*a* y +*a* se destruyen (*) queda por resta +*b*.

Como de multiplicar el primer término del divisor por el quociente que hemos sacado, nos debe venir siempre el dividendo (181), podremos omitir esta operacion y la destruccion que resulta con el dividendo, haciendo este raciocinio: el *quociente por el divisor da el dividendo, y como se ha de restar se destruyen*; con lo qual se borra el dividendo, y se ahorra el escribir el producto debaxo y executar la destruccion; así lo haremos en adelante.

Ahora, ya sabemos que $\frac{a}{a-b}$ da uno por quociente, dexando *b* por resta; luego tendremos $\frac{a}{a-b}=1+\frac{b}{a-b}$;

pero si queremos un valor mas aproxîmado en forma de monomios, continuaremos la division de la resta por el divisor diciendo: *b* dividido por *a* da $\frac{b}{a}$ que pondremos al lado del quociente anterior; ahora, el quociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo; esto es, $\frac{b}{a}\times a=b$, y como se ha de restar será $-b$ y se destruirá con la resta $+b$; por lo qual se borrará el $+b$, y continuaremos nuestra multiplicacion diciendo: $\frac{b}{a}$ multiplicado por $-b$ es $-\frac{b^2}{a}$, que como se ha de restar será $+\frac{b^2}{a}$, que pondremos por segunda resta; de manera que ya tenemos: $\frac{a}{a-b}=1+\frac{b}{a}+\frac{\frac{b^2}{a}}{a-b}$.

Aun podemos continuar sacando mas términos monomios diciendo: $+\frac{b^2}{a}$ dividido por *a* es (§ 102) $\frac{b^2}{a^2}$, que pondremos en el quociente y diremos: el quociente multiplicado por el divisor dará el dividendo, y como se ha de restar se destruyen, y borraré el $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^2}{a^2}$ multiplicado por $-b$ da $-\frac{b^3}{a^2}$, que como se ha de restar es $\frac{b^3}{a^2}$; y si queremos continuar la division diremos: $\frac{b^3}{a^2}$ dividido por *a* es $\frac{b^3}{a^3}$ que pondremos; y

(*) *Los términos señalados con letra redonda equivalen á estar tachados, como los números que se ven en la prueba de la suma* (§ 50).

así continuaremos como allí se ve, sacando los términos que queramos.

Esta operacion es algo engorrosa, pero tiene la ventaja de que en sacando tres ó quatro términos se pueden sacar los demas por la ley que sigan los que conocemos. Así, aqui despues de sacados los tres primeros términos; como vemos que el tercero es lo mismo que el segundo, solo que tiene su exponente una unidad mas, podremos ir formando los siguientes sin necesidad de executar la division. Aun hay mas; en muchas ocasiones se suele pedir un término de este quociente sin necesitar los que anteceden, en cuyo caso si hallásemos todos los anteriores haríamos un trabajo inútil para nosotros; y así en todas estas expresiones conviene buscar una que dependa del lugar que ocupa cada término en el quociente. Para esto no se pueden dar mas reglas que la observacion del calculador para ver qué dependencia tienen los coeficientes y exponentes con el lugar que ocupa cada término. En nuestro caso no hay ningun coeficiente; y como vemos que el exponente de la a y b en el segundo término es 1, en el tercero es 2, en el quarto es 3, &c. resulta que los exponentes tienen una unidad menos que el número que representa el lugar que cada término ocupa en la expresion; luego si al lugar que ocupa cada término le llamamos n, un término qualquiera estará representado por $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$, que es la expresion que tenemos despues de los puntos.

A esta expresion se le da el nombre de *término general*, porque en ella estan contenidos todos los términos. Así, si suponemos $n=1$ tendremos ó nos vendrá el primer término como en efecto se verifica, pues $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{b^{1-1}}{a^{1-1}}=\frac{b^0}{a^0}=\frac{1}{1}=1$; haciendo $n=2$ nos vendrá $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{b^{2-1}}{a^{2-1}}=\frac{b^1}{a^1}=\frac{b}{a}$ que es el segundo término, &c. y si quisiéramos hallar el término que en la expresion ocupase el lugar 20, substituiríamos 20 en vez de n, y tendríamos que $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{b^{20-1}}{a^{20-1}}=\frac{b^{19}}{a^{19}}$, &c. y lo mismo haríamos para hallar un término qualquiera.

Entendido esto, falta que demos la razon de esta práctica: en primer lugar debemos observar que un monomio dividido por un polinomio jamas nos puede dar quociente exâcto; porque si esto se verificase, debiendo ser el producto del divisor por el quociente igual con el dividendo, este quociente primero que es monomio multiplicado por todo el divisor dará un polinomio que contenga tantos términos como el divisor; y como de esta multiplicacion (178) jamas puede resultar reduccion ni destruccion, no se puede jamas sacar un quociente entero exâcto. Ahora, debiendo quedar una resta, esta contendrá siempre un término

menos que el divisor; en el exemplo anterior se ve que la resta solo contiene un término, porque teniendo dos el divisor, el primer término de su producto por el quociente se debe destruir con el dividendo parcial; y por lo mismo solo debe quedar un término en la resta. Quando hubiese mas términos en el divisor quedarán mas términos en la resta.

Sabiendo ya que no puede tener quociente exâcto, si queremos sin embargo executar la division, lo podemos hacer y tendremos un quociente mas una resta; de esta resta podemos tambien sacar otro quociente exâcto y nos vendrá otra resta, y así sucesivamente que es lo que hemos ido executando.

Propondremos otros exemplos de este caso: supongamos que se quiera dividir a por a^2+x^2. Executaremos nuestra operacion colocando las cantidades en la forma que aqui se ve:

$$\begin{array}{l|l} a & a^2+x^2 \\ \cline{2-2} -\frac{x^2}{a} & \frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}\ldots\pm\frac{x^{2n-2}}{a^{2n-1}} \\ \quad +\frac{x^4}{a^3} & \\ \qquad +\&c. & \end{array}$$

diciendo: a dividido por a^2 es $\frac{1}{a}$; el quociente por el divisor dará el dividendo, y como se ha de restar se destruirá; y por lo mismo le borro y continúo: el quociente $\frac{1}{a}$ multiplicado por x^2 da $+\frac{x^2}{a}$, y como le he de restar es $-\frac{x^2}{a}$; ahora continúo: $-\frac{x^2}{a}$ dividido por a^2 es $-\frac{x^2}{a^3}$, &c. y observando que los exponentes van aumentando dos unidades, y que los signos van siendo alternativamente positivos y negativos, pondremos tantos términos como queramos, y luego el término general $\pm\frac{x^{2n-2}}{a^{2n-1}}$, poniendo el signo $\pm$, porque si n es ímpar debemos tomar el signo $+$, y si par el $-$; la x se halla con el exponente $2n-2$ porque es en cada término igual al duplo del lugar que ocupa menos 2; y la a con $2n-1$ porque es igual al duplo del número que expresa dicho lugar menos la unidad.

Pondremos aqui los dos exemplos siguientes paraque los principiantes se exerciten. Supongamos que quiera executar la division de a^2 por $a+x$, y practicaré la operacion como se ve á la vuelta.

$$\begin{array}{l|l} a^2 & a+x \\ \hline -ax & a-x+\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^4}{a^3}-\frac{x^5}{a^4}\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}} \; (*) \\ +x^2 & \\ -\frac{x^3}{a} & \\ \&c. & \end{array}$$

Del mismo modo hallaria que

$$\frac{a}{a^3+x^3}=\frac{1}{a^2}-\frac{x^3}{a^5}+\frac{x^6}{a^8}-\frac{x^9}{a^{11}}+\frac{x^{12}}{a^{14}}-\frac{x^{15}}{a^{17}}\ldots\pm\frac{x^{3n-3}}{a^{3n-1}}.$$

185 Pasemos ya á la division de un polinomio por otro polinomio; ante todas cosas debemos ver qual es la letra que está mas repetida en el dividendo y divisor, y los dispondremos ambos de manera que el término donde se halle la letra con mayor exponente sea el primero; despues aquel en que se halle con el exponente inmediatamente menor, &c.; y si hay muchos términos que contengan dicha letra con un mismo exponente se ponen en columna. Esta operacion preparatoria se llama *ordenar*, y despues de ordenados los términos de la division, y colocado el divisor en las rayas como en el caso anterior, se practicará lo siguiente.

Divídase el primer término del dividendo por el primero del divisor, y tendremos un término del quociente; multiplíquese este término por todo el divisor y réstese el producto de todo el dividendo, lo qual se conseguirá mudando los signos del producto conforme le váyamos formando, y se hará la destruccion que se pueda. Despues se divide el término de esta resta, donde se halle con mayor exponente la letra por qué se ordenó, por el primer término del divisor, lo que nos dará el segundo término del quociente; despues se executará la multiplicacion y resta, y se continuará del mismo modo hasta que se halle quociente exâcto, ó hasta que el mayor exponente de la letra por qué se ordena sea menor en la resta que el mayor de la misma en el divisor; pues entonces es señal de no tener quociente exâcto, y se suele dexar indicada la division de la resta por el divisor, sino se quieren hallar mas términos por aproxîmacion.

Supongamos con el fin de aplicar esta regla que se quiera dividir $a^3b^3c-ab^2c^2+2a^4b^2c+a^5bc-2a^2bc^2-a^3c^2$ por $2ab+b^2+a^2$.

Aquí lo primero que hay que hacer es ordenar, para lo qual advertimos que en el divisor está tan repetida la b como la a; pero como en

---

(*) *En esta expresion estan tambien comprendidos el* 1.° y 2.° *término; porque haciendo* n=1 *tenemos* $\frac{x^{1-1}}{a^{1-2}}=\frac{x^0}{a^{-1}}=$(§182)$\frac{1}{a^{-1}}=a^1=a$, *y haciendo* n=2 *es* $\frac{x^{2-1}}{a^{2-2}}=\frac{x^1}{a^0}=\frac{x}{1}=x$.

el dividendo lo está mas la a, pues se halla en todos los términos, ordenaremos por ella y tendremos:

$$\begin{array}{l|l} a^5bc+2a^4b^2c+a^3b^3c-2a^2bc^2-ab^2c^2 & a^2+2ab+b^2 \\ \quad -a^3c^2 & \overline{a^3bc-ac^2} \\ -2a^4b^2c-a^3b^3c & \\ \hline \quad -a^3c^2-2a^2bc^2-ab^2c^2 & \\ \quad\quad +2a^2bc^2+ab^2c^2 & \\ \hline \quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Ahora empezaremos nuestra division diciendo: a^5bc dividido por a^2 es a^3bc, que pondré en el quociente; haré la multiplicacion de a^3bc por todo el divisor (excepto por el primer término a^2 respecto del qual hago el siguiente raciocinio: el *quociente multiplicado por el divisor da el dividendo* a^5bc, *y como se ha de restar se destruye*; *por lo que se tachará el término como allí se presenta*). Para los demas diré: a^3bc por $2ab$ es $2a^4b^2c$, que como se ha de restar le coloco debaxo del dividendo con el signo —, porque él tiene el signo +; a^3bc por b^2 tercer término del divisor da a^3b^3c, que pondré tambien con el signo — por la misma razon; tiraré una raya para poner debaxo de ella la resta que quede despues de hecha la destruccion; pero advirtiendo que $+2a^4b^2c$ se destruye con $-2a^4b^2c$, y que a^3b^3c lo hace igualmente con $-a^3b^3c$, pongo debaxo de la raya lo que queda que es $-a^3c^2-2a^2bc^2-ab^2c^2$. Como el término de esta resta en que la a se halla con mayor exponente es el $-a^3c^2$, le dividiré por a^2 primero del divisor, lo que dará $-ac^2$; y para hacer la multiplicacion diré: el quociente $-ac^2$ multiplicado por el divisor a^2 dará el dividendo $-a^3c^2$, y como se ha de restar se destruirá, y por lo mismo le tacho; continúo: $-ac^2$ por $2ab$ es $-2a^2bc^2$, que como se ha de restar pongo $+2a^2bc^2$; sigo: $-ac^2$ por b^2 es $-ab^2c^2$, que como se ha de restar será $+ab^2c^2$; y como estos términos se destruyen con sus correspondientes, pondremos debaxo de la raya 0 por resta, y el quociente será a^3bc-ac^2.

Para manifestar el fundamento de esta regla, y dar á conocer que practicándola se hallará el quociente que se busca, consideraremos al dividendo como un producto cuyos factores sean el quociente y el divisor, y nos propondremos el mismo exemplo de la division anterior, esto es, el practicar antes la multiplicacion del $a^2+2ab+b^2$ por a^3bc-ac^2; estando ya ordenados como aquí se ve, y atendiendo á que llamamos primeros términos en ambos factores á los que ocupan el primer lugar, executaremos la multiplicacion de esta manera:

$$\begin{array}{ll} \text{multiplicando . .} & a^2+2ab+b^2 \\ \text{por. . . . .} & \underline{a^3bc} \\ \text{resulta. . . . . .} & a^5bc+2a^4b^2c+a^3b^3c \\ \text{y por } -ac^2\text{. . .} & -a^3c^2-2a^2bc^2-ac^2b^2 \end{array}$$

En cuyo producto observamos que el término donde se halla la a con mayor exponente, resulta de multiplicar el primer término del multiplicando por el primero del multiplicador; de donde se deduce que si despues de haber escrito por primer término, tanto en el dividendo como en el divisor del exemplo propuesto, el que tiene la letra a con mayor exponente, se divide uno por otro: en el resultado nos vendrá el término del quociente que tenga tambien la a con mayor exponente.

Así, en este exemplo, considerando al producto como un dividendo y al multiplicador como un divisor, se dividirá a^5bc por a^2, lo que dará a^3bc por primer término del quociente. Si en todo dividendo estubiesen expresos los productos parciales como aqui, tendríamos diferentes medios de hallar este primer término del quociente, pues le hallaríamos 1.° dividiendo a^5bc por a^2; 2.° dividiendo el segundo término $2a^4b^2c$ del primer producto por el segundo $2ab$ del multiplicando, lo que dará tambien a^3bc; 3.° dividiendo el tercero a^3b^3c por b^2, lo que da tambien a^3bc; ó finalmente dividiendo todo el primer producto $a^5bc+2a^4b^2c+a^3b^3c$ $=(a^2+2ab+b^2)a^3bc$ por todo el multiplicando $a^2+2ab+b^2$, que tambien da a^3bc; pero como generalmente no se presentan con este órden los términos, se sigue que solo puede servir de regla fixa la de dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor.

Hecho esto, se multiplica todo el divisor por este primer término del quociente, y el producto se resta de todo el dividendo, con lo qual queda destruido todo el primer producto parcial. Para hallar el segundo quociente tendríamos, si el producto ó productos parciales estubiesen expresados, los mismos medios que antes; pero como en general esto no se tiene, solo puede servir de regla la de dividir el término de la resta en que tiene mayor exponente la letra por qué se ordena por el 1.° del divisor; y luego se hace la multiplicacion por las mismas razones que antes.

Entendida y demostrada la regla vamos á resolver algunos exemplos.

Sea el primero dividir $3a^2b+3ac^2+a^3+b^3+3a^2c+3ab^2+6abc+c^3+3b^2c+3bc^2$ por $2bc+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2$. Para esto ordenaremos por la a, y executaremos la operacion como aqui se presenta:

Dividendo	Divisor / Quociente
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$	$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$
$+3a^2c+3ac^2$	
$+6abc$	$a+b+c$
$-a^3-2a^2b-2a^2c-ab^2-2abc-ac^2$	
$a^2b+2ab^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$	
$+a^2c+2ac^2$	
$+4abc$	
$-a^2b-2ab^2-2abc-b^3-2b^2c-bc^2$	
$a^2c+2ac^2+b^2c+2bc^2+c^3$	
$+2abc$	
$-a^2c-2abc-2ac^2-b^2c-2bc^2-c^3$	

Si me propusiera dividir a^6-b^6 por $a-b$, executaria la operacion como aqui se presenta:

$$\begin{array}{l|l} a^6-b^6 & a-b \\ \quad +a^5b & \hline \quad\quad +a^4b^2 & a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5 \\ \quad\quad\quad +a^3b^3 & \\ \quad\quad\quad\quad +a^2b^4 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad +ab^5 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad +b^6 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

donde veo que hallo quociente exâcto porque el $+b^6$ que me resulta se destruye con el $-b^6$ de arriba.

186 Antes de pasar mas adelante debemos hacer conocer que esto se verifica en toda clase de expresiones de esta forma; por exemplo: en a^m-b^m dividido por $a-b$ siempre tendremos quociente exâcto, el qual le podremos poner desde luego por esta observacion: *el primer término será el primero del dividendo con una unidad menos en su exponente: en el segundo la primera parte del dividendo tiene una unidad menos que en el anterior, y aparece la segunda con la unidad por exponente: la primera parte va teniendo una unidad menos en su exponente, y la segunda una unidad mas hasta que en el último término no se halla la primera parte, y la segunda se encuentra sola con un exponente una unidad menos que el que llevaba dicha cantidad en el dividendo; todos los signos son positivos, y los términos no tienen coeficientes.*

Esta regla se encuentra verificada en el exemplo anterior, y aplicándola á este con exponentes indeterminados será:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}.$$

Quedaremos convencidos de que esta proposicion es verdadera en todos los casos siempre que multiplicando el divisor $a-b$ por el quociente $a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}$ nos resulte el dividendo a^m-b^m; pero executando esta operacion nos viene por resultado

$$a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+a^{m-3}b3\ldots\ldots+a^2b^{m-2}+ab^{m-1}$$
$$-a^{m-1}b-a^{m-2}b^2-a^{m-3}b3-a^{m-4}b4\ldots\ldots-ab^{m-1}-b^m.$$

Donde vemos que siendo todos los términos del primer renglon los mismos que los del segundo, excepto el primero del primero, y el último del segundo, resulta que como tienen diferente signo se destruirán, y solo quedará a^m-b^m.

Aunque no se ve que en el renglon superior se halle $a^{m-4}b^4$ para destruirse con el $-a^{m-4}b^4$ de abaxo, ni en el de abaxo se halla el $-a^2b^{m-2}$ para destruirse con el $+a^2b^{m-2}$ que hay arriba, no obstante no por eso dexan de estar, y los comprendemos en los que faltan que estan indicados por los puntos.

187 Si me propusiera dividir $6a^5b^2-15a^3bc^2+bc^3$ por $3a^2-bc$ executaria la operacion de este modo:

$$\begin{array}{r|l}
6a^5b^2-15a^3bc^2+bc^3 & 3a^2-bc \\
+2a^3b^3c & \\
\hline
-15a^3bc^2+bc^3 & 2a^3b^2-5abc^2+\frac{2}{3}ab^3c+\dfrac{-5ab^2c^3+\frac{2}{3}ab^4c^2+bc^3}{3a^2-bc} \\
+2a^3b^3c & \\
-5ab^2c^3 & \\
\hline
2a^3b^3c-5ab^2c^3+bc^3 & \\
+\frac{2}{3}ab^4c^2 & \\
\hline
-5ab^2c^3+bc^3 & \\
+\frac{2}{3}ab^4c^2 &
\end{array}$$

y como despues de sacado el tercer término, en la resta que queda tiene ya la a menor exponente que en el divisor, concluyo aqui mi division poniendo la resta al lado del quociente hallado con el divisor debaxo, porque esto es ya señal de que no tengo que esperar quociente exâcto.

188 Las demostraciones que hemos dado de las alteraciones que padecia el quociente por las de los términos de la division, aunque contraidas á números, los raciocinios estaban concebidos en general; y así, todas aquellas proposiciones las podremos considerar como demostradas respecto de las cantidades algebráicas; por lo que pasaremos á manifestar algunas de las proposiciones relativas á los divisores.

La 1.ª proposicion que demostraremos será que *el producto de dos números A y B es divisible por todo número que divida exâctamente al uno de los factores A ó B.* Porque sea m un número primero que divida á B, en cuyo caso será $B=Cm$, siendo C el quociente que resulta de dividir B por m, y tendremos $AB=ACm$; y dividiendo esta expresion por m será $\frac{AB}{m}=AC$; pero siendo A y C números enteros, su producto AC tambien lo será, y por lo mismo AB dividido por m dará quociente exâcto.

189 *Si el número* m *es un factor comun de A y B será tambien factor de la suma y de la diferencia de otros dos múltiplos qualesquiera de estos números.* Porque si suponemos $A=A'm$, y $B=B'm$, será:

$$\alpha A\pm\beta B=\alpha A'm\pm\beta B'm=(\alpha A'\pm\beta B')m;$$

y dividiendo ambas expresiones por m será $\frac{\alpha A\pm\beta B}{m}=\alpha A'\pm\beta B'$;

y por lo mismo representando la segunda un número entero, la primera tambien lo será.

190 *Todo número primero que no divide á ninguno de los dos factores A, B, no puede dividir á su producto AB.*

Si esta proposicion no es verdadera habrá un número primero tal como

m, que no dividiendo á ninguno de los factores A y B divida al producto AB. Ya sea $A>$ ó $<m$, siempre podremos suponer que dividiendo A por m se obtenga el quociente entero α (que será cero quando $A<m$) y la resta A', por lo qual tendremos $A=\alpha m+A'$; del mismo modo resultará $B=\beta m+B'$; luego $A\times B=\alpha\beta m^2+\beta A'm+\alpha B'm+A'B'$.

Como por el supuesto AB era divisible por m lo será igualmente este valor suyo; y como los tres primeros términos lo son, resulta que tambien lo deberá ser el quarto; luego deberá ser $A'B'=mC'$.

En este primer resultado advertimos: 1.º que ninguna de las dos restas A', B' puede ser igual con cero, porque hemos supuesto que ni A ni B eran divisibles por m; 2.º que siendo A' y B' restas de la division por m serán menores que m; y 3.º que ninguno de los números A', B' puede ser igual con la unidad, porque si se tubiese $A'=1$ el producto $A'B'$ se convertirá en B'; pero siendo $B'<m$ es imposible que B' sea divisible por m.

Luego tenemos dos números enteros A', B', ambos mayores que la unidad y menores que m, cuyo producto es divisible por m, de modo que $A'B'=mC'$. Veamos las consegüencias que de aqui resultan.

Pues que A' es menor que m se podrá dividir m por A'; sea γ el quociente entero y A'' la resta, y será $m=\gamma A'+A''$; luego $mB'=\gamma A'B'+A''B'$. Siendo mB' divisible por m es preciso que lo sea $\gamma A'B'+A''B'$; luego siéndolo el término $\gamma A'B'$ por serlo $A'B'$, lo será $A''B'$.

El número A'' que es una resta de division es menor que el divisor A'; por otra parte no puede ser cero, porque si esto se verificase seria m divisible por A', y no seria ya un número primero; luego de ser el producto $A'B'$ divisible por m, se saca otro producto $A''B'$ divisible aun por m, el qual es mas pequeño que $A'B'$ y sin embargo no es cero.

Continuando el mismo raciocinio se deducirá del producto $A''B'$ otro producto $A'''B'$ ó $A''B''$ aun menor, y que será siempre divisible por m sin ser cero; y como estos productos van decreciendo, llegará un caso en que tengamos un número menor que m. Pero siendo imposible que un número menor que m, que no es cero, sea divisible por m, se deduce que tambien es imposible la hipótesis de que hemos partido. Luego si los números A y B no son divisibles ni el uno ni el otro por el número primero m, su producto AB tampoco podrá ser divisible por m.

De los quebrados literales.

191 Los quebrados literales ó algebráicos se calculan del mismo modo que los numéricos; porque todas las demostraciones que dimos respecto de estos estaban concebidas en términos generales. Así tendremos que su valor no se alterará aun quando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad. Por esta causa se reducirán á un comun denominador del mismo modo que ellos (108); de

manera que si tengo los quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, quedarán reducidos á un comun denominador si multiplico los dos términos del primero por dn, los del segundo por bn, y los del tercero por bd, cuya operacion los transformará en $\frac{adn}{bdn}$, $\frac{cbn}{bdn}$, $\frac{mbd}{bdn}$.

Quando tratábamos de los quebrabos numéricos, indicámos (108) que la reduccion de los quebrados á un mismo denominador se hacia abreviadamente, quando los denominadores eran los unos factores de los otros; y que tambien se puede executar dicha abreviacion quando (aunque no sean los unos factores de los otros) tienen factores comunes. Aqui se presenta esta abreviacion con mas sencillez, porque quando los denominadores son monomios tienen patentes sus factores, y por lo mismo estableceremos esta regla.

Búsquese primero el denominador comun, que será igual al producto de cada letra ó cantidad de los denominadores con el mayor exponente que tenga; despues véase lo que le falta á cada denominador para convertirse en el denominador comun, y por esto que le falte deberemos multiplicar su numerador.

Propongámonos, por exemplo, reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{a^2}{b^4c^3dm^5}$, $\frac{b}{a^3c^2n^4g}$, $\frac{d^2}{b^6m^3c^7f}$, y para formar primero el denominador comun, buscaremos qual es el mayor exponente con que se halla la b en todos los denominadores; y como vemos que es 6 deberá haber en el denominador comun b^6; luego, como el mayor exponente de la c es 7, tambien deberá haber c^7 en dicho denominador; la d no se halla sino con la unidad por exponente, y así deberá quedar en el denominador comun; el mayor exponente de la m es 5, y por lo mismo deberá haber m^5; la a solo se halla en un denominador con el exponente 3, y por lo mismo deberá haber a^3 en el denominador comun; por la misma razon deberá hallarse n^4, g y f: luego el denominador comun será $b^6c^7dm^5a^3n^4gf$. Ahora, observando lo que le falta al denominador de cada quebrado para convertirse en este, tendremos que al primero le falta $b^2c^4a^3n^4gf$; al segundo $b^6c^5m^5df$, y al tercero $m^2dn^4a^3g$; y multiplicando cada numerador respectivamente por esto, los tendremos reducidos en la forma siguiente:

$$\frac{a^5b^2c^4n^4gf}{b^6c^7m^5da^3n^4gf},\ \frac{b^7c^5m^5df}{b^6c^7m^5da^3n^4gf},\ \frac{d^3m^2n^4a^3g}{b^6c^7m^5da^3n^4gf}$$

Si se nos diese un quebrado qualquiera en que hubiese factores comunes en el numerador y denominador, podríamos omitir en ambos los que nos hiciesen al caso, y con esto los simplificaríamos; de manera

que $\frac{ab}{b^2c}$ es lo mismo que $\frac{a}{bc}$; y $\frac{ac+ab}{c^2+cb}$ es lo mismo que $\frac{a}{c}$, pues en el numerador y denominador es comun el factor $c+b$, que despues de suprimido se convierte en lo que hemos dicho.

192 Para sumarlos *se reducirán á un comun denominador, despues se sumarán los numeradores, y á esto se le pondrá por denominador el denominador comun.* De manera que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$; y si quisiera sumar $\frac{a^3}{b^2c}$ con $\frac{a^2}{c^4b}$ y con $\frac{e}{a^2c^3}$, los reduciria á un comun denominador por lo que acabamos de decir, y executaria la operacion como aqui se va indicando:

$$\frac{a^3}{b^2c}+\frac{a^2}{c^4b}+\frac{e}{a^2c^3}=\frac{a^5c^3}{b^2c^4a^2}+\frac{a^4b}{b^2c^4a^2}+\frac{cb^2e}{b^2c^4a^2}=\frac{a^5c^3+a^4b+cb^2e}{b^2c^4a^2}.$$

193 Para restarlos *se reducirán tambien á un comun denominador sino le tienen, se restará el numerador del subtraendo del numerador del minuendo, y á la diferencia se le pondrá por denominador el denominador comun.* Por exemplo: si de $\frac{a}{b}$ quisiera restar $\frac{c}{d}$, tendria $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$. Si de $\frac{a+b}{c-d}$ quisiera restar $\frac{a-b}{c+d}$, iria indicando la operacion del modo siguiente:

$$\frac{a+b}{c-d}-\frac{a-b}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{(c-d)(c+d)}-\frac{(a-b)(c-d)}{(c-d)(c+d)}=\ldots..$$

$$\frac{(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)}{(c-d)(c+d)}=\frac{ac+bc+ad+bd-ac+bc+ad-bd}{c^2-cd+cd-d^2}=$$

$$\frac{2bc+2ad}{c^2-d^2}.$$

194 Ocurre con freqüencia tambien en el Álgebra reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña, ya sea por via de suma ó de resta; para lo qual *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, con esto se suma el numerador del quebrado quando este se halla unido al entero por via de suma, ó se resta quando lo está por via de resta.* Sea, por exemplo, la expresion $a+b+\frac{a^2}{b-a}$ la que queramos reducir: multiplicaremos el entero $a+b$ por el denominador $b-a$, con esto sumaremos el numerador a^2, y á la suma le pondremos por denominador el denominador del quebrado, en esta forma:

$$a+b+\frac{a^2}{b-a}=\frac{(a+b)(b-a)+a^2}{b-a}=\frac{ab+b^2-a^2-ba+a^2}{b-a}=\frac{b^2}{b-a}.$$

Si la expresion fuese $a^3-b^3-\frac{b^2-c^2}{c+b}$, la reduciremos como aqui se ve:

$$a^3-b^3-\frac{b^2-c^2}{c+b}=\frac{(a^3-b^3)(c+b)-(b^2-c^2)}{c+b}=\frac{a^3c-b^3c+a^3b-b^4-b^2+c^2}{c+b}.$$

195 Para multiplicar los quebrados *se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador*; de manera que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; y $\frac{a+b}{c^2-d^2}\times\frac{a-b}{c^2+d^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(c^2-d^2)(c^2+d^2)}=(§179)\frac{a^2-b^2}{c^4-d^4}$. Y si quisiera multiplicar un quebrado por un entero ó al contrario, no habria mas que *multiplicar el numerador del quebrado por el entero*, como aqui se ve: $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$; y $(a^2-b^2)\times\frac{c}{d}=\frac{(a^2-b^2)}{d}\times c=\frac{a^2c-b^2c}{d}$.

Quando en la multiplicacion entran quebrados no es indispensable aqui, como en la Aritmética, el reducir el entero á la especie del quebrado; y así, no se executará sino quando se espere que de esta reduccion ha de resultar alguna simplificacion; por lo qual si nos propusiéramos multiplicar $a+\frac{c}{d}$ por $b+\frac{m}{n}$, indicaríamos y executaríamos la operacion como aqui se presenta: $(a+\frac{c}{d})(b+\frac{m}{n})=ab+\frac{c}{d}\times b+a\times\frac{m}{n}+\frac{mc}{nd}$.

196 Para dividirlos *se trastornarán los dos términos del divisor, y se multiplicará numerador por numerador y denominador por denominador, ó multiplicaremos en cruz*; de manera que $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$; ó desde luego multiplicando en cruz será $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$; $\frac{a^2}{bc}:\frac{c}{ba}=\frac{a^3b}{bc^2}=\frac{a^3}{c^2}$; y $\frac{a+b}{c+d}:\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c-d)}=(§179)\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

Para dividir un quebrado por un entero *se multiplicará el denominador del quebrado por el entero*; de modo que $\frac{a}{b}$ dividido por c es $\frac{a}{bc}$; $\frac{a-c}{b^2+c^2}$ dividido por a^3 es $\frac{a-c}{(b^2+c^2)a^3}=\frac{a-c}{b^2a^3+c^2a^3}$.

Si se tratase de dividir un entero por un quebrado *se multiplicaria el entero por el denominador del quebrado, y el producto se partiria por el numerador del quebrado*; por exemplo: a dividido por $\frac{c}{d}$ es igual con $\frac{ad}{c}$; y $a-b$ dividido $\frac{c}{d}$, ó $\frac{a-b}{\frac{c}{d}}=\frac{(a-b)d}{c}=\frac{ad-bd}{c}$.

Para dividir una expresion que contiene cantidades en forma de enteros, y cantidades en forma de quebrado, conviene reducir los enteros á la especie de los quebrados que les acompañan. Así, para dividir $a+\frac{c}{d}$ por $b+\frac{m}{n}$, haremos la operacion como aqui se presenta:

$$\frac{a+\frac{c}{d}}{b+\frac{m}{n}}=\frac{\frac{ad+c}{d}}{\frac{bn+m}{n}}=\frac{(ad+c)n}{(bn+m)d}=\frac{adn+cn}{bnd+md};$$

$$\text{y}\;\frac{a-\frac{a^2}{a-b}}{b-\frac{b^2}{a+b}}=\frac{\frac{a(a-b)-a^2}{a-b}}{\frac{b(a+b)-b^2}{a+b}}=\frac{[a(a-b)-a^2](a+b)}{[b(a+b)-b^2](a-b)}=\frac{(a^2-ab-a^2)(a+b)}{(ba+b^2-b^2)(a-b)}$$

$$=\frac{-ab(a+b)}{ba(a-b)}=-\frac{+a+b}{a-b}=\text{(mudando los signos à los dos términos)}\ \frac{a+b}{b-a}.$$

De la elevacion á potencias y extraccion de raices de las cantidades monomias.

197 Diofanto llama *quadrado* en la definicion 1.ª del libro 1.º al número que resulta de la multiplicacion de otro por sí mismo, y á este que sirve de factor *lado del quadrado*; *cubo* al número que resulta de multiplicar el quadrado por su lado; *quadrado-quadrado* al que resulta de multiplicar por sí mismo el quadrado; *quadrado-cubo* al que resulta de multiplicar el quadrado por el cubo; y *cubo-cubo* al que resulta de multiplicar el cubo por sí mismo; y el comentador advierte que á lo que Diofanto llama *quadrado-cubo* se le llamaba en su tiempo *supersólido*, *surdesólido*, *ó número relato*; y al *cubo-cubo* le llamaba *quadrado-cubo*; porque resulta de quadrar el cubo, ó de cubicar el quadrado.

Como se podria continuar dando nombres sin fin, y por otra parte todas estas denominaciones son embarazosas en la práctica, los modernos se han convenido en llamar en general *potencia* de una cantidad *al producto que resulta de multiplicar dicha cantidad por sí misma cierto número de veces*; si se multiplica una vez resulta la *segunda potencia*; si dos la *tercera*; si tres la *quarta*; y si n, la potencia del grado $n+1$. Considerando á la cantidad que se multiplica con relacion á la potencia se le da el nombre de *raiz*; de manera que *raiz* de una cantidad qualquiera *es aquella que multiplicada por sí misma cierto número de veces produce la cantidad primitiva.*

Los nombres que han dado á las potencias no los han deducido de las multiplicaciones que hay que hacer, sino de las veces que es factor la

cantidad en la potencia; y por esta causa se dice que todo número es *su primera potencia*, porque es una vez factor en sí. De las denominaciones que Diofanto y tambien los árabes dieron á las potencias, solo se han conservado las de *quadrado* y *cubo*, porque en la Geometría hay *quadrados y cubos.*

198 Para indicar que una cantidad se ha de elevar á una potencia, si consta solo de una letra, basta ponerle á su derecha un poco mas alto el número que expresa la potencia á que se ha de elevar; y si la cantidad no consta solo de una letra ó tiene ya exponente, se encierra dentro de un paréntesis y fuera de este se coloca un poco mas elevado el número que expresa la potencia, el qual se llama *exponente de la potencia.* De manera que para indicar que la cantidad $2ab$ se ha de elevar á la segunda potencia ó al quadrado, se pondrá de esta manera $(2ab)^2$ que se lee : *dos* ab *elevado á dos*; para indicar que se ha de elevar á la tercera potencia ó al cubo, se pondrá $(2ab)^3$ que se lee : *dos* ab *elevado á tres*; y para indicar que se ha de elevar á la potencia del grado n, se pondrá $(2ab)^n$ que se lee : *dos* ab *elevado á n.*

Como la elevacion á potencias no es sino un caso particular de la multiplicacion, á saber, el caso en que los factores son iguales, resulta que las reglas para elevar á potencias se deducirán de las de multiplicar; pero en esta operacion observámos (176) que habia que atender á quatro cosas; y como aqui han de ser iguales los factores, no tendrá lugar la circunstancia de las letras diferentes. Así, para elevar á potencias solo hay que atender á tres cosas : á *signos*, *coeficientes* y *exponentes.*

En punto á signos la regla que hay que practicar es que si *la potencia es de grado par*, *esto es*, *si el exponente de la potencia es un número par*, *el signo de la potencia es siempre positivo*; *y si el exponente de la potencia es ímpar*, *el signo de la potencia será el mismo que el de la raiz.* Esta regla está fundada en que si el signo de la raiz es +, el de la potencia tambien lo será; pero si es —, el signo de la potencia resultará de tantos signos — combinados como unidades tenga su exponente; pero como un número par de signos — combinados dan +, porque de dos en dos siempre dan +, resulta que siendo par el exponente de la potencia, aun quando la raiz lleve el signo negativo, el signo de la potencia será positivo. Si fuese ímpar, como un número ímpar de signos — combinados dan —, resultará que tendrá la potencia el signo —; luego queda demostrada la regla.

En punto á los coeficientes se hará el número de multiplicaciones que exîja la potencia por las reglas de Aritmética, ó se dexará indicado; v. g. para elevar á la 5.ª potencia una cantidad que tubiese 2 por coeficiente, ó haria las quatro multiplicaciones que exige la potencia 5.ª diciendo: 2 por 2 son 4; 4 por 2 son 8; 8 por 2 son 16; 16 por 2 son 32; y diria que el coeficiente de la potencia era 32, ó dexaria indicada la operacion, poniéndole por exponente el de la potencia en esta forma 2^5.

Ahora, en punto á los exponentes la regla que hay que seguir es *multiplicar el exponente de la cantidad por el de la potencia.* Por exemplo: para elevar la cantidad a^2 á la potencia quarta diria: 2 por 4 son 8, y a^8 seria la potencia quarta de a^2. Esta regla se funda en que como la cantidad ó raiz ha de estar tantas veces contenida por factor en la potencia quantas unidades tiene el exponente de dicha potencia, resulta que esta se compondrá de tantos factores monomios iguales como unidades tiene dicho exponente; y como para hacer una multiplicacion de esta especie se han de sumar todos los exponentes, resulta que el exponente del primer factor será tantas veces sumando como unidades tenia el exponente de la potencia; luego en punto á los exponentes se deberá multiplicar el exponente de la cantidad por el exponente de la potencia. Este raciocinio se hará mas palpable indicando aqui la operacion anterior: $(a^2)^4=a^2\times a^2\times a^2\times a^2=a^{2+2+2+2}=a^{4\cdot 2}=a^8$.

En esta regla está comprendido tambien el caso en que no lleva exponente la letra, porque entonces se le sobrentiende la unidad; y así, pasaremos á resolver algunos exemplos, y serán:

1.° $(a)^4=a\times a\times a\times a=a^1\times a^1\times a^1\times a^1=a^{1+1+1+1}=a^{1\cdot 4}=a^4$.
2.° $(-2a^4b^2c)^2=+4a^8b^4c^2$; 3.° $(-7a^3b^2c^3m^9)^5=-7^5a^{15}b^{10}c^{15}m^{45}$;
y en general 4.° $(5a^6b^3c^4m^5d^4)^r=5^ra^{6r}b^{3r}c^{4r}m^{5r}d^{4r}$.

Estos exemplos manifiestan que *la potencia de un producto de tantos factores como se quiera, es lo mismo que el producto de la misma potencia de cada uno de los factores.*

199 Como para multiplicar quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, resulta que para elevar á potencias los quebrados se elevará el numerador y el denominador; v. g.

1.° $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4=\frac{(a^3)^4}{(b^2)^4}=\frac{a^{12}}{b^8}$; 2.° $\left(-\frac{2a^5b^2c^3}{3d^2m^5}\right)^3=-\frac{8a^{15}b^6c^9}{27d^6m^{15}}$;

y en general 3.° $\left(\frac{5a^7b^nc^r}{6d^5e^3m^t}\right)^p=\frac{5^pa^{7p}b^{np}c^{rp}}{6^pd^{5p}e^{3p}m^{tp}}$.

200 Para indicar que se ha de proceder de la potencia á la raiz se usa del signo $\sqrt{\ }$, que viene á ser una *r* un poco abierta; este signo se llama *signo radical*; entre sus piernas se pone el número que expresa la raiz que se quiere extraer, cuyo número se llama *exponente radical*; y debaxo del signo se pone la cantidad cuya raiz se quiere sacar.

Para extraer raices hay que atender á las mismas tres cosas; en punto á signos se usará de esta regla: *quando el exponente de la raiz sea par se pondrá en la raiz el signo de ambigüedad* $\pm$; *y quando impar, el signo de la cantidad de que se havia de extraer* la raiz. Esta regla está fundada en que quando la potencia es de grado par su signo es siempre $+$, ya lleve la raiz el signo $+$ ya lleve el signo $-$. En efecto, tanto $(+a)^2$ como $(-a)^2$ dan $+a^2$: luego al buscar la raiz segunda ó quadrada de a^2, no sabemos si se deberá tomar el signo $+$ ó el signo $-$; pero si en vez

de a^2 tubiésemos la operacion indicada $(+a)^2$ ó $(-a)^2$, entonces ya no habria ninguna duda, pues está expresado el signo de la raiz; y así, no se deberá poner el signo $\pm$ sino $+$ en el primer caso, y $-$ en el segundo. Quando es ímpar el exponente, el signo de la potencia debe ser el mismo que el de la raiz; luego al proceder de la potencia á la raiz deberemos poner el signo que lleve la cantidad.

En punto á los coeficientes *se dexará indicada la operacion*, porque aun no sabemos el método para extraer las raices numéricas; y finalmente en punto á exponentes *se debe dividir el exponente de la cantidad por el exponente del radical*; porque esta operacion es la contraria de elevar á potencias, y para elevar á potencias se debe multiplicar.

Propongámonos, por exemplo, extraer la raiz quadrada ó segunda de a^4b^6: para esto lo primero que observaremos es que ocurriendo con mucha freqüencia el extraer raices de segundo grado ó quadradas, se omite en estos casos el exponente 2 del radical que se deberia poner; de manera que $\sqrt{a^4b^6}$ es lo mismo que $\sqrt[2]{a^4b^6}$, y executando la operacion del modo que acabamos de decir, será:

1.° $\sqrt{a^4b^6}=\pm a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{6}{2}}=\pm a^2b^3$; 2.° $\sqrt[3]{-a^9b^{12}c^{15}}=-a^3b^4c^5$;
3.° $\sqrt[7]{5a^{28}b^{14}c^{49}}=\sqrt[7]{5}\times a^{\frac{28}{7}}b^{\frac{14}{7}}c^{\frac{49}{7}}=\sqrt[7]{5}\times a^4\times b^2\times c^7$;
y en general 4.° $\sqrt[n]{a^mc^3d^4b^r}=a^{\frac{m}{n}}c^{\frac{3}{n}}d^{\frac{4}{n}}b^{\frac{r}{n}}$.

Si fuesen quebrados se extraerá la raiz del numerador y del denominador, en esta forma: 1.° $\sqrt{\frac{a^4}{b^8}}=\pm\frac{a^{\frac{4}{2}}}{b^{\frac{8}{2}}}=\pm\frac{a^2}{b^4}$;

2.° $\sqrt[3]{-\frac{a^6c^{18}}{b^9}}=-\frac{a^2c^6}{b^3}$; y en general $\sqrt[n]{\frac{a^mc^t}{b^4d^r}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}c^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{4}{n}}d^{\frac{r}{n}}}$,

lo qual está fundado en que para elevar á potencias un quebrado se ha de elevar el numerador y el denominador; por lo que aqui se deberá seguir la regla contraria, la qual manifiesta que *la raiz de un quociente es lo mismo que el quociente de las raices.*

201 Quando la division de los exponentes no se puede hacer exáctamente, aun debe permanecer radical en la expresion; pero se debe sacar fuera de él todo lo que se pueda. Para lo qual en el exponente fraccionario que resulta de quitar el radical se sacan los enteros que se puedan, y aquella cantidad se descompone en factores poniendo por primer factor la cantidad con el exponente entero, y por segundo la misma cantidad con el exponente quebrado; y luego se vuelve á restablecer el radical poniendo entre sus piernas el denominador del quebrado, y debaxo de

él la cantidad con el numerador del quebrado por exponente. Propongámonos, v. g. extraer la raiz tercera ó cúbica de a^8, y executaremos la operacion como aqui se ve: $\sqrt[3]{a^8} = a^{\frac{8}{3}} = a^{2+\frac{2}{3}} = a^2 a^{\frac{2}{3}} = a^2 \sqrt[3]{a^2}$.

Debemos restablecer por último el radical substituyéndole en vez del exponente fraccionario $\frac{2}{3}$, porque debemos siempre presentar el último resultado baxo el mismo aspecto que se nos da el primero.

Si hubiere dos ó mas cantidades en que no se pudiese hacer exâctamente la division, se incluirán todas debaxo del mismo radical con unos exponentes iguales á sus numeradores. Por exemplo: si tubiésemos que extraer la raiz quinta de $-a^7b^{12}c^{18}$, iríamos indicando la operacion como aqui se presenta: $\sqrt[5]{-a^7b^{12}c^{18}} = -a^{\frac{7}{5}} b^{\frac{12}{5}} c^{\frac{18}{5}} = -a^{1+\frac{2}{5}} b^{2+\frac{2}{5}} c^{3+\frac{3}{5}} = -a^1 \times a^{\frac{2}{5}} \times b^2 \times b^{\frac{2}{5}} \times c^3 \times c^{\frac{3}{5}} = -ab^2c^3 \sqrt[5]{a^2b^2c^3}$.

Esto está fundado en que como para elevar á potencias hemos elevado á la potencia correspondiente cada factor, y tenemos que el producto de dos potencias es lo mismo que la potencia del producto; se verificará tambien la inversa, esto es, que *la raiz de un producto de tantos factores como se quiera*, *es igual con el producto de las raices del mismo grado de los factores*.

202 Estas cantidades que estan afectas del signo $\sqrt{\ }$ toman el nombre de él, y se llaman *cantidades radicales*; por exemplo: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, &c. son cantidades radicales. Quando a y b se representen por números, podrá suceder que a, por exemplo, sea un número quadrado como 1,4,9, 16, &c. ó $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, &c. y que b sea un número cúbico como 1,8,27,64, &c. ó $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$, &c. En este caso el radical desaparecerá porque estos números tendrán raiz exâcta; pero quando no sea ninguno de estos números como quando a valga 2, 3, 5, 6, 7, &c. y el valor de b sea 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, &c. no tiene raiz exâcta; y es imposible hallar un número entero ni quebrado que exprese el valor de estos radicales; por lo qual $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, &c. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{10}$, &c. ó qualesquiera otros radicales de esta especie, esto es, que no tengan raiz exâcta, se llaman *números sordos*, *irracionales ó incomensurables*: recibiendo estos nombres porque no tienen ninguna comun medida con la unidad, como la tienen todos los demas números.

203 Estas expresiones radicales entran tambien con freqüencia en los cálculos, y por lo mismo conviene adiestrarse en executar con ellas las operaciones. Las reglas que hay que seguir para esto son las mismas que para las expresiones en forma de entero; porque quando hemos demostrado que $+a$ junto con $+b$ era $a+b$, por a entendíamos solo una cantidad en quanto cantidad, esto es, en quanto susceptible de aumento ó de diminucion, prescindiendo de si este valor le podríamos ó no expresar exâctamente por un número. Así, para sumarlas *pondremos las unas*

á continuacion de las otras con los mismos signos que llevan, haciendo la reduccion y destruccion que se pueda. Para lo qual es menester advertir que los términos donde entran radicales no son semejantes sino tienen debaxo del radical una misma cantidad, siendo el mismo el exponente del radical; de manera que solo se pueden diferenciar en el signo y coeficiente que hay antes de los radicales. Así, si quisiéramos sumar $5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}$ con $+2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8b^2a^3\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc}$, indicaríamos y executaríamos nuestra operacion como aqui se presenta: $(5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3})+(2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8b^2a^3\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc})=5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}+2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8b^2a^3\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc}=-3a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-16c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}+2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}$.

204 Para restarlas tampoco hay mas que *poner el subtraendo á continuacion del minuendo mudando los signos al subtraendo*; de manera que si la segunda de las cantidades de arriba la quisiéramos restar de la primera, indicaríamos y executaríamos la operacion como aqui se presenta: $(5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3})-(2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc})=5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}-2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}+8a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+12c^2\sqrt{bc}=13a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}+8c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}-2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}$.

205 Para multiplicarlas, si el radical es de un mismo grado, como el producto de dos raices de un mismo grado es el mismo (201) que la raiz del producto, no tendremos mas que *poner debaxo del radical el producto de las cantidades; despues se ve si se puede sacar algo de debaxo del radical, lo que se executará viendo si hay alguna letra debaxo con mayor exponente que el del radical; en cuyo caso se divide dicho exponente por el del radical, y el quociente entero será el exponente de dicha letra fuera del radical: y la resta, si la hay, será el exponente de la misma letra que ha de quedar debaxo del radical.*

Por exemplo: $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[3]{abc^2}=\sqrt[3]{a^3b^2c^2}=a\sqrt[3]{b^2c^2}$; $\sqrt[5]{a^3b^4c^2}\times\sqrt[5]{ab^3c^3}\times\sqrt[5]{a^4b^3dc^2}=\sqrt[5]{a^8b^{10}c^7d}=ab^2c\sqrt[5]{a^3c^2d}$.

Quando los radicales no tienen un mismo exponente se reducen á él, *multiplicando los exponentes de cada cantidad y de cada radical, por el producto de los exponentes de los radicales de los demas.* Esto está fundado en lo mismo que el reducir los quebrados á un mismo denominador; pues podemos quitar los radicales poniendo á las letras exponentes fraccionarios, cuyos denominadores sean los exponentes de los radicales; y así, la reduccion debe ser la misma solo con la diferencia de que aqui

los exponentes de radicales hacen oficios de denominadores. Así, si quisiera reducir á un mismo exponente radical los $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[5]{a^3b^4}$, $\sqrt{abc}$; multiplicaríamos primero todos los exponentes radicales diciendo: 3 por 5 son 15; 15 por 2 exponente del tercero son 30, y este será el exponente comun del radical; ahora, para saber los que deben tener las cantidades que se hallan debaxo de cada radical, multiplicaremos los exponentes de las letras que se hallan debaxo del primero por 10, producto de 5 por 2; los de las que se hallan debaxo del segundo por 6, producto de 3 por 2; y los de las que se hallan debaxo del tercero por 15, producto de 3 por 5; de manera que dichos radicales los tendremos reducidos á

$$\sqrt[30]{a^{20}b^{10}},\ \sqrt[30]{a^{18}b^{24}},\ \sqrt[30]{a^{15}b^{15}c^{15}};$$

y si los quisiera multiplicar sacaria por producto:

$$\sqrt[30]{a^{20+18+15}b^{10+24+15}c^{15}}=\sqrt[30]{a^{53}b^{49}c^{15}}=ab\sqrt[30]{a^{23}b^{19}c^{15}}.$$

En los libros elementales se suele presentar esta regla quitando los radicales por medio de los exponentes fraccionarios, y siguiendo luego la regla de los exponentes; pero es mas sencillo el reducirlos á un mismo exponente radical y hacer la multiplicacion. Para manifestar como se van indicando estas operaciones, lo executaremos en el exemplo siguiente:

$$\sqrt[3]{a^2bc^2}\times-\sqrt[4]{a^3b^2c}=\sqrt[12]{a^8b^4c^8}\times-\sqrt[12]{a^9b^6c^3}=-\sqrt[12]{a^{17}b^{10}c^{11}}=-a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}.$$

Pero tambien se pueden ir colocando debaxo del radical comun las cantidades formando producto, y por lo mismo pondremos algunos exemplos, porque es menester estar corrientes en la práctica. Si me propusiese multiplicar $\sqrt[3]{a^2b}$ por $\sqrt[5]{a^4b^2c}$ diria: 3 por 5 son 15, este deberá ser el exponente del radical; ahora bien, los exponentes de las letras que estan debaxo del primero se deberán multiplicar por 5, y para la a será: 2 por 5 son 10, á este deberé añadir el producto del exponente 4 de la a del segundo por 3, exponente del radical primero, y será: 3 por 4 son 12 y 10 que tenia son 22, el qual será el exponente de la a; ahora, para la b diré: 1 por 5 es 5; 2 por 3 son 6, y 5 que tenia son 11; este deberá ser el exponente de la b; y respecto de la c como no la hay sino en un factor llevará por exponente el producto de 1 por 3 exponente del otro radical, y se tendrá que $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[5]{a^4b^2c}=\sqrt[15]{a^{22}b^{11}c^3}=a\sqrt[15]{a^7b^{11}c^3}$.

Paraque se adquiera esta práctica pondremos aun algunos exemplos; pero indicaremos esta abreviacion en el primero paraque los principiantes la entiendan bien, y despues procuren hacerla de una vez:

$$-\sqrt[4]{a^3b^2c^3d}\times-\sqrt[7]{a^5b^6d^5}=\sqrt[28]{a^{3\cdot7+5\cdot4}b^{2\cdot7+6\cdot4}c^{3\cdot7}d^{1\cdot7+5\cdot4}}=\ldots.$$
$$\sqrt[28]{a^{41}b^{38}c^{21}d^{27}}=ab\sqrt[28]{a^{13}b^{10}c^{21}d^{27}};$$

ahora, en este exemplo executaremos las multiplicaciones á un tiempo:

de manera que $\sqrt[3]{a^2b^2c}\times\sqrt[8]{b^7c^6a^5}\times-\sqrt[5]{a^2b^2c^4}=-$
$\sqrt[120]{a^{80+75+48}b^{80+105+48}c^{40+90+96}}=-\sqrt[120]{a^{203}b^{233}c^{226}}=-$
$abc\sqrt[120]{a^{83}b^{113}c^{106}}$.

En este haremos el producto y suma de una vez:

$$\sqrt[5]{a^3b^4}\times\sqrt[6]{a^2b^3c^4}=\sqrt[30]{a^{28}b^{39}c^{20}}=b\sqrt[30]{a^{28}b^9c^{20}}.$$

Y si los exponentes fuesen indeterminados se tendria

$$\sqrt[n]{a^rb^s}\times-\sqrt[m]{a^pc^tb^q}=-\sqrt[mn]{a^{rm+pn}b^{sm+qn}c^{tn}}.$$

206 Para la division tenemos igualmente en virtud de lo dicho (200) que siendo la raiz de un quociente lo mismo que el quociente de las raices, daremos por regla: *el quociente de dos radicales de un mismo grado es un radical del mismo grado del quociente de las cantidades que hay debaxo.* Luego el quociente de dividir $\sqrt[5]{a^3b^4c^5}$ por $\sqrt[5]{a^2b^5c^2d^4}$ será:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^4c^5}}{\sqrt[5]{a^2b^5c^2d^4}}=\sqrt[5]{\frac{a^3b^4c^5}{a^2b^5c^2d^4}}=\sqrt[5]{\frac{ac^3}{bd^4}};$$

$$\text{y}\quad\frac{\sqrt[7]{4a^6b^5r^3}}{-\sqrt[7]{2a^3b^4r^5}}=-\sqrt[7]{\frac{4a^6b^5r^3}{2a^3b^4r^5}}=-\sqrt[7]{\frac{2a^3b}{r^2}}.$$

Quando no tienen el mismo exponente radical se reducirán á él, de manera que

$$\frac{\sqrt[3]{a^2bc^2d}}{\sqrt{abcm}}=\frac{\sqrt[6]{a^4b^2c^4d^2}}{\sqrt[6]{a^3b^3c^3m^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^4b^2c^4d^2}{a^3b^3c^3m^3}}=\sqrt[6]{\frac{acd^2}{bm^3}};$$

ó haciéndolo abreviadamente

$$\frac{\sqrt[4]{a^3b^2cd^3m}}{\sqrt[3]{a^2cd^2em^2}}=\sqrt[12]{\frac{a^9b^6c^3d^9m^3}{a^8c^4d^8e^4m^8}}=\sqrt[12]{\frac{ab^6d}{ce^4m^5}};\ \text{ó en general}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^3b^rc^s}}{\sqrt[m]{a^5c^td}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{3m}b^{rm}c^{sm}}{a^{5n}c^{tn}d^n}}=\sqrt[nm]{\frac{a^{3m-5n}b^{rm}c^{ms-tn}}{d^n}}.$$

207 Las cantidades que estan afectas de los radicales tambien se elevan á potencias, y se extraen de ellas raices de qualquier grado.

Para elevarlas á una potencia qualquiera se deduce de las reglas de la multiplicacion que basta elevar la cantidad que hay dentro á la misma potencia, dexando el mismo exponente del radical; porque elevar

$(\sqrt[3]{a^2b})$ á la quarta potencia es efectuar el producto

$(\sqrt[3]{a^2b})^4 = \sqrt[3]{a^2b} \times \sqrt[3]{a^2b} \times \sqrt[3]{a^2b} \times \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^2b.\,a^2b.\,a^2b.a^2b}$
$= \sqrt[3]{a^{2\cdot4}b^{1\cdot4}} = \sqrt[3]{a^8b^4} = a^2b\,\sqrt[3]{a^2b}.$

Al executar esta operacion puede ocurrir que el exponente del radical sea divisible por el de la potencia á que se eleva la cantidad propuesta; y en este caso queda hecha la operacion con dividir el exponente del radical por el exponente de la potencia á que se quiere elevar. V. g.: para elevar á la segunda potencia la cantidad $\sqrt[4]{a^3b^2}$ quedará executado con dividir el exponente 4 por el 2, y será dicha potencia $\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^2 =$ $\sqrt{a^3b^2} = ab\sqrt{a}$; esto está fundado en que substituyendo en vez del radical el exponente fraccionario se tiene $\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^2 = \left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{4}}\right)^2 = a^{\frac{6}{4}}b^{\frac{4}{4}}$; cuyos exponentes despues de simplificados se reducen á $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{2}$ ó 1; por lo que dan $\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^2 = a^{\frac{6}{4}}b^{\frac{4}{4}} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^3b^2} = ab\sqrt{a}$.

Como extraer raices es lo contrario de elevar á potencias, para extraer la raiz de una cantidad radical dividiremos el exponente de la cantidad que haya dentro por el exponente de la raiz que queramos sacar, y al resultado le pondremos el mismo radical. Así $\sqrt{\sqrt[7]{a^6b^4c^8}} = \sqrt[7]{a^3b^2c^4}$;
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3b^6c^9d^{15}}} = \sqrt[4]{ab^2c^3d^5} = d\sqrt[4]{ab^2c^3d}$;
pero como no siempre se podrá executar la division exâctamente, con el fin de que en el resultado solo haya un radical se multiplica el exponente del radical primitivo por el de la raiz que queremos sacar, sin llegar á las cantidades que hay debaxo del signo radical. Por exemplo:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2b^5c^7}} = \sqrt[12]{a^2b^5c^7}$; $\sqrt[5]{\sqrt[7]{a^6b^4c^9d^{11}}} = \sqrt[35]{a^6b^4c^9d^{11}}$.

De las cantidades ó expresiones imaginarias, y de las operaciones que con ellas se executan.

208 Hemos visto (198) que al elevar una cantidad á una potencia par siempre resultaba un signo +, de donde se deduce que ninguna cantidad negativa puede ser potencia par; luego si nos pidiesen extraer una raiz de grado par de una cantidad negativa, se nos pedia una cosa que no podia ser ó un imposible. No obstante ocurre esto con mucha frequencia, y por esta causa á estas expresiones se les ha dado el nombre de *cantidades ó expresiones imaginarias*, porque solo la imaginacion es la que tiene facultad para comparar cosas contradictorias. Así,
$\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b^4}$, $\sqrt[2n]{-a^m}$ son expresiones imaginarias.

Como ocurren con mucha freqüencia y son de la mayor importancia

las conseqüencias á que nos conducen, vamos á exercitarnos en su cálculo; pero antes conviene que manifestemos esta propiedad general.

Toda expresion imaginaria se puede descomponer en dos factores, el uno real que será un radical del mismo grado que contenga debaxo de sí la cantidad real, y el otro un radical del mismo grado que contenga debaxo de sí la unidad con el signo negativo.

Tomemos para manifestarlo la expresion $\sqrt[2n]{-a^m}$ que es el símbolo de toda expresion imaginaria quando n es un número entero qualquiera; y como toda cantidad se puede considerar multiplicada por la unidad, podremos poner la $-a^m$ baxo este aspecto $-1a^m$, ó $+1\times-a^m$, ó $a^m\times-1$, porque á qualquiera de los factores que le pongamos el signo — hará que le lleve el producto; luego en vez de $\sqrt[2n]{-a^m}$ podremos poner $\sqrt[2n]{a^m\times-1}$; pero podemos evitar todo radical con el uso de los exponentes fraccionarios (201), luego $\sqrt[2n]{a^m\times-1}=a^{\frac{m}{2n}}\times(-1)^{\frac{1}{2n}}$, ó restableciendo los radicales será $\sqrt[2n]{a^m}\times\sqrt[2n]{-1}$, que manifiesta la proposicion enunciada.

Ahora, si n fuese un número ímpar qualquiera, se tendrá que como $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{\sqrt[n]{-1}}$, y la raiz de grado ímpar de -1 es -1, tendremos que $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{-1}$, y por consiguiente será:
$\sqrt[2n]{-a^m}=\sqrt[2n]{a^m}\times\sqrt{-1}=B\sqrt{-1}$, llamando B á la cantidad $\sqrt[2n]{a^m}$.

209 Con las expresiones imaginarias se hacen las mismas operaciones que con las reales, y se executan del mismo modo; de manera que para sumar $3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}$ con $6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}$, *las pondremos las unas á continuacion de las otras con los mismos signos que llevan, y despues executaremos la reduccion y destruccion como aqui se presenta:*

$$\left(3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)+\left(6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)=3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}+6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}=4\sqrt[6]{-a^3b^2}+16\sqrt[4]{-c^3d^5}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}.$$

210 Para restarlas *mudaremos los signos al subtraendo*, y executaremos despues la reduccion y destruccion que se pueda. Así, para restar la segunda de estas cantidades de la primera, executaremos la operacion como aqui se presenta: $\left(3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)-$

$(6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5})=3\sqrt{-a^4}-$
$2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}-6\sqrt[6]{-a^3b^2}+5\sqrt[8]{-a^5b^3}+3\sqrt{-a^4}-$
$8\sqrt[4]{-c^3d^5}=6\sqrt{-a^4}-8\sqrt[6]{-a^3b^2}+5\sqrt[8]{-a^5b^3}.$

211 Para multiplicarlas las *descompondremos antes en sus dos factores, y despues executaremos nuestra operacion como en los radicales*; de manera que para multiplicar $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$ descompondremos antes á $\sqrt{-a}$ en $\sqrt{a}.\sqrt{-1}$, y á $\sqrt{-b}$ en $\sqrt{b}.\sqrt{-1}$; y la multiplicacion la haremos en esta forma: $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{b}.\sqrt{-1}=$
$\sqrt{a}.\sqrt{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}\times(-1)^{1}=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$

Observando este resultado, echamos de ver que el producto de dos imaginarias es una cantidad real, y que el signo que nos resulta es contrario al que obtendríamos por las reglas generales de la multiplicacion; pues teniendo $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ los signos positivos, deberia salir el producto positivo, y vemos que es negativo; esta circunstancia solo se verifica quando el producto es real, porque entonces sale un -1 de debaxo del radical, que hace trastornar los signos del producto; quando este permanece imaginario, entonces como el signo $-$ queda debaxo del radical, no sale ninguno que trastorne el signo del producto. En efecto, $\sqrt{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt[4]{b}.\sqrt[4]{-1}=\sqrt{a}.\sqrt[4]{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{4}}=\ldots$
$\sqrt[4]{a^2}.\sqrt[4]{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a^2b}\times(-1)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[4]{(-1)^3}=\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[4]{-1}$; que poniéndolo todo debaxo de un radical, porque tienen un mismo exponente, será: $\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{a^2b\times-1}=\sqrt[4]{-a^2b}.$

212 Para dividirlas *se descompondrán tambien en factores el dividendo y el divisor*; de manera que $\sqrt{-a}$ dividido por $\sqrt{-b}$, será: $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}.\sqrt{-1}}$; y como $\sqrt{-1}$ arriba y $\sqrt{-1}$ abaxo se pueden suprimir, quedará $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ que es igual con $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Del mismo modo si tubiéramos que dividir $\sqrt{-a}$ por $\sqrt[4]{-b}$, las descompondríamos en $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ y en $\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1}$ y despues iríamos executando nuestra operacion como aqui se presenta:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt[4]{-b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}\times\frac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{(-1)^{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{b}}\times(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\times(-1)^{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\times(-1)^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{a^2}{b}\times\sqrt[4]{-1}}=\sqrt{-\frac{a^2}{b}}$$

Quando en una expresion entra una parte real y otra imaginaria toda la expresion es imaginaria, de manera que $a+\sqrt{-b}$ es una expresion imaginaria: porque si suponemos que sea una cantidad real como c, será $a+\sqrt{-b}=c$; y si de estas cantidades quitamos la a, tendremos: $\sqrt{-b}=c-a$, pero $c-a$ expresa la diferencia entre c y a, que son cantidades reales, luego la diferencia entre dos cantidades reales seria igual á una expresion imaginaria, lo qual siendo un absurdo da á conocer que $a+\sqrt{-b}$ no puede ser una cantidad real. Como $\sqrt{-b}$ es lo mismo que $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$, resulta que toda expresion de imaginarias de segundo grado puede tomar esta forma $A+B\sqrt{-1}$, siendo A y B cantidades reales; d' Alembert fue el primero que demostró esta proposicion en el párrafo 69 *de sus investigaciones sobre la causa general de los vientos*; *donde demuestra*, *igualmente que en las memorias de la Academia de Berlin*, *que toda expresion donde entren expresiones tales como* $A+B\sqrt{-1}$, *ya sea por suma*, *por resta*, *por multiplicacion*, *&c. es susceptible de una forma análoga.*

213 Antes de concluir este punto no podemos menos de observar que si se multiplican entre sí dos binomios de esta especie, pero que en cada uno sea diferente el signo del radical, el producto será una cantidad real; v. g. si multiplicamos $A+B\sqrt{-1}$ por $A-B\sqrt{-1}$ tendremos:

$$(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})=A^2+AB\sqrt{-1}-AB\sqrt{-1}+B^2=A^2+B^2$$

De aqui podemos deducir una regla para descomponer en factores toda cantidad compuesta de la suma de dos términos, cuya operacion es muy socorrida en la práctica y es: que se *ponga la raiz quadrada de uno de los términos en ambos factores por primer término*, *y por segundo la raiz del otro multiplicada por* $\sqrt{-1}$, *pero con diferente signo en cada factor*; de manera que $a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})\times(a-b\sqrt{-1})$;

$a^4+b^4=(a^2+b^2\sqrt{-1})\times(a^2-b^2\sqrt{-1})$;

$a^6b^2c^8+d^2m^{10}=(a^3bc^4+dm^5\sqrt{-1})\times(a^3bc^4-dm^5\sqrt{-1})$;

$a^3+b=(a\sqrt{a}+\sqrt{b}\sqrt{-1})\times(a\sqrt{a}-\sqrt{b}\sqrt{-1})$;

$a^m+b^n=(\sqrt{a^m}+\sqrt{b^n}\sqrt{-1})\times(\sqrt{a^m}-\sqrt{b^n}\sqrt{-1})$.

SEGUNDA PARTE DEL ALGEBRA.

De la análisis algebráica y resolucion de las equaciones de primer grado.

214 Quando dos cantidades se hallan separadas entre sí por medio del signo $=$, reciben estas expresiones el nombre de *equaciones*; de manera que equacion es *la igualdad de dos cantidades*, como, por exemplo, $c=a+b$; lo que se pone á la izquierda de dicho signo se llama *primer miembro*, y lo que se pone á la derecha *segundo miembro*. A la parte del Algebra que trata de resolver los problemas despues de puestos en equacion, se llama *análisis*. Todo el espíritu analítico consiste en suponer conocido lo mismo que se trata de indagar para despues llegar á conocerlo. Por esta causa los mejores analistas Fermat, Vieta y aun Arquimedes, al intentar resolver una qüestion, sea de la especie que sea, empiezan con estas expresiones: *Factum sit*, *suppono rem tamquam jam factam*, esto es, *supóngase hecho todo lo que se pide hacer*, ó *supongo la cosa como ya hecha*. Despues de considerar la cosa como ya hecha se expresan las cantidades por letras, y las condiciones á que han de satisfacer dichas cantidades por equaciones. Para señalar las cantidades por letras es necesario elegir caractéres con que se distingan las que se dan conocidas de las desconocidas ó cantidades que se buscan, á que damos el nombre de *incógnitas*. Vieta y Fermat señalaban las cantidades que se buscaban ó incógnitas con las letras vocales del alfabeto, y las conocidas con las consonantes; despues se ha abandonado este uso (*), y en la actualidad se señalan las incógnitas con las últimas letras del alfabeto z, y, x, u, &c. y las conocidas con las primeras a, b, c, &c. en cuyo modo de indicar no se ve un límite de demarcacion entre unas y otras; y así, al encontrar en un cálculo la m, la n, la p, la q, la r, &c. parece que dudaríamos si eran símbolos de cantidades conocidas, ó de cantidades desconocidas; pero de esto no resulta confusion porque el contexto dice las que se deben considerar como incógnitas.

215 El expresar las condiciones en equaciones se llama *plantear el*

(*) *No reputamos muy puesto en razon el haber abandonado este uso, y yo creo que su orígen ha sido el siguiente: quando Descartes aplicó el Algebra á la Geometría ponia siempre equaciones indeterminadas, y por consiguiente adelantó la análisis indeterminada; en la análisis indeterminada ó en las equaciones indeterminadas hay cantidades constantes, que son las que en una misma qüestion no tienen mas de un valor, y variables que son aquellas que en una misma qüestion pueden tener todos los valores que se quiera: á las constantes las señalaba él con las primeras letras del alfabeto, y á las variables con las últimas; desde entonces se ha continuado expresando tanto las incógnitas como las variables por las últimas letras del alfabeto.*

problema; y para conseguirlo no se pueden dar reglas que sean del todo independientes del talento del calculador; más no obstante las mas generales son las de observar las de una rigorosa traduccion. Así, observaremos que las palabras del lenguage comun *sumado*, *mas*, *con*, *junto*, *y*, *agregado*, *unido* y todas sus semejantes, conducen á escribir el signo +; las *restado de*, *quitado de*, *disminuido en*, *menos* y sus semejantes, conducen al signo —; las *multiplicado*, *tantas veces mayor* y sus semejantes, al signo ×; y las *dividido*, *partido*, *tantas veces menor* y sus semejantes, al signo de dividir; las *elevado á tal potencia*, como quadrado, cubo, &c. al de elevar á potencias; y finalmente las palabras de *extraer tal ó tal raiz* al signo radical.

Quando despues de planteado un problema se hallan tantas equaciones como incógnitas, entonces la qüestion es *determinada*; quando resultan menos equaciones que incógnitas es *indeterminada*; y quando resultan mas equaciones que incógnitas se deberia llamar *mas que determinada*; pero en este caso la qüestion ó es absurda, ó es inútil alguna condicion de las que se dieron, y por lo mismo no se considera esta clase de qüestiones.

La parte de la análisis que trata de las qüestiones determinadas se llama *análisis determinada*; y la que trata de las indeterminadas se llama *análisis indeterminada*.

Quando en una equacion considerada por sí sola no hay mas de una incógnita, se dice que es determinada; pero quando se hallan dos ó mas incógnitas se dice que dicha equacion es indeterminada.

216 Las equaciones, sean determinadas ó indeterminadas, se dividen en *grados*, tomando el nombre del mayor exponente que tenga la incógnita; y así, $a+bx=cx+d+e$ es una equacion de *primer grado*, porque la incógnita x que contiene, solo se halla elevada á la primera potencia: y es determinada porque solo contiene una incógnita que es la x. La equacion $ax^2+bx=c+dx$ es de *segundo grado*, porque el mayor exponente de la incógnita es 2: y ademas es determinada porque solo contiene una incógnita que es la x; y la equacion $ax^5+bx^9+d=cx^2$ es del *noveno grado*, porque el mayor exponente de la incógnita x es 9: y es determinada por la misma razon que las anteriores.

Las equaciones indeterminadas tambien toman el nombre del mayor exponente de las incógnitas; pero como puede haber términos donde se hallen las incógnitas multiplicadas ó divididas entre sí, para averiguar el número de dimensiones desconocidas (*variables* se llamarán en lo sucesivo) ó el grado de la equacion, se sumarán los exponentes de las incógnitas que se hallan en este mismo término. Por exemplo: la equacion $ax+bz=c$ es una equacion indeterminada porque tiene dos incógnitas: y es de primer grado porque en un mismo término no se halla sino una incógnita, y es con la unidad por exponente; la equacion $az^3+bz^3x^2=ax^2$ es indeterminada porque tiene dos incógnitas: y ademas es de quinto

grado porque en el segundo término del primer miembro se hallan dos incógnitas, la una con un exponente 3, y la otra con un exponente 2; luego en este término hay cinco dimensiones desconocidas. La equacion $ax^2u^4+bu^7-cx^2u^3z=ez$ es una equacion indeterminada, porque contiene tres incógnitas: y ademas es del séptimo grado porque en el segundo término se halla la *u* elevada á la séptima potencia; pues aunque se sumen los exponentes 2, 3 y 1 de las tres incógnitas que se hallan en el tercer término del primer miembro, solo dan seis dimensiones incógnitas.

Quando las equaciones son de un grado mas elevado al primero pueden ser de dos maneras; *puras ó incompletas*, que son aquellas en que solo se halla la incógnita con el exponente que da nombre á la equacion; ó *mixtas*, *completas ó afectas*, que son aquellas en que ademas del término donde se halla la incógnita con el exponente que da nombre á la equacion, se encuentra en otros términos con un exponente menor. Por exemplo: $x^2+a=b$, $x^4+c=b$, $x^7=a$, ó en general $x^n=b$, son equaciones puras de 2.°, 4.°, 7.°, y n.° grado; las equaciones $x^2+x+c=b$, $x^4+ax^3+bx=c$, $x^7+bx=a$, ó en general $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\&c.=c$ son equaciones mixtas, completas ó afectas de los mismos grados que las anteriores.

217 Como el espíritu analítico consiste en hallar una ó mas cosas desconocidas en valores de las cosas que se dan conocidas, todo el artificio de la análisis, quando ya está planteado el problema, consiste en determinar á qué cantidades conocidas es igual ó son iguales las incógnitas; y las operaciones que se executan para dexarla sola en un miembro sin coeficiente, exponente, ni divisor, y con el signo positivo, se comprenden baxo el nombre de *despejo de las incógnitas*; para lo qual sí suministra medios la análisis, que es lo que vamos á manifestar respecto de las de primer grado.

218 Las Matemáticas han mudado enteramente de aspecto desde que se adelantó el Álgebra, aplicándola á la Geometría; y todos los grandes progresos se deben á la aplicacion de la análisis, sin embargo de que aun no se pueden resolver con exâctitud y generalidad sino las equaciones de primero y segundo grado. Hay métodos para resolver las de tercero y quarto grado, y aun para resolver aproxîmadamente las de un grado qualquiera, que seguramente es una gran ventaja; pero aun dista mucho este ramo del grado de perfeccion que exîge su importancia.

El despejo de las incógnitas se funda en este principio general: *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales los resultados serán iguales.* Para conseguirlo, se executa con el miembro donde no se halla la incógnita, lo contrario de lo que hacen las cantidades que estan juntas con ella en el miembro donde se halla. *Así, quando la incógnita esté junta con otras cantidades por via de suma se despejará restando; quando por via de resta sumando; quando por via de multiplicacion di-*

vidiendo: quando por via de division multiplicando; quando esté elevada á potencias extrayendo raices; y quando se halle debaxo de algun radical elevando á potencias; esto es, haciendo siempre las operaciones contrarias á las que esten indicadas con la incógnita, como manifestaremos.

219 En efecto, 1.º Quando la incógnita se halla sumada con otra cantidad, *queda despejada pasando por via de resta al otro miembro la cantidad que sumaba á la incógnita*; es decir, que si se tiene $x+a=b$, quedará despejada la x pasando el término $+a$ al otro miembro con el signo — de este modo $x=b-a$; porque siendo $x+a=b$, como si de cantidades iguales se quita una misma cantidad los resultados serán iguales, se sigue que si de ambos miembros quitamos la a será $x+a-a=b-a$; pero en el 1.º $+a$ y $-a$ se destruyen, luego quedará $x=b-a$.

220 2.º Quando una cantidad constante afecta á la incógnita por via de resta, *queda despejada pasando al otro miembro dicha cantidad por via de suma*; es decir, que si se tiene $x-a=b$ será $x=b+a$; porque si á ambos miembros de la equacion añadimos una misma cantidad tal como a, se tendrá $x-a+a=b+a$; y como $-a$ y $+a$ en el primer miembro se destruyen, quedará $x=b+a$.

Cor. De estos dos casos se deduce que *para pasar un término de un miembro á otro basta mudarle el signo*; y *que si en un resultado nos viniese por último la incógnita con el signo —, se podrá poner con el signo + mudando los signos á toda la equacion*; porque esto equivale á trasladar los términos de un miembro al otro. Así, si tubiésemos $-x=a-b$ podríamos poner $x=b-a$.

221 3.º Quando una cantidad multiplica á la incógnita, quedará esta despejada *partiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita*; es decir, que si se tiene $ax=b$ resultará $x=\frac{b}{a}$; porque si dividimos ambos miembros de dicha equacion por a se tendrá $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$; y como a arriba y a abaxo se pueden suprimir sin que se altere la expresion, quedará $x=\frac{b}{a}$.

222 4.º Quando una cantidad divide á la incógnita, quedará esta despejada *multiplicando el otro miembro por lo que divide á la incógnita*; es decir, que si se tiene $\frac{x}{a}=b$ será $x=ab$.

Para demostrarlo observaremos que si multiplicamos ambos miembros de la equacion por a, tendremos $\frac{ax}{a}=ab$; pero en el primer miembro la a del numerador se puede suprimir con la del denominador, luego resultará $x=ab$.

223 Al despejar una incógnita no se presentan equaciones como las que hemos considerado hasta ahora, sino que se hallan á un tiempo enlazadas con las incógnitas las cantidades conocidas por via de suma, resta, multiplicacion y division; y en este caso *para despejarla lo primero que se hace es pasar al primer miembro todos los términos donde se halla la incógnita, y al segundo todos aquellos donde no se halla, lo que se consigue mudando los signos del término ó términos que se trasladan. Despues se quitan todos los divisores de los términos donde hay incógnita, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demas; luego, como en todos los términos del primer miembro se ha de hallar la incógnita, se descompondrá en dos factores sacando la incógnita fuera de un paréntesis, y encerrando dentro de él lo demas que multiplique á la incógnita; y finalmente quedará despejada dividiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita, que es lo que se halla dentro del paréntesis.*

Propongámonos, por exemplo, despejar la incógnita de esta equacion:

$$\frac{x}{a}+b+2x-\frac{c^2}{n}=d+\frac{3x}{5}+m-\frac{x}{e};$$

lo primero que executaremos será pasar al primer miembro los términos $\frac{3x}{5}$ y $-\frac{x}{e}$ del segundo, y los b y $-\frac{c^2}{n}$ del primero al segundo mudándoles los signos; de manera que tendremos:

$$\frac{x}{a}+2x-\frac{3x}{5}+\frac{x}{e}=d+m-b+\frac{c^2}{n};$$

ahora quitaremos todos los divisores de los términos donde hay x, multiplicando el $\frac{x}{a}$ por $5e$, producto de los divisores de los demas términos; el $2x$ por $5ae$; el $-\frac{3x}{5}$ por ae, producto de los divisores de los demas; y el $\frac{x}{e}$ por $5a$, producto de los divisores de los demas; todo el 2.º miembro se multiplicará por $5ae$, producto de todos los divisores del primero, y será: $5ex+10aex-3aex+5ax=5ae(d+m-b+\frac{c^2}{n})$ ó reduciendo $5ex+7aex+5ax=5ae\left(d+m-b+\frac{c^2}{n}\right)$ (A).

Esta transformacion no altera la equacion, porque equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos los dichos divisores; pues en el término donde haya alguno queda hecha la multiplicacion con suprimirle.

Tambien pudiéramos haber quitado el divisor n del $\frac{c^2}{n}$ contándole entre los divisores, y entonces practicando la regla hubiéramos tenido:

$5enx+7aenx+5anx=5aden+5aemn-5aebn+5aec^2$.

Pero de este modo no nos parece tan ventajoso por quanto complica mas la equacion, no influyendo esto en nada para el simple despejo.

Ahora, resolviendo en factores el primer miembro de la equacion (A), lo que conseguiremos sacando la x fuera de un paréntesis que contenga todo lo demas, se tendrá: $x(5e+7ae+5a)=5ae\left(d+m-b+\frac{c^2}{n}\right)$;

y dividiendo por lo que multiplica á la incógnita, resultará por último:

$$x=\frac{5ae\left(d+m-b+\frac{c^2}{n}\right)}{5e+7ae+5a}$$

Del mismo modo se procederia en equaciones mas complicadas.

Cor. De aqui resulta que *una cantidad que en un miembro se halla como factor puede pasar al otro por divisor*; y al contrario: *toda cantidad que se halla por divisor puede pasar por factor al otro miembro*; y que quitar los divisores de una equacion *equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos ellos.*

224 Quando la incógnita se halla elevada á una potencia qualquiera en una equacion pura, *se despeja extrayendo del otro miembro una raiz del grado que expresa el exponente de la potencia*; es decir: que si se tiene $x^n=b$, quedará despejada la x poniendo $x=\sqrt[n]{b}$. Porque si extraemos de ambos miembros de la equacion $x^n=b$ la raiz n, tendremos $\sqrt[n]{x^n}=\sqrt[n]{b}$; pero $\sqrt[n]{x^n}=x^{\frac{n}{n}}=x^1=x$, luego $x=\sqrt[n]{b}$; si n fuese un número par se deberá poner el signo $\pm$; de manera que si se tubiese $x^2=a^2$, deberíamos obtener $x=\pm a$. Tambien deberíamos poner en el primer miembro $\pm$, de manera que en rigor deberia ser $\pm x=\pm a$, que da $+x=+a$, $+x=-a$, $-x=+a$, $-x=-a$; pero como estos dos últimos valores son los mismos que los primeros mudando el signo á las equaciones, solo se conserva el $\pm$ en el segundo miembro.

225 Si se hallase la incógnita debaxo de algun radical, quedaria despejada *elevando el otro miembro á una potencia del mismo grado que el radical*; es decir, que si se tubiese $\sqrt[n]{x}=b$, resultaria $x=b^n$.

Porque si elevamos ambos miembros de la equacion $\sqrt[n]{x}=b$ á la potencia n, resultará que $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=b^n$; pero (§ 207) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\sqrt[n]{x^n}=x^{\frac{n}{n}}=x$, luego $x=b^n$.

226 Quando al plantear una qüestion nos hallamos con tantas equaciones como incógnitas, hemos dicho que dicha qüestion es determinada; para despejar en este caso cada una de las incógnitas se pueden seguir tres métodos diferentes: 1.º el *de substitucion*; 2.º el *de igualacion*; y 3.º *métodos particulares*.

El de substitucion consiste *en determinar en una equacion, v. g. en la primera, una de las incógnitas en valores de las otras, y substituir su valor en las demas, de cuya substitucion resulta una equacion menos y una incógnita menos; luego, en una de estas determinaremos otra incógnita y substituiremos su valor en las demas; y así continuaremos hasta que solo tengamos una equacion con una incógnita, en cuyo caso se despejará y se substituirá su valor en los de las anteriores, á fin de tener en cantidades conocidas expresado el valor de todas las incógnitas.*

Propongámonos por este método despejar las incógnitas en este sistema de equaciones (A):

$$\left.\begin{array}{l}(1.^a)\, x+u+z=a\\(2.^a)\, x+u-z=b\\(3.^a)\, x-u-z=c\end{array}\right\}(A)$$

Para esto determinaré en la primera equacion una qualquiera de ellas tal como la x, y tendré $x=a-u-z$.

Substituiré este valor de x en las dos de abaxo, y se me convierten en

$$\left.\begin{array}{l}a-u-z+u-z=b\\a-u-z-u-z=c\end{array}\right\} \text{ ó en } \left\{\begin{array}{l}a-2z=b\\a-2u-2z=c\end{array}\right\}(B)$$

y como en la primera de estas dos equaciones no tengo ya mas de una incógnita que es la z, la despejaré pasando primero la a al segundo miembro, lo que dará $-2z=b-a$, ó mudando los signos á la equacion paraque sea positiva la z, será $2z=-b+a=a-b$, y finalmente dividiendo por 2 será $z=\frac{a-b}{2}$.

Ahora, substituyamos en vez de z su valor en la segunda de las equaciones (B), ó desde luego en vez de $-2z$ su valor $b-a$, y tendremos: $a-2u+b-a=c$, ó $-2u+b=c$, lo que da pasando b al otro miembro $-2u=c-b$, ó mudando los signos, $2u=b-c$, y $u=\frac{b-c}{2}$.

Si substituimos estos valores de z y de u en el de x será:

$x=a-u-z=a-\frac{b-c}{2}-\frac{a-b}{2}$; que reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña se tendrá: $x=\frac{2a-b+c-a+b}{2}=\frac{a+c}{2}$;

con lo qual quedan despejadas las tres incógnitas.

227 El método de igualacion consiste *en determinar en todas las equaciones una misma incógnita; despues se iguala el valor sacado de la primera con cada valor sacado de las demas, lo que dará una equacion y una incógnita menos; despues en el conjunto de equaciones que*

resultan, se determinará otra incógnita, y el valor sacado de la primera se igualará con los sacados de las demas, lo que nos dará otra equacion y otra incógnita menos; y así procederemos hasta que solo tengamos una sola equacion con una sola incógnita, en cuyo caso se despejará, y se substituirá su valor sucesivamente en las anteriores.

Propongámonos despejar por este método las x, u, z en el mismo sistema (A) de equaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+u+z=a \\ x+u-z=b \\ x-u-z=c \end{array}\right\} (A) \quad \left.\begin{array}{l} x=a-u-z \\ x=b-u+z \\ x=c+u+z \end{array}\right\} (B) \quad \left.\begin{array}{l} a-u-z=b-u+z \\ a-u-z=c+u+z \end{array}\right\} (C)$$

Determinando en todas ellas la x tendremos las tres equaciones (B).

Que igualando el primer valor de x con los dos de abaxo se tendrán las dos (C).

En las quales determinando otra incógnita tal como la z, la primera nos da $-2z=b-a$ ó $2z=a-b$, y $z=\frac{a-b}{2}$, en la que ya no hay incógnita; por lo que podré substituir este valor en la de abaxo y depejar la u. Pero como ahora se trata de manifestar el método de igualacion, determinaremos tambien la z en la segunda equacion, lo que nos dará:

$$-2z=c-a+2u \text{ ó } 2z=a-c-2u, \text{ y } z=\frac{a-c-2u}{2};$$

que igualando los dos valores de z tendremos: $\frac{a-c-2u}{2}=\frac{a-b}{2}$;

y como aqui no tenemos ya mas de una incógnita que es la u, la despejaremos quitando primero los divisores de ambos miembros, lo que nos dará $a-c-2u=a-b$; pasando todo lo conocido al segundo miembro se tendrá $-2u=a-b-a+c$, ó mudando los signos y destruyendo,

$$2u=b-c, \text{ y por último } u=\frac{b-c}{2}.$$

Substituyendo ahora el valor de u y de z en qualquiera de los tres valores (B) de x, por exemplo en el primero, tendremos:

$$x=a-u-z=a-\frac{b-c}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{2a-b+c-a+b}{2}=\frac{a+c}{2};$$

que es el mismo resultado de antes.

228 El tercer método consiste *en executar con las equaciones que se dan, aquellas operaciones que conozca el calculador que le dirigen á despejar inmediatamente la incógnita que se desea*; sobre este punto no se pueden dar reglas, pues solo dependen del talento, destreza y tino del calculador. Por esta causa le aplicaremos al mismo exemplo con el fin de que se puedan comparar unos métodos con otros.

Sean las mismas equaciones (A):

Si me propongo despejar inmediatamente la x, observaré que sumando la primera con la tercera obtendré por primer miembro $2x$, porque $+u$ se destruye con $-u$, y $+z$ con $-z$; y como de sumar los segundos miembros resulta $a+c$, se tendrá $2x=a+c$, de donde $x=\frac{a+c}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} x+u+z=a \\ x+u-z=b \\ x-u-z=c \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Si me propongo despejar directamente la u, restaré la tercera equacion de la segunda y obtendré $2u=b-c$; porque de restar los primeros miembros resulta que x con $-x$ (porque al subtraendo se le han de mudar los signos) se destruyen, y $-z$ con $+z$ igualmente se destruyen; luego dividiendo por 2 será $u=\frac{b-c}{2}$.

Finalmente para despejar z restaré la segunda de la primera, lo que me dará $2z=a-b$ y $z=\frac{a-b}{2}$;

con lo qual tenemos sacados los mismos valores que antes.

Esc. Quando al calculador no le ocurra ninguno de estos métodos particulares, deberá elegir el método de substitucion que en general es el mas corto. Por esta causa le preferimos en las qüestiones que vamos á resolver; pero antes advertiremos que quando se da un sistema ó un conjunto de equaciones con un cierto número de incógnitas, y en una de ellas se determina una qualquiera de las incógnitas y se substituye en las otras, resulta, como se ha visto ya, una equacion menos y una incógnita menos; por lo que se dice que aquella incógnita se ha *eliminado.* Donde se ve que con un número n de equaciones podremos eliminar $n-1$ incógnitas; así es que en el sistema (A) hemos eliminado la incógnita x quando hemos obtenido el sistema (B); y habiendo eliminado en este sistema la u, nos ha quedado una sola equacion que no conteniendo ya sino una incógnita z, nos ha servido para despejarla.

229 Qüestion 1.ª *Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.*

Res. y *Dem.* Como el espíritu analítico consiste en tomar por conocido lo mismo que buscamos, supondremos halladas ya estas cantidades, y que sean por exemplo x, z, de las quales sea x la mayor y z la menor. Si á la suma dada la llamamos a, ó s por ser inicial de suma, y d á la diferencia, tendremos planteado el problema cifrando las dos condiciones en las siguientes equaciones: $\left\{\begin{array}{l} x+z=s \\ x-z=d \end{array}\right.$

que determinando z por el método de substitucion en la primera será $z=s-x$; cuyo valor substituido en la segunda da $x-s+x=d$ ó $2x=s+d$; de donde (§221) $x=\frac{s+d}{2}=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$; y substituyendo este valor en el

de z se tendrá $z=s-\frac{s+d}{2}=\frac{2s-s-d}{2}=\frac{s-d}{2}=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$.

Los métodos particulares nos hubieran dado el valor de x inmediatamente, sumando las dos equaciones; pues resultaria $2x=s+d$, y $x=\frac{s+d}{2}=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$; y restando la segunda de la primera hubiéramos tenido $2z=s-d$, que da $z=\frac{s-d}{2}=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$.

Despues de resuelta una qüestion por Álgebra se debe procurar traducir el resultado al lenguage vulgar, lo que nos suministra una regla práctica que nos puede servir para todos los casos de la misma especie. Así, traduciendo estos dos valores al lenguage vulgar, tenemos que el de x nos dice: que *la cantidad mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia*; *y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.*

De manera que si se nos pidiese hallar la edad de un padre y de un hijo en el supuesto de que ambas edades compusiesen 100 años, y el padre llevase á su hijo 30, sin necesidad de plantear la qüestion diríamos: la mitad de 100 es 50, la mitad de 30 es 15, sumando 50 y 15 será 65 la edad del padre que es la mayor. Y para hallar la del hijo que es la menor diríamos: 50 menos 15 son 35 que seria la edad del hijo. Si queremos ahora verificar las condiciones, ó ver si los resultados cumplen ó satisfacen á las equaciones, sumaremos 65 con 35 y hallaremos 100; y restaremos 35 de 65 lo que nos dará 30; y por lo mismo vemos que quedan satisfechas las condiciones.

230 Qüestion 2.ª *Se pide un número tal, que si al quíntuplo de dicho número se le añade siete veces la duodécima parte del mismo número*, y *de todo esto se quitan* 17 *unidades, resulte dicho número mas* 203 *unidades.*

Res. y *Dem.* Sea x el número que busco, y tendré que $5x$ será su quíntuplo, por lo qual le pondré; despues tengo que escribir la palabra *se le añade*, la qual conduce á poner el signo $+$; despues lo que dice que se le debe añadir es *siete veces la duodécima parte del mismo número*; y como el número le hemos supuesto x, su duodécima parte será $\frac{1}{12}x$, y siete veces esta duodécima parte será $\frac{7}{12}x$; luego escribiendo $\frac{7}{12}x$ despues del signo $+$ tendremos ya escrita esta circunstancia; despues sigue que si *de todo esto se quita*, cuya palabra conduce al signo $-$ que pondremos, y á su derecha lo que se ha de quitar que es 17 unidades. Sigue despues la qüestion *resulte*, palabra que conduce al signo $=$, despues del qual pondremos x, porque lo que ha de resultar es el mismo número; luego, el signo $+$ para escribir la palabra *junto*; y finalmente el 203. De manera que la qüestion traducida al lenguage algebráico está expresada por la equacion $5x+\frac{7}{12}x-17=x+203$;
en la qual para despejar x pasaremos primero todos los términos donde se

halla la x al primer miembro, y al otro todos aquellos donde no se halla, de manera que será: $5x+\frac{7}{12}x-x=203+17$, ó $4x+\frac{7}{12}x=220$; y quitando el divisor se tendrá: $48x+7x=220\times12$ ó $55x=220\times12$; que dividiendo por 55 resulta por último

$$x=\frac{220\times12}{55}=\frac{20\times\not{1}\not{1}\times12}{5\times\not{1}\not{1}}=\frac{\not{5}\times4\times12}{\not{5}}=4\times12=48;$$

luego el número que busco es 48, el qual satisface á todas las condiciones pedidas.

231 Qüestion 3.ª *Hallar quatro números tales que la suma de los tres primeros componga 50; que el primero junto con el séxtuplo del quarto sea igual al tercero; que la mitad del primero junto con el triplo del segundo sea igual al décuplo del quarto; y que el tercio del primero sea igual á la mitad del segundo.*

Res. y *Dem.* Aqui se nos piden quatro números, y para esto se nos dice que han de satisfacer á quatro condiciones, por lo que vemos que el problema es determinado. Si llamamos á estos números u,x,y,z, esto es, al primero u, al segundo x, al tercero y y al quarto z, escribiremos estas quatro condiciones en las quatro equaciones siguientes:

$$u+x+y=50$$
$$u+6z=y$$
$$\frac{u}{2}+3x=10z$$
$$\frac{u}{3}=\frac{x}{2}$$

Empezaremos determinando, por exemplo, la u en la quarta equacion, la qual, multiplicando el segundo miembro por 3, nos dará $u=\frac{3x}{2}$.

Substituyendo este valor de u en la primera dará $\frac{3x}{2}+x+y=50$; que despejando la y da

$$y=50-\frac{3x}{2}-x=50-\frac{3x}{2}-\frac{2x}{2}=50-\frac{5x}{2}.$$

Substituyendo ahora el valor de y y de u en la segunda nos dará $\frac{3x}{2}+6z=50-\frac{5x}{2}$, que da $6z=50-\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}=50-\frac{8x}{2}=50-4x$, de donde $z=\frac{50-4x}{6}=\frac{25-2x}{3}$.

Substituyendo en la equacion tercera en vez de u y de z sus valores, se convertirá en $\frac{\frac{3}{2}x}{2}+3x=10\times\frac{25-2x}{3}$, ó $\frac{3x}{4}+3x=10\times\frac{25-2x}{3}$; y quitando los divisores se tendrá $9x+36x=40.(25-2x)=1000-80x$, ó $45x=1000-80x$; que pasando el $-80x$ al primer miembro y reduciendo, será $125x=1000$; de donde se saca $x=\frac{1000}{125}=8$, que será el valor del segundo número.

Y poniendo este valor de x en los sacados antes de u, de z y de y,

tendremos $u=\frac{3x}{2}=\frac{3\times8}{2}=3\times4=12$, valor del primero,

$y=50-\frac{5x}{2}=50-\frac{5\times8}{2}=50-\frac{40}{2}=50-20=30$ valor del tercero;

$z=\frac{25-2x}{3}=\frac{25-2\times8}{3}=\frac{25-16}{3}=\frac{9}{3}=3$, valor del quarto;

luego los quatro números pedidos son 12, 8, 30 y 3, los quales satisfacen á las quatro condiciones propuestas.

232 Las qüestiones suelen venir desfiguradas con muchos adornos, y por lo mismo pondremos algunas que son muy curiosas, y que para el que no entiende de esto vienen á ser enigmas.

Qüestion 4.ª *Encontró un gavilan á una bandada de palomas, y las saludó diciendo: bien venida sea la bandada de las cien palomas, y una le respondió: aunque no vamos cien palomas, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la quarta parte de estas y tú, gavilan, componemos ciento cabal*: se pregunta quántas palomas iban?

Para esto señalaré con x el número de palomas, y veré que la palabra *estas* la debo escribir con x, la de *otras tantas como estas* tambien con x, pero poniendo en medio el signo +; porque aunque aqui no hay ninguna palabra que conduzca á dicho signo, se halla sin embargo una coma que hace los oficios de la conjuncion (y), que se halla omitida por la figura que llaman los retóricos *asíndeton*; luego, la *mitad de estas* será $\frac{1}{2}x$, la *quarta parte de estas* será $\frac{1}{4}x$, y el gavilan como es uno pondremos 1; despues de lo qual escribiremos = porque es el signo á que conduce la palabra *componemos*, y luego el 100; de manera que la qüestion está planteada en esta equacion $x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$; en la qual despejando x hallaremos (223) que es igual á 36; por consiguiente 36 es el número de palomas que habia en la bandada, cuyo número cumple con las condiciones que se pedian.

233 Qüestion 5.ª *Preguntado Artemidoro, filósofo, qué edad tenia Alexandro Magno, dió, segun el Obispo Caramuel, la respuesta siguiente*:

Preguntaba Diodoro
Embaxador del príncipe de Egipto,
Qué edad tenia el Macedon invicto:
Y luego Artemidoro
Le responde ingenioso:
Dos años tiene mas el belicoso
Rey que su camarada
Efestion, cuyo Padre
Quatro mas que los dos enumeraba,
Y el Padre de Alexandro
Quando noventa y seis giros de Apolo
Los años de estos tres contaba solo.

Que en pocas palabras fue la respuesta que Alexandro tenia dos años mas que Efestion; que el padre de este excedia en quatro años á la edad de entrambos; y el padre de Alexandro, contando ya noventa y seis años, tenia tanta edad como los tres juntos.

Por lo qual para hallar la edad de Alexandro la llamaré u, x la de

Efestion, z á la del padre de Efestion, la del padre de Alexandro la sabemos pues dice que es 96; luego la qüestion quedará planteada en las tres equaciones siguientes (A): (A)

$$u=x+2$$
$$z=u+x+4$$
$$u+x+z=96$$

Substituyendo en la segunda el valor de u sacado de la primera, será: $z=x+2+x+4=2x+6$;

y substituyendo estos dos valores en la tercera será:

$$x+2+x+2x+6=96, \text{ ó } 4x+8=96,$$

que da: $4x=96-8=88$, y $x=\frac{88}{4}=22$, que será la edad de Efestion; la de Alexandro será: $u=x+2=22+2=24$;
y la del padre de Efestion $z=2x+6=2\times22+6=44+6=50$.

Esc. Al resolver una qüestion se debe procurar executarlo con el menor número posible de incógnitas, en lo qual consiste la elegancia y sencillez de la resolucion; nosotros hemos puesto hasta aqui las que debe seguir todo principiante, y no las que puede dar quando ya sabe; pero como conviene que se acostumbren á lo mejor, vamos á resolver esta qüestion con una sola incógnita.

Para esto señalaremos con x la edad de Alexandro, y será $x-2$ la de Efestion; y como la del padre de Efestion debia equivaler á las dos juntas mas 4, será $x+x-2+4$ ó $2x+2$; y como todas tres habian de componer la edad de Filipo, padre de Alexandro, que era de 96, tendremos cifrada esta circunstancia en la equacion $x+x-2+2x+2=96$, ó $4x=96$ que da $x=24$, que es la edad de Alexandro; de donde se deduce que la de Efestion será 22, y la del padre de Efestion 50.

234 Qüestion 6.ª *Preguntó Hércules á Augéo, rey de los Eleos, quántas vacas tenia, y la respuesta fue un enredado enigma que propuso el Obispo Caramuel en un certámen matemático, en la forma siguiente:*

Hércules vino á visitar á Augéo,
Que era muy opulento,
Y teniendo deseo
De robarle sus vacas ciento à ciento,
Pregunta con cuidado
El número y lugar de su ganado.
Yo, señor, dice el venerable anciano
Brevemente respondo:
Que en aquel rico llano,
Cuya orla es oro y esmeralda el fondo,
A la márgen de Alféo
La mitad de mis vacas pacer veo;
La octava parte de Saturno el monte
Turba con sus bramidos;
Y en distante horizonte
La duodécima tiene destruidos
Los valles, que es muy fiera
En el monte, en el prado, en la ribera;
La vigésima parte
En Élide segura se apacienta;
De Arcadia ya se aparta
La trigésima; y corren por mi cuenta
Cincuenta, cuyas voces
Hoy son suaves y mañana atroces.
Mover la clava, pero no la pluma,
Sabe el hijo de Alcmena,
Y así se queda sin saber la suma
Del ganado, que en los montes suena;
Tú que eres mas experto
El número descubre que he encubierto.

Esta qüestion despojada de todos sus adornos, está reducida á encontrar un número tal, que restando de él su mitad, su octava parte, su duodécima, su vigésima y su trigésima parte, queden 50. Por lo que suponiendo x el número que se busca, tendré planteada la qüestion en esta equacion: $x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{12}x-\frac{1}{20}x-\frac{1}{30}x=50$;

ó quitando los divisores (para lo qual basta multiplicar la equacion por 120, porque los denominadores tienen factores comunes) será:

$$120x-60x-15x-10x-6x-4x=50\times120,$$

$$\text{ó } 25x=6000 \text{ que da } x=\frac{6000}{25}=240.$$

Luego el número de vacas que tenia Augéo era 240; de las quales habia 120 en Alféo, 30 en el monte de Saturno, 20 en los otros valles, 12 en Élide, 8 en Arcadia, y las 50 restantes en su propia casa.

235 Qüestion 7.ª Sobre el viage de Homero.

Homero, poeta célebre de Grecia, deseoso de saber qual fuese su patria, consultó á Apolo en Delfos. No quiso el oráculo sacarle de la duda; pero le dió para su itinerario cierto número de monedas. Partióse con ellas á Sycion, ciudad antigua del Peloponeso, donde gastó la mitad de lo que habia recibido; pero cantando sus versos mendigó de puerta en puerta 20 *monedas. Pasóse á Argos, donde habiendo gastado la quarta parte de lo que traia, cantando en la plaza mayor sus versos, recogió del pueblo* 15 *monedas; de alli pasó á la isla de Salamina, donde gastó el tercio de su dinero; pero con su acostumbrado exercicio recibió del pueblo* 16 *monedas. Llegó á Atenas donde consumió el sexto de lo que tenia, y oyéndole cantar un caballero le dió* 18 *monedas: Salióse de Atenas, y habiéndose embarcado se volvió con viento favorable al lugar de su habitacion; y despues de pagar* 5 *monedas de flete se halló con doblado dinero del que le dió Apolo.* Pídese quánto le dió este en Delfos.

Llamando x el número de monedas que le dió Apolo, se tendrá que habiendo gastado la mitad en Sycion solo le quedaba $\frac{1}{2}x$: y como alli ganó 20 mas, salió de Sycion con $\frac{1}{2}x+20$, ó con $\frac{x+40}{2}$; en Argos gastó la quarta parte de esto, que es $\frac{\frac{x+40}{2}}{4}=\frac{x+40}{8}$, por consiguiente le quedó solamente $\frac{x+40}{2}-\frac{x+40}{8}=\frac{4x+160-x-40}{8}=\frac{3x+120}{8}$; y como alli recibió 15 monedas, salió de Argos con $\frac{3x+120}{8}+15$ monedas ó con

$$\frac{3x+120+120}{8}=\frac{3x+240}{8}.$$

En Salamina gastó el tercio de lo que tenia, esto es,

$\frac{\frac{3x+240}{8}}{3}=\frac{3x+240}{3\times8}=\frac{x+80}{8}$, luego le quedaban $\frac{3x+240}{8}-\frac{x+80}{8}=$ $\frac{3x+240-x-80}{8}=\frac{2x+160}{8}=\frac{x+80}{4}$; y como alli le dieron 16, salió de

Salamina con $\frac{x+80}{4}+16$ monedas ó con $\frac{x+80+64}{4}=\frac{x+144}{4}$.

En Atenas consumió el sexto de lo que tenia, esto es, $\frac{\frac{x+144}{4}}{6}=\frac{x+144}{4\times6}=\frac{x+144}{24}$, luego le quedaban $\frac{x+144}{4}-\frac{x+144}{24}=\frac{6x+6\times144-x-144}{24}=\frac{5x+5\times144}{24}=\frac{5x+720}{24}$; pero como alli recibió 18, salió de Atenas con $\frac{5x+720}{24}+18$, y pagando las 5 monedas del flete se hallaba con $\frac{5x+720}{24}+13=\frac{5x+1032}{24}$; como esto debe ser el duplo de lo que le dió Apolo, que fueron x, se tendrá la equacion $\frac{5x+1032}{24}=2x$ que quitando el divisor será: $5x+1032=48x$, de donde $48x-5x=1032$, ó $43x=1032$, y $x=\frac{1032}{43}=24$.

Luego Apolo le dió 24 monedas.

Esc. Esto lo hubiéramos podido sacar con mas sencillez suponiendo que el número pedido era $120x$; pues entonces le quedaron en Sycion $60x$, y sacó de alli $60x+20$; cuya quarta parte es $15x+5$, y por consiguiente le quedaban $45x+15$, que junto con los otros 15 que le dieron en Argos salió de alli con $45x+30$; cuya tercera parte es $15x+10$, y por consiguiente le quedaban, gastado esto, $30x+20$, que junto con los 16 que le dieron en Salamina componen $30x+36$, con que salió de alli: y habiendo consumido en Atenas la sexta parte de lo que le quedaba ó $5x+6$, salió de alli con $25x+30$, mas los 18 que alli le dieron, esto es, con $25x+48$; que despues de pagadas las 5 del flete le quedaban $25x+43$ que debia ser el duplo de lo que le dió Apolo ó de $120x$; luego venimos á parar á esta equacion $240x=25x+43$, ó $240x-25x=43$, ó $215x=43$, que da $x=\frac{43}{215}=\frac{1}{5}$, y por consiguiente el dinero que le dió Apolo, que era $120x$, será $120x=120\times\frac{1}{5}=24$ que es lo mismo que antes.

236 Qüestion 8.ª *Habia en el mar cierto número de Ninfas, llamadas Galateas; y en la ribera otras llamadas Napeas: consultado Apolo paraque declarase el número de unas y otras, respondió lo que refiere el Obispo Caramuel en los versos siguientes.*

Entre líquida plata
Descubrí no sé quantas Galateas,
Y donde se remata
La selva obscura, un coro de Napeas:
Tetis á todas en el mar retrata;
Bellas aquellas eran, estas feas;
En número no iguales,
Porque en especie eran desiguales.
No pudiendo contarlas
Consulté á Apolo que en el mar lucia,
Y doradas guirnaldas
De perlas desatadas les texia;
Y el Dios Intonso para mas honrarlas
No me quiso decir lo que sabia;
Pero al son de las olas
Cantó eloqüente estas palabras solas.
Si dexan sus cristales
tres Ninfas bellas, que á la selva llama
La hermosisima Pales,
Adornada de flores no de escama,
En número serán todas iguales:
Pero si viendo que Triton las ama
Al mar van tres Napeas
Serán doblado mas las Galateas.

Es lo mismo que hallar dos números que si del mayor se quitan tres y se añaden al menor, queden iguales; y si del menor se quitan tres y se añaden al mayor, resulte el duplo de lo que queda del menor.

Si llamamos al número mayor x, y z al menor, tendremos planteada la qüestion en las dos equaciones siguientes: $\begin{cases} x-3=z+3 \\ x+3=2(z-3) \end{cases}$
que despejando x en la primera tendremos: $x=z+3+3=z+6$;
cuyo valor substituido en la segunda dará: $z+6+3=2z-6$;
de donde sacaremos: $z-2z=-6-6-3=-15$, ó $z=15$;
cuyo valor substituido en el de x da $x=z+6=15+6=21$;
luego las Galateas eran 21, y las Napeas 15.

En efecto; si de las Galateas pasan tres á las Napeas quedarán aquellas en 18 y estas se convertirán en 18, como indicaba la qüestion; y si de las Napeas van 3 á las Galateas, estas se convertirán en 24, y aquellas quedarán en 12, que es la mitad de 24, como indicaba la qüestion.

Esc. Pondremos aqui algunos problemas que he tenido la satisfaccion de ver resueltos con mucha elegancia y exâctitud, en los exâmenes que en virtud de órden del Gobierno he presenciado en la Academia militar de la isla de Leon (*).

1.º *Forma en batalla un general su exército que es de 36ϑ hombres en tres divisiones, de modo que la del centro tenga 3ϑ hombres mas que la de la derecha, y esta 1500 mas que la de la izquierda; se pregunta quántos habrá de tener cada division?*

Traduccion al lenguage algebráico:

$$x+(x+1500)+(x+1500+3000)=36000.$$

Resultado: { Division de la izquierda. 10000
Division de la derecha. . 11500
Division del centro. . . . 14500 }

2.º *Ha habido una accion entre dos divisiones de igual fuerza; por nuestra parte se perdieron 200 hombres, y el enemigo perdió 800, habiendo quedado nosotros con quádrupla fuerza; se pregunta quál era la de ambas partes al principio de la accion?*

Planteo. $(x-800)4=x-200$. Resultado: 1000 hombres.

3.º *Un coronel para estimular á sus soldados, les ofrece dar 5 reales por cada vez que den al blanco; pero que cada soldado debe dexar en el fondo de su compañía 3 reales por cada vez que no le dé: despues de 12 tiros ajustan cuentas, y se halla que el coronel debe á sus soldados 28 reales; se pregunta quántas veces dieron al blanco, y quántas no.*

Planteo: $5x-(12-x)3=28$. Resultado: dieron 8 veces en el blanco.

(*) *Desde la primera vez que tube esta honrosa comision, conocí las ventajas que resultarian á la Nacion de proteger estos establecimientos: y tengo la satisfaccion de haber contribuido con los demas co-exâminadores á inclinar el ánimo del Gobierno á un fin tan importante.*

4.° *Separa un comerciante de su fondo 1000 duros para gastos de casa, &c.; y al fin del primer año halla que su caudal se aumenta un tercio. Sigue por espacio de tres años, separando 1000 duros y aumentándosele un tercio su caudal, y halla que al fin del tercer año tiene duplo fondo que al principio: se pregunta quánto tenia el comerciante el primer año?*

Haciendo 1000 duros $=a$, y llamando x el caudal que tenia,

al cabo del premier año tendria. . . . . . . $x-a+\frac{x-a}{3}=\frac{4x-4a}{3}$;

al cabo del 2.° . . . . $\frac{4x-4a}{3}-a+\frac{4x-4a}{9}-\frac{a}{3}=\frac{16x-28a}{9}$;

al cabo del 3.° . . . . $\frac{16x-28a}{9}-a+\frac{16x-28a}{27}-\frac{a}{3}=\frac{64x-148a}{27}$;

y como esto ha de ser igual con $2x$ será: . . . . . $2x=\frac{64x-148a}{27}$;

de donde sale $x=14800$ duros, que será el capital que tenia al principio del primer año.

5.° *Hallándose acantonados dos exércitos, y tratándose de poner en movimiento, con el fin de entrar en campaña en una misma provincia, distando entre sí dichos exércitos 68 leguas, el primero sale tres dias antes que el segundo, y anda seis leguas al dia, y este quatro: se pregunta á qué distancia de la primera ciudad se encontrarán?*

Representando por x lo que andaba el primero, y por y lo que andaba el segundo, y restando de 68 lo que andaba en los tres dias que se anticipó el primero queda 50, y se plantea del modo siguiente:

$$x+y=50$$
$$\frac{x}{6}=\frac{y}{4}$$

Y resulta que el primero andubo 30 leguas (y 18 que llevaba andadas son 48) y 20 el segundo.

6.° *Queriendo un labrador premiar á una partida de soldados que le habia defendido su casa de la invasion del enemigo, trata de repartirles una porcion de pesetas; y halla que si á cada soldado da 20 pesetas le sobran 25, y si da á razon de 25 pesetas le faltan 10; quántas eran las pesetas, y quántos los soldados?*

Si x representa el número de soldados é y el de las pesetas, se tendrá:

$\left.\begin{matrix}20x+25=y\\25x-10=y\end{matrix}\right\}$ que dan $5x-35=0$, de donde $\left\{\begin{matrix}x=7 \text{ soldados}\\ \text{é } y=165 \text{ pesetas.}\end{matrix}\right.$

7.° *Un brigadier tiene tres batallones á su disposicion para asaltar una plaza con una parte de ellos; uno es de Españoles, otro de Ingleses y otro de Portugueses. Les ofrece 901 doblones en esta forma: que á cada soldado de los que monten la brecha les dará un doblon, y los res-*

tantes se repartirán á los demas. Se halla que dando el asalto los Españoles, les toca á los demas á medio doblon; si le dan los Ingleses, toca á los demas $\frac{1}{3}$ de doblon; y si le dan los Portugueses, les toca á los demas $\frac{1}{4}$ de doblon. Se pide qué número de soldados tenia cada batallon?

Si por x expresamos los Españoles, por z los Ingleses, y por u los Portugueses, se planteará el problema del modo siguiente:

$$x+\frac{z+u}{2}=901, \quad z+\frac{x+u}{3}=901, \quad u+\frac{z+x}{4}=901.$$

De donde resultan 265 Españoles, 583 Ingleses y 689 Portugueses.

De la elevacion al quadrado, y extraccion de la raiz quadrada, de las cantidades polinomias y de las cantidades numéricas.

237 Ya hemos dicho (197) que se llama *quadrado* al producto que resulta de multiplicar una cantidad por ella misma; de manera que multiplicando $a+b$ por $a+b$ tendremos el quadrado de $a+b$, como aqui se presenta: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Traduciendo este resultado al lenguage vulgar, quiere decir que el quadrado de una cantidad que se compone de dos partes, consta de tres partes, á saber: *de quadrado de primera parte* (esto es lo que nos dice aqui a^2), *de duplo de primera por segunda* (esto es lo que quiere decir $2ab$) y *finalmente del quadrado de segunda* (que es lo que expresa b^2).

Á todas estas expresiones que nos suministran una regla para la práctica se les da el nombre de *fórmulas*; y si se nos preguntase aisladamente qué es una *fórmula*, diríamos que era *una expresion analítica, en la que está cifrado el modo de executar una operacion, ó alguna propiedad de una cantidad*; y se dice que es expresion analítica, porque toda fórmula debe ser una equacion tal que en el primer miembro esté indicada la operacion que se ha de executar, ó se ponga la propiedad que se dice en el segundo.

Si la segunda parte del binomio hubiera tenido el signo —, hubiéramos sacado $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$; y solo tendríamos que enmendar en la regla, el decir *menos el duplo de primera por segunda*, de manera que tendremos reunidos los dos resultados en $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Ahora, por medio de la fórmula $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 (A)$, podemos elevar al quadrado qualquiera otra cantidad, como v.g. $c^2+d^2+4m^3$; para esto haremos igual con a, ó tomaremos por primera parte, toda la cantidad menos el último término, esto es, c^2+d^2, é igual con b dicho último término $4m^3$; y haciendo las substituciones en la fórmula (A) tendremos

$$(c^2+d^2+4m^3)^2=(c^2+d^2)^2+2(c^2+d^2)\times 4m^3+16m^6;$$

ahora efectuaremos el quadrado de c^2+d^2 por medio de la misma fórmula (A) ó de la regla que hemos deducido, y executando la operacion indicada en el segundo término se tendrá por último:

$(c^2+d^2+4m^3)^2=c^4+2c^2d^2+d^4+8c^2m^3+8d^2m^3+16m^6$.

Conviene adquirir mucha destreza en elevar al quadrado cantidades de muchos términos, y por lo mismo nos propondremos elevar el polinomio $a+b+c-d+e-f+$&c. al quadrado.

Aqui podríamos tomar por primera parte todos los términos menos el último, y executar esta operacion; despues para efectuar el quadrado de esta primera parte, volver á tomar por primera parte todos los términos suyos menos el último, y así sucesivamente; pero como esto es demasiado fastidioso en la práctica, lo que executaremos desde luego es: *quadrar el primer término, luego multiplicar el duplo del primer término por cada uno de los que le siguen; quadrar el segundo término, y multiplicar el duplo de dicho segundo término por todos los que le siguen; y executar lo mismo con todos hasta llegar á quadrar el último*; de modo que $(a+b+c-d+e-f+\&c.)^2=a^2+2ab+2ac-2ad+2ae-2af+\&c.$ $+b^2+2bc-2bd+2be-2bf+\&c.+c^2-2cd+2ce-2cf+\&c.+d^2-2ed$ $+2df-\&c.+e^2-2ef+\&c.+f^2+\&c.$

Esta práctica está fundada en que tomando por primera parte la a y por segunda todo lo demas, el quadrado se compondrá de las tres partes dichas; y por consiguiente deberemos poner el quadrado del primer término; despues el duplo del primer término por todo lo que sigue, y luego el quadrado de todo lo que sigue despues del primero; que se compondrá del quadrado del segundo término, del duplo de dicho segundo término por todo lo que sigue, y del quadrado de todo lo que sigue, &c.

238 Para elevar al quadrado una cantidad numérica, observaremos que si el número es dígito tenemos ya sabido su quadrado, puesto que está en la tabla pitagórica (57); y así, pues que

$1^2=1\times1=1$; $2^2=2\times2=4$; $3^2=3\times3=9$; $4^2=4\times4=16$; $5^2=5\times5=25$; $6^2=6\times6=36$; $7^2=7\times7=49$; $8^2=8\times8=64$; $9^2=9\times9=81$,

podemos obtener inmediatamente el quadrado de un número dígito.

Ahora, si es compuesto, le descompondremos en dos partes tales que la segunda esté representada por las unidades simples que contenga, y la primera por todo lo demas del número que no sean unidades; de manera que si queremos elevar el 47 al quadrado le descompondremos en las dos partes dichas, y será $47=40+7$; y suponiendo $40=a$ y $7=b$, tendremos por medio de la fórmula (A):

$$47^2=(40+7)^2=40^2+2\times40\times7+7^2=1600+560+49=2209;$$

donde advertimos que el quadrado de todo número que se compone de decenas y unidades, consta de tres partes, á saber: *de quadrado de decenas, de duplo de decenas por unidades, y de quadrado de unidades.*

Como el menor número de decenas que hay es una decena ó 10, y el quadrado de 10 es 100, resulta que el quadrado de decenas lo menos que ha de expresar es centenas; el duplo de decenas por unidades lo menos decenas, porque decenas multiplicadas por un número qualquiera ha de dar decenas en el producto; y finalmente el quadrado de las unidades expresará lo menos unidades.

239 Si nos propusiéramos elevar al quadrado el número 436, le descompondríamos en 430+6; y la fórmula (*A*) nos dará:

$$436^2=(430+6)^2=430^2+2\times430\times6+6^2.$$

Ahora, para elevar el 430 al quadrado por la misma fórmula, le descompondremos en 400+30, y tendremos

$430^2=(400+30)^2=400^2+2\times400\times30+30^2$;

de modo que $436^2=(400+30+6)^2=400^2+2\times400\times30+30^2+2\times430\times6+6^2=160000+24000+900+5160+36=190096$.

Mas facil nos hubiera sido el executar directamente la multiplicacion del 436 por el 436, y del 47 por el 47; pero hemos preferido el irlo así indicando, porque esto nos facilitará hallar las reglas para retroceder del quadrado á la raiz; para lo qual observaremos que el *quadrado de las centenas está desde el quinto guarismo en adelante*; el *duplo de las centenas por las decenas desde el quarto en adelante &c*; y si el número contubiese ademas millares, el quadrado de los millares se hallaria desde el séptimo guarismo en adelante; y así sucesivamente.

240 Con estas observaciones tenemos ya lo suficiente para extraer la raiz quadrada de un número; para lo qual estableceremos la siguiente regla: *divídase el número propuesto en periodos de á dos guarismos empezando por la derecha, y no le hace que el último periodo contenga solo un guarismo; á su derecha se colocan las rayas de dividir; se ve en este periodo último de la izquierda qual es el mayor quadrado contenido, y su raiz se pone en las rayas; esta raiz se quadra, y el quadrado se resta de dicho periodo; al lado de la resta se baxa el periodo siguiente, y se separa con una coma el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda de la coma se divide por el duplo de la raiz hallada, que se coloca para hacer la operacion con sencillez debaxo de lo separado con la coma; el quociente que resulta se pone en la raiz á la derecha del guarismo anterior, al lado del duplo de la raiz hallada antes, y debaxo de sí mismo; se multiplica el duplo de la raiz hallada antes, junto con el quociente, por el mismo quociente, y el producto se resta del residuo anterior, junto con el periodo que se le añadió; al lado de la resta que resulte se baxa el periodo siguiente, se separa el último guarismo, y lo que queda á la izquierda se divide por el duplo de toda la raiz hallada; y así se continúa hasta que no haya mas periodos que baxar: en cuyo caso, si la ultima resta es cero es señal de que el número tiene raiz exâcta; y sino, es señal de que no la tiene. Si en este caso se quiere continuar por decimales, se añadirán á la resta dos ceros, se separará uno, y se dividirá lo que quede á la izquierda por el duplo de toda la raiz hallada, y el quociente se pondrá en la raiz despues de la coma; luego, se continuará todo lo que se quiera añadiendo dos ceros por cada guarismo que se intente sacar.*

Exem: propongámonos extraer la raiz quadrada del número 190096, lo primero que haremos será dividirle en periodos de á dos guaris-

mos cada uno, y despues tiraré las rayas como aquí se presenta

Luego, veré qual es el mayor quadrado contenido en 19 que es el primer periodo de la izquierda; y repasando los quadrados de los números dígitos veo que 19 está entre 16, quadrado de 4, y 25 quadrado de 5; luego el mayor quadrado que está contenido en 19 es 16, cuya raiz es 4 que pondremos en la raiz, y su quadrado 16 debaxo del 19; tiraremos por la parte inferior una raya, y executaremos la resta, la que nos dará 3; al lado de la resta 3 baxaremos el siguiente periodo 00, separaremos el último guarismo con una coma, y dividiremos lo que quede á la izquierda de esta, que es 30, por 8, duplo de la raiz hallada, que hemos puesto debaxo de lo separado con la coma; el quociente 3 que resulta de dividir 30 por 8 le pondremos en la raiz á la derecha del 4, tambien le pondremos al lado del 8 y tambien debaxo; multiplicaremos el 83 por el quociente 3 que hay debaxo, y restaremos el producto 249 de lo que teníamos arriba que era 300. Al lado de la resta 51 baxaremos el periodo siguiente 96, separaremos el último guarismo 6, y lo que quede á la izquierda lo dividiremos por el duplo de toda la raiz hallada que es 86; el quociente que nos resulte de dividir 519 por 86 (que le hallaremos dividiendo el 51 por 8) es 6, que puesto en los tres parages, y hecha la multiplicacion del 806 por 6, nos resulta 5196; que restados de los 5196 que teníamos arriba, nos sale 0; y por consiguiente tenemos executada nuestra operacion, la qual nos da un resultado exâcto.

```
19,00,96 | 436
16       |----
--
 030,0
   83
    3
 ----
  249
 ----
  0519,6
    806
      6
 ------
   5196
   ----
   0000
```

Para demostrar esta regla observaremos en primer lugar, que inmediatamente que vemos que el número consta de mas de dos guarismos, inferimos que su raiz tendrá por precision mas de uno; porque el mayor número dígito es 9, que tiene por quadrado 81, el qual se escribe solo con dos guarismos. Constando la raiz de mas de un guarismo, tendrá decenas y unidades, y por consiguiente en el número propuesto estan contenidas las tres partes (238) que constituyen el quadrado; y como el quadrado de las decenas está desde el tercer guarismo en adelante, para hallar las decenas no tendremos que atender de ningun modo á los dos últimos guarismos; y por lo mismo los separamos con la coma. Si lo que queda á la izquierda de la coma se compone de mas de dos guarismos, es señal de que las decenas de la raiz que buscamos estan expresadas por un número lo menos de dos guarismos; luego la raiz contendrá centenas, cuyo quadrado se ha de hallar desde el quinto guarismo en adelante; y por lo mismo separaremos otros dos guarismos con la coma además de los dos separados antes. Ahora, si lo que quedase á la izquierda tubiese mas de dos guarismos, era señal de que las centenas de la raiz estaban representadas por mas de uno; y por lo mismo volveríamos á se-

parar otros dos guarismos, y así sucesivamente; de manera que dado un número conoceremos los guarismos que ha de tener su raiz, pues por cada periodo debemos tener un guarismo.

Ahora, en el primer periodo de la izquierda está el quadrado del guarismo de especie superior de la raiz; luego viendo qual es el mayor quadrado contenido en él, su raiz será el primer guarismo de la raiz que se busca.

Como en los dos primeros periodos de la izquierda está el quadrado de los dos guarismos de especie superior de la raiz, deberá haber el quadrado de la primera parte, el duplo de la primera por la segunda, y el quadrado de la segunda; de donde resulta que si del primer periodo se resta el quadrado del primer guarismo de la raiz, y á su lado baxamos el segundo periodo, en esto nos quedarán las otras dos partes; que contrayéndonos al exemplo, en la resta 3 junto con el periodo 00 tenemos el duplo de las centenas por las decenas, y el quadrado de las decenas; pero el duplo de las centenas por las decenas ha de expresar millares (239), luego este duplo se ha de hallar desde los millares en adelante; por consiguiente no estará en el cero último que expresa centenas, y por esta causa le separaremos con la coma. En el 30 que nos queda se halla dicho duplo de centenas por decenas, pero si un producto le dividimos por uno de los factores el quociente será el otro factor; luego si el 30, que es donde se halla el producto del duplo de las centenas por las decenas, le dividimos por el duplo de las centenas halladas, el quociente expresará las decenas de la raiz, y por lo mismo las pondremos al lado de las centenas.

Ahora, como en el 300 no solo se hallaba el duplo de centenas por decenas y el quadrado de decenas, sino tambien algunas centenas que nos pueden haber resultado del duplo de las partes puestas en la raiz por las unidades: para sacar esto que nos queda ponemos el quociente 3 al lado del duplo 8 y debaxo del mismo 3; se hace la multiplicacion del 3 por el 3, lo que nos dará el quadrado de las decenas, y al multiplicar el 8 por el 3 formamos el duplo de las centenas por las decenas; luego si estos dos productos parciales que reunimos al mismo tiempo que hacemos la multiplicacion, los quitamos del 300, la resta será la parte que queda del duplo de las centenas y decenas por las unidades, que juntas con el último periodo contendrá ademas el quadrado de las unidades; pero el conjunto de centenas y decenas le podemos considerar como un número de decenas nada mas: y así es, que al formar el quadrado en el término $2\times430\times6$ no descompusimos el 430 en $400+30$, porque 430 son 43 decenas; luego podemos decir que en lo que nos queda está el duplo de todas las decenas por las unidades; pero el duplo de decenas por unidades ha de estar desde las decenas en adelante, luego separando el último guarismo hallaremos en lo demas dicho duplo; por consiguiente si lo que queda á la izquierda lo dividimos por el duplo de to-

das las decenas, que es el duplo de toda la raiz hallada, el quociente serán las unidades; y despues deberemos formar las dos partes por la misma razon que antes.

Al executar la operacion de dividir lo separado á la izquierda de la coma por el primer guarismo del duplo de la raiz hallada, suele ocurrir el que pongamos en la raiz un guarismo mayor de lo que corresponde; lo qual se conocerá si despues de hecha la multiplicacion, el producto fuese mayor que la resta junta con su periodo. El poner de menos en la raiz no ocurre á no ser que sea por distraccion, y conoceremos si se le ha puesto de menos, siempre que la resta que quede sea igual ó mayor que el duplo de la raiz hallada junto con la unidad.

241 Esto que acabamos de decir está fundado en esta proposicion general: *los quadrados de dos números que se diferencian en una unidad, se diferencian en el duplo del menor mas la unidad.*

Para demostrarla sea el número menor propuesto a, y el otro que se ha de diferenciar en una unidad será $a+1$, cuyos quadrados son el de a, a^2, y el de $a+1$, $(a+1)^2=a^2+2a\times1+1^2=a^2+2a+1$, y la diferencia será: diferencia $=(a+1)^2-a^2=a^2+2a+1-a^2=2a+1$;
resultado que expresa la proposicion enunciada.

De esta proposicion nos podemos valer para formar con suma prontitud los quadrados de los números que solo se vayan diferenciando en una unidad; por exemplo, los de 9, 10, 11, 12, &c. Hallaremos el primero diciendo: 9 por 9 son 81; ahora diremos: 2 por 9 son 18 y 1 son 19, que añadido al 81 quadrado de 9, nos dará 100 quadrado de 10; para hallar el de 11 diremos: 2 por 10 son 20 y 1 son 21, que añadido á 100 quadrado de 10, son 121 quadrado de 11; para el de 12 diremos: 2 por 11 son 22 y 1 son 23, que añadido á 121 son 144 quadrado de 12, &c.

242 En la práctica de la extraccion de la raiz quadrada se pueden omitir dos cosas: 1.ª el poner debaxo del renglon donde se halla el duplo de la raiz hallada el quociente; y 2.ª el poner el producto de la multiplicacion, pues al mismo tiempo se puede ir executando la resta. Para manifestar como se hace esto nos propondremos extraer la raiz quadrada de 2209 en esta forma:

```
2 2,0 9 | 47
  6 0,9
    8 7
 ------
  0 0 0
```

Despues de dividido el número en periodos, veremos que el mayor quadrado contenido en 22 es 16, y su raiz 4 que pondremos en las rayas, y diremos: el quadrado de 4 es 16, de 16 á 22 van 6 que pondremos debaxo del 22; al lado de este 6 baxaremos el periodo siguiente 09, separaremos el 9 y diremos: 60 dividido por 8, duplo de la raiz hallada, da 7 por quociente, que pondremos en las rayas y á la derecha del 8; ahora diremos: 7 por 7 son 49, de 49 á 49 va 0 y llevo 4; 8 por 7 son 56 y 4 que llevaba son 60, de 60 á 60 no va nada; por consiguiente resulta 0, que es señal de que el 2209 tiene raiz exácta, y que es 47.

Si nos proponemos extraer la raiz quadrada de 7853643, executaremos la operacion haciendo uso de la abreviacion anterior como aqui se presenta:

```
7,85.36,43 | 2802,43519
38,5       |-----------
 48
---------
0013,6
  560
---------
  1364,3
   5602
---------
   24390,0
    56044
---------
    197240,0
     560483
---------
     2909510,0
      5604865
---------
      10707750,0
       56048701
---------
       510287990,0
        560487029
---------
        058496639
```

Donde advierto que como al sacar el tercer guarismo sale o, el producto del 560 por o debe ser cero; y así, la resta será lo que tenia arriba, á saber 136, al lado de la qual baxo el periodo siguiente 43; y como al fin me sale una resta 2439, infiero que el número propuesto no tiene raiz exâcta, y diré que su raiz es 2802 y algo mas; este exceso le podemos expresar de dos modos: poniendo al lado de la raiz entera un quebrado cuyo numerador sea la resta que quedó, y el denominador el duplo de la raiz hallada mas la unidad; cuyo quebrado será aqui $\frac{2439}{5605}$: ó añadiendo dos ceros á las resta, y aproxîmándonos por decimales.

Ambos métodos son de aproxîmacion: el primero se funda en que la raiz de 7853643 es mayor que 2802 y menor que 2803; y como (241) el quadrado de 2803 llevaria al de 2802 el duplo del mismo 2802 mas la unidad, resulta que aquella resta 2439 viene a expresar partes de las que le faltan para llegar á ser la raiz del de una unidad mas, que aqui son las 5605; pero es mucho mejor aproxîmarnos por decimales, *para lo qual por cada guarismo que se quiera en la raiz deberemos añadir dos ceros*; cuya práctica está fundada en que si la raiz tubiese un guarismo decimal, su quadrado tendria dos guarismos decimales, uno por cada vez que es factor.

Y así, para conseguir esta aproxîmacion añadiremos dos ceros á la resta é inmediatamente pondremos la coma en la raiz, separaremos el último cero, y lo que quede á la izquierda lo dividiremos por el duplo de toda la raiz hallada; el quociente le pondremos en las rayas despues de la coma y al lado del duplo, executaremos la multiplicacion y resta; y á lo que nos resulte añadiremos otros dos ceros, y continuaremos de este modo hasta hallar los guarismos decimales que deseemos; de manera que la raiz es 2802,43519 &c.

Si el número constase de enteros y decimales ó de decimales solas, se haria que el número de guarismos decimales fuese par, añadiendo un cero si fuese ímpar; por exemplo: si quisiera extraer la raiz quadrada de 0,4 añadiria un cero, y despues de haber puesto el cero enteros y la

coma en las rayas, veria qual era el mayor quadrado contenido en 40; y como es 36 y su raiz 6, pongo 6 en las rayas, resto el 36 del 40, y á la resta añado otros dos ceros; y así continúo hasta sacar los guarismos que desee.

```
0,40      | 0.632
 40,0
 123
 0310,0
 1262
 0576
```

Puesto que elevar al quadrado no es sino un caso particular de la multiplicacion, resulta que esta es la tercera operacion de aumentar; y pues que la extraccion de la raiz quadrada no viene á ser sino un caso particular de la division, á saber, quando el divisor y el quociente son iguales, resulta que esta es la tercera operacion de disminuir que se puede considerar.

243 Antes de pasar mas adelante manifestaremos que si un número entero no tiene raiz exâcta en enteros, tampoco la tendrá en fraccionarios de ninguna especie; es decir, que puesto que el número 2 no tiene raiz quadrada exâcta en enteros, no se debe esperar que la tenga expresada por ningun quebrado; porque si suponemos que $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, y que m y n estén reducidos á su menor expresion, tendremos elevando al quadrado que $2=\frac{m^2}{n^2}$; y paraque $\frac{m^2}{n^2}$ fuese igual con 2 seria preciso que cada uno de los factores de n se destruyese con los de m; pero suponiendo la fraccion $\frac{m}{n}$ irreducible, su quadrado $\frac{m}{n}\times\frac{m}{n}$ ó $\frac{m^2}{n^2}$ tambien lo será (190); y por consiguiente no podrá ser igual con ningun número entero.

Sin embargo se concibe que exîste una cantidad que multiplicada por sí misma produzca un número qualquiera, tal como 1287; y que en este caso esta cantidad está comprendida entre 35 y 36; porque $35\times35=1225$ es un producto menor, y $36\times36=1296$ da un producto mayor.

La extraccion de la raiz quadrada aplicada á números que no son quadrados exâctos, da orígen á una nueva especie de números, así como la division origina las fracciones; pero hay esta diferencia entre las fracciones y las raices de los números que no son quadrados perfectos: á saber, que los primeros que se componen siempre de un número exâcto de partes de la unidad tienen con esta unidad *una comun medida*, y que los segundos no la tienen.

Por exemplo: concibiendo la unidad dividida en siete partes, se representa con 11 de estas partes el quociente de la division de 11 por 7, ú $\frac{11}{7}$; y $\frac{1}{7}$ estando contenido siete veces en la unidad, y once veces en $\frac{11}{7}$, es la comun medida de la unidad y de la fraccion $\frac{11}{7}$.

Considerando que tanto los números enteros como los quebrados tienen con la unidad una comun medida, se dice que estas cantidades son *comensurables* con la unidad, ó simplemente *comensurables*; tambien se

les da el nombre de racionales porque sus *razones* ó *relaciones* que mas adelante daremos á conocer, se pueden expresar por números enteros.

Al contrario, la raiz quadrada de un número que no es quadrado perfecto es *incomensurable* ó *irracional*, ó un número á que se suele llamar tambien *sordo*; porque no pudiéndose representar por ninguna fraccion, se sigue que en qualquier número de partes que se suponga dividida la unidad, ningunas serán bastante pequeñas para medir al mismo tiempo exâctamente á esta raiz y á la unidad.

244 Como para multiplicar quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, y para quadrar un número no hay mas que multiplicarle por sí mismo: resulta que el quadrado de un quebrado se forma *elevando el numerador y denominador*, y por lo mismo para extraer la raiz quadrada *se extrae la del numerador y la del denominador*; pero aqui pueden ocurrir tres casos, á saber: que ambos términos tengan raiz exâcta, que uno de ellos solo la tenga, y que no la tenga ninguno.

En el primer caso se extrae de ambos exâctamente, por exemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$; en el segundo se extrae exâctamente del que la tiene y aproxîmada del que no la tiene; y así $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,732\ \&c}{2}$, y $\sqrt{\frac{9}{14}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{3,7416\ \&c.}$

Quando ninguno de los dos términos tiene raiz exâcta se puede hacer que uno de los dos la tenga, multiplicando los dos términos del quebrado por aquel término que queramos que la tenga; lo qual no altera el valor del quebrado (107) y hace que dicho término sea el quadrado del correspondiente en el primitivo; despues se extrae por aproxîmacion la del que no la tiene, y exâctamente del que la tiene; pero como siempre conviene que el denominador sea el mas sencillo, por eso se procura que la tenga el denominador, multiplicando los dos términos del quebrado por el denominador; de manera que $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5\cdot 7}{7\cdot 7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{5,9\ \&c.}{7}$

La misma operacion se debe practicar y por la misma razon, aun quando el numerador la tenga exâcta.

245 En el exemplo expuesto (242) hemos visto que á cada guarismo que vamos sacando se va complicando mas la operacion, y por lo mismo conviene averiguar si hay algun medio para abreviarla. Neuton propone en su Aritmética universal que *quando se han sacado la mitad de los guarismos de la raiz, ó la mitad y uno mas, se pueden sacar los otros dividiendo el residuo por el duplo de lo hallado antes.*

Y así, si nos proponemos extraer la raiz quadrada de 5978538283 procederemos como hemos dicho y se ve en la página siguiente:

hasta haber sacado los tres primeros guarismos 773 que es uno mas de la mitad, pues aqui la raiz debe tener cinco; y despues divido la resta que queda por el duplo de 773; y los dos guarismos 21 que saco los pondré á la derecha de los anteriores, y tendré que la raiz es 77321.

```
5 9,7 8,5 3,8 2,8 3 | 77321
1 0 7,8
  1 4 7
  0 4 9 5,3
    1 5 4 3
    0 3 2 4 8,2 | 1546
      0 1 5 6 2 | 21
        0 0 1 6
```

Esta abreviacion es sumamente socorrida quando se tienen que extraer raices con mucha aproximacion; y así, si nos proponemos extraer la raiz de 5 con once guarismos exâctos, lo executaremos por el método ordinario hasta encontrar los seis primeros guarismos, porque once decimales que quiero sacar y un entero que tengo, componen doce guarismos cuya mitad es seis; y despues dividiré el residuo por el duplo de la raiz hallada, como aqui se ve: y saco que la raiz de 5 es 2,23606797751 &c.

```
5                          | 2,23606797751
1 0,0
  4 2
  1 6 0,0
    4 4 3
    2 7 1 0,0
      4 4 6 6
      0 3 0 4 0,0 0,0
        4 4 7 2
        4 4 7 2 0 6
        3 5 6 7 6 4 0       | 447212
        0 4 3 7 1 5 6 0     | 797751
          0 3 4 6 6 5 2 0
            3 3 6 0 3 6 0
            0 2 2 9 8 7 6 0
              0 0 6 2 7 0 0 0
                  1 7 9 7 8 8
```

Neuton no demostró su regla como tenia de costumbre; más para convencernos nosotros de que es verdadera, supondremos que la raiz del número propuesto, sea la que sea, esté dividida en dos partes que la primera que llamaremos a, contenga la mitad del número de guarismos de especie superior, si la raiz ha de tener un número par de guarismos, y la mitad mas uno si es ímpar; y llamando b á la otra parte será $a+b$ dicha raiz, cuyo quadrado es $a^2+2ab+b^2$; y despues de haber extraido la mitad de la raiz, ó la mitad mas uno, esto es, la a, en lo que quede del quadrado se hallará $2ab+b^2$. Ahora, la parte $2ab$ no se hallará en el quadrado en ninguno de los guarismos que estén expresados por los que hay en b; luego si en todo el quadrado los separamos, á la izquierda de esta separacion nos quedarán otros tantos que yéndolos añadiendo á la resta que nos ha quedado nos irá dando los guarismos que nos faltan.

En los guarismos que nos quedan separados á la izquierda estarán ademas del duplo $2ab$ algunas unidades mas que pueden haber resul-

tado del quadrado b^2; y por lo mismo podrá suceder que el quociente resulte así una, dos, tres ó quatro unidades mas de lo que debia; pero no puede resultar ya mas; y si el primer guarismo de la raiz es 5 ó mayor que 5, jamas puede resultar ninguna unidad mas; sino lo es, se sacará un guarismo mas por el método regular en el caso de que sea par el número de guarismos de la raiz.

Para hacer sensible este raciocinio nos propondremos elevar al quadrado el número 352498, y le dividiremos en dos partes como las que hemos dicho, de esta manera: $352498 = 352000 + 498$; por lo qual será: $352498^2 = (352000 + 498)^2 = 352000^2 + 2 \times 352000 \times 498 + 498^2 = \ldots$ $123904000000 + 350592000 + 248004 = 124254840004$.

Ahora, empezaremos extrayendo nuestra raiz quadrada como aqui se presenta:

```
1 2.4 2,5 4,8 4,0 0,0 4 | 352498
 3 4,2
  6 5
 0 1 7 5,4
     7 0 2
     3 5 0 8   | 7 0 4
       6 9 2 4 | 4 9 8
       5 8 8 0
         2 4 8
```

y luego que hayamos sacado los tres primeros guarismos que es la mitad de los de la raiz, los 350 que quedan junto con los otros tres guarismos que siguen 840, se irán dividiendo por el duplo de 352 que es 704, y sacamos por quociente 498; y tenemos por raiz 352498.

Hemos dicho que lo mas que puede suceder es que por este medio quando el número de guarismos de la raiz sea par, salga el quociente con una, dos, tres, ó quatro unidades mas solamente; esto está fundado en que el caso mas desfavorable es aquel en que los primeros guarismos sean 1 con ceros, y los últimos todos nueves como en este número 100999; aqui en los guarismos de su quadrado se hallarán desde el quarto en adelante, todas las unidades que se llevaren del quadrado de 999 que es 998001, y por consiguiente de este quadrado resultarian 998 para el quarto, quinto y sexto lugar. Como los tres primeros guarismos de la raiz son 100, su duplo será 200, que el mayor número de veces que puede estar contenido en 998 es quatro; luego en este caso solo podrian resultar quatro unidades mas en la raiz. Si el primer guarismo de la raiz fuera 2 el caso mas desfavorable era aquel en que los tres primeros fuesen 200, cuyo duplo es 400, que solo puede estar contenido dos veces en 998; luego quando el primer guarismo de la raiz es 2, solo pueden resultar dos unidades mas en el quociente. Si el primer guarismo fuese 3 ó 4 en el caso mas desfavorable solo podria resultar una unidad mas; pero si fuese 5 ó mayor que 5 no podria resultar ni aun en el caso mas desfavorable ninguna unidad mas; porque en este serian los tres primeros guarismos 500 cuyo duplo es 1000, que no está contenido en 998 ninguna vez, y con menos razon los duplos de 600, ó de 700 &c.

246 La raiz quadrada de las cantidades algebráicas se extrae de un modo análogo al de las numéricas: *se ordenan, se extrae la raiz del primer término, y luego se divide siempre por el duplo de la raiz hallada*; y así, si nos proponemos extraer la raiz quadrada de la cantidad $9a^4+4b^6-30a^2c+25c^2+12a^2b^3-20b^3c$, la ordenaremos por la a como aqui se presenta:

$9a^4-30a^2c+25c^2+4b^6-20b^3c$	$3a^2-5c+2b^3$
$+12a^2b^3$	$6a^2-5c$
$+30a^2c-25c^2$	
$+12a^2b^3+4b^6-20b^3c$	$6a^2-10c+2b^3$
$-12a^2b^3+20b^3c-4b^6$	
0 0 0	

Y empezaremos diciendo: la raiz de $9a^4$ es $3a^2$ que pondremos en las rayas y borraremos el $9a^4$; despues dividiremos el $-30a^2c$ por $6a^2$ que pondremos debaxo de las rayas, y el quociente $-5c$ le pondremos al lado del $6a^2$ y en la raiz, multiplicaremos el $6a^2-5c$ por $-5c$, y el producto le colocaremos debaxo de la cantidad mudándole los signos; tiraremos una raya, debaxo de la qual pondremos lo que nos quede despues de hecha la destruccion: y esto lo dividiremos por el duplo $6a^2-10c$ de la raiz hallada, lo que conseguiremos dividiendo el $12a^2b^3$ por el $6a^2$, y el quociente $2b^3$ le colocaremos en las rayas y al lado del duplo; multiplicaremos todo el $6a^2-10c+2b^3$ por el quociente $2b^3$, y el producto le colocaremos mudándole los signos debaxo de la resta anterior; y como despues de hecha la destruccion no queda nada, resulta que la raiz de dicha cantidad es $3a^2-5c+2b^3$.

De la elevacion á la tercera potencia ó cubo, y extraccion de la raiz cúbica, de las cantidades polinomias y numéricas.

246 Por lo expuesto anteriormente (197) sabemos que el cubo de una cantidad es el producto que resulta de multiplicarla por sí misma dos veces de seguida; de manera que el cubo de $(a+b)$ es el producto que resulta de multiplicar $a+b$ por $a+b$, y luego este resultado por $a+b$; y así, $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (B).

Este resultado nos puede servir de fórmula para elevar una cantidad qualquiera al cubo, y por lo mismo le traduciremos en regla diciendo: *el cubo de una cantidad que se compone de dos partes, consta de quatro partes, á saber: del cubo de primera parte; del triplo del quadrado de primera por segunda; del triplo de primera por el quadrado de la segunda; y finalmente del cubo de la segunda.*

Si la segunda parte b fuese negativa, entonces todos los términos donde

la b se halle con exponente ímpar, que son los que ocupan los lugares pares, tendrian el signo—, de manera que $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Si la cantidad que se hubiese de elevar al cubo constase de mas de dos términos, podríamos llamar a á la suma de todos menos el último, y b al último, y executar nuestra operacion; luego, llamaríamos otra vez a á todos los términos menos el último que hubiese en el primer quadrado, y b al último; y así procederíamos por un método análogo al explicado (237) para elevar al quadrado; pero es mucho mas ventajoso que esta substitucion el executarlo directamente por esta regla que le es equivalente.

Se elevan al cubo los dos primeros términos como si estubiesen solos, despues se multiplica el triplo del quadrado de la suma de estos dos por el tercero, luego el triplo de cada uno de estos dos por el quadrado del tercer término, despues se pone el cubo del tercer término, y luego se continúa del mismo modo, como aqui se presenta:

$(a+b+c+d+e+\&c.)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2$
$+3bc^2+c^3+3a^2d+6abd+6acd+6bcd+3b^2d+3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2$
$+d^3+3a^2e+6abe+6ace+6ade+6bce+6bde+6cde+3b^2e+3c^2e+3d^2e$
$+3ae^2+3be^2+3ce^2+3de^2+e^3+\&c.$

248 Si quisiéramos averiguar en quanto se diferencian los cubos de dos números que se diferencian en una unidad, llamaríamos a al menor, con lo que $a+1$ seria el mayor; y suponiendo en la fórmula anterior que $b=1$ será $(a+1)^3=a^3+3a^2\times1+3a\times1^2+1^3=a^3+3a^2+3a+1$. De donde restando a^3 cubo del menor nos vendrá la diferencia expresada por $3a^2+3a+1$, que traducida en regla quiere decir *que se diferencian en el triplo del quadrado del menor, mas el triplo del mismo número menor, mas la unidad*; con cuyo auxîlio podremos formar fácilmente los cubos de los números que solo se vayan diferenciando en una unidad.

Así es que empezaremos: el cubo de 1 es 1, porque qualquier potencia de la unidad es igual con la misma unidad; ahora, el quadrado de 1 es 1 el triplo de dicho quadrado es 3, el triplo del mismo número tambien es 3, y 3 que teníamos son 6, y 1 que debemos añadir son 7, que junto con el 1 cubo de 1, da 8 que es el cubo de 2.

Para el de 3 diremos: el quadrado de 2 es 4, el triplo de 4 es 12, el triplo de 2 es 6, y 12 son 18, y 1 que debemos añadir son 19, que junto con el 8, cubo de 2, da 27 para el cubo de 3.

Continuando del mismo modo hallaríamos que el cubo de 4 es 64, el de 5 es 125, el de 6 es 216, el de 7 es 343. el de 8 es 512. el de 9 es 729, el de 10 es 1000. Los cubos de los nueve números dígitos conviene retenerlos en la memoria.

249 Ahora, para elevar al cubo una cantidad qualquiera numérica mayor que 10, la descompondremos en dos partes que la una sea todo el número excepto las unidades, y la otra las unidades. Así, si quisiéramos elevar al cubo el número 57, le descompondríamos en estas dos

partes 50+7; y suponiendo en la fórmula (*B*) que $a=50$ y $b=7$, tendremos: $57^3=(50+7)^3=50^3+3.50^2.7+3.50.7^2+7^3=125000+52500+7350+343=185193$.

Esta expresion nos dice que el cubo de un número que contiene decenas y unidades, *se compone del cubo de decenas, del triplo del quadrado de decenas por unidades, del triplo de decenas por el quadrado de unidades, y finalmente del cubo de las unidades.* Y observando que el cubo de decenas ha de expresar millares; el triplo del quadrado de decenas por unidades ha de expresar centenas; el triplo de decenas por el quadrado de unidades, decenas; y el cubo de unidades, unidades: tendremos lo suficiente para entender los fundamentos en que estriba la regla que vamos á dar para extraer la raiz cúbica de un número qualquiera, que es la siguiente.

Divídase el número propuesto en periodos de á tres guarismos con una coma, empezando de derecha á izquierda, aunque en el último de la izquierda solo quede uno ó dos guarismos; véase qual es el mayor cubo contenido en el primer periodo á la izquierda, y su raiz póngase en las rayas; despues, este cubo réstese de dicho primer periodo, al lado de la resta báxese el periodo siguiente, sepárense los dos guarismos de la derecha con una coma, y lo que quede á la izquierda divídase por el triplo del quadrado de la raiz hallada, que se ha colocado aparte debaxo de las rayas; luego se forman las otras tres partes del cubo en esta forma: se multiplica el triplo del quadrado de la raiz hallada por el quociente que acabamos de encontrar, y el producto se pone debaxo de lo que nos sirvió de dividendo; de modo que el último guarismo esté debaxo del inmediato á la izquierda de la coma con que se separaron los dos últimos del periodo que se baxó; despues se multiplica el triplo de la raiz que teníamos por el quadrado del quociente, y el producto se coloca debaxo del producto anterior, corriéndole un lugar hácia la derecha; por último se cubica el quociente y se pone debaxo del producto anterior corriéndole un lugar hácia la derecha; luego, se suman estas tres cantidades, y al mismo tiempo se va restando de lo que teníamos antes, que era la resta anterior junta con el periodo que se baxó. Al lado de la resta que obtengamos se baxará el periodo siguiente, se separarán los dos últimos guarismos, y lo que quede á la izquierda se dividirá por el triplo del quadrado de toda la raiz hallada, se formarán las otras tres partes y se restarán; y así se continúa hasta que no haya mas periodos que baxar; en cuyo caso, sino ha quedado resta es señal de que el número tiene raiz cúbica exâcta, y si quedase es señal de que no; y para aproxîmarnos por decimales debemos añadir tres ceros por cada guarismo que queramos sacar en la raiz, y continuar del mismo modo la operacion.

Quando no se puede hacer la resta es señal de que se ha puesto demas en la raiz.

Apliquemos esta regla á la extraccion de la raiz cúbica del 185193; lo primero que executaremos será dividirle en periodos de á tres, ver qual es el mayor cubo contenido en el primer periodo de la izquierda que es 185, lo que hallaré repasando los cubos de los números dígitos, y viendo que 185 está entre 125, que es el cubo de 5, y 216 que es el de 6; advierto que el mayor es el de 5, cuya raiz pondré en las rayas, despues restaré 125, cubo de 5, del 185; al lado de la resta 60 baxaré el periodo siguiente, separaré los dos últimos guarismos con la coma, y dividiré lo que quede á la izquierda por el triplo del quadrado de la raiz hallada que es 5, esto es, lo dividiré por 75 (porque el quadrado de 5 es 25, y el triplo de 25 es 75); este 75 se pone debaxo de las rayas como allí se presenta, y digo: 75 en 601 quántas veces? ó 7 en 60 quántas veces? veo que les cabe á 8, y pongo por consiguiente 8 en la raiz, multiplico el 75 por el 8, diciendo: 5 por 8 son 40, pongo el 0 debaxo del 1 del 601 y llevo 4; 7 por 8 son 56, y 4 que llevaba son 60 que pongo á la izquierda del cero; ahora triplico la raiz hallada anteriormente que es 5, y lo que me resulte que es 15, multiplicado por 64 quadrado del quociente 8, me dará 960; que colocaré debaxo del producto anterior 600 corriéndole un lugar hácia la derecha (*). Sin pasar mas adelante veo que la suma de estos dos productos no la puedo restar del 60193, y por lo mismo los borraré, borrando igualmente el 8 de la raiz, y pondré 7: multiplicaremos el 75 por 7, y pondremos el producto 525 debaxo del 601, despues multiplicaré el triplo de 5, que es 15, por 49 quadrado de 7, y el producto 735 le colocaré debaxo del 525 corriéndole un lugar hácia la derecha; finalmente cubicaré el 7 y pondré el 343 debaxo del 735 corriéndole tambien un lugar; sumaré estas tres partidas, y al

```
185,193 | 7
125     | 5̶8̶
------  | --
 601,93 | 75
 6̶0̶0̶
  9̶6̶0̶          15      15
 525            64      49
  735           --      --
   343          60     135
 ------         90      60
 00000          ---     ---
               960     735
```

(*) *En lugar de estas partes que faltan del cubo se puede cubicar desde luego toda la raiz, y restar su cubo de los periodos que se han tenido en cuenta en el número dado; esto es, el cubo del primer guarismo de la raiz se resta del primer periodo de la izquierda; el cubo de los dos primeros guarismos de los dos periodos de la izquierda del número dado, &c. Todo lo demas es lo mismo. Este método, aunque no es tan ingenioso, tiene dos ventajas: primera, que está menos expuesto á equivocaciones por causa de la colocacion de las diferentes partes; y segunda que como para hallar el guarismo siguiente de la raiz se ha de dividir por el triplo de la hallada, al cubicar esta ya se tiene formado el quadrado: y si en la raiz hay algun 3 el producto parcial que haya dado al formar el cubo se puede tomar por el triplo del quadrado de la raiz hallada.*

mismo tiempo iré executando la resta en esta forma: 3 es 3, de 3 á 3 no va nada; 5 y 4 son 9, de 9 á 9 no va nada; 5 y 3 son 8, y 3 son 11, de 11 á 11 no va nada y llevo 1; 2 y 1 son 3, y 7 son 10, de 10 á 10 no va nada y llevo 1; 5 y 1 son 6, de 6 á 6 no va nada; y como no hay mas periodos que baxar y la resta es cero, inferimos que el número propuesto tenia raiz exâcta como debia verificarse.

Para dar razon de esta regla observaremos que el dividirle en periodos de á tres guarismos, es porque desde que vemos que un número tiene mas de tres guarismos, debemos inferir que la raiz tendrá mas de uno; y como el cubo de las decenas debe hallarse desde los millares en adelante se separarán los tres primeros; si en lo que queda á la izquierda hubiese aun mas de tres guarismos, era señal de que las decenas de la raiz estaban representadas por mas de un guarismo; y por la misma razon que antes deberemos separar otros tres guarismos, &c.

Como en el primer periodo de la izquierda se halla el cubo del guarismo de especie superior de la raiz, viendo qual es el mayor cubo contenido en él obtendremos el primer guarismo de la raiz; y restando dicho cubo del mismo periodo, y al lado de la resta baxando el periodo siguiente, tendremos en esta cantidad las otras tres partes del cubo de los dos guarismos de especie superior de la raiz; la primera que se debe hallar es el triplo del quadrado del de especie superior por el de especie inmediatamente inferior; y como esto se debe hallar desde el tercer guarismo en adelante separamos los dos últimos guarismos, y por la misma razon dividimos esto por el triplo del quadrado de la raiz hallada; despues multiplicamos el divisor por el quociente, y le colocamos debaxo de lo separado por la coma; y el producto del triplo de la raiz hallada por el quadrado del segundo guarismo hallado, se coloca un lugar mas hácia la derecha, porque el triplo del primer guarismo de la raiz por el quadrado del segundo ha de expresar decenas respecto de las unidades del segundo guarismo; y por lo mismo se debe poner un lugar mas hácia la derecha que el anterior que expresaba centenas; y finalmente se corre el cubo del segundo guarismo hallado otro lugar, porque expresa unidades respecto del segundo guarismo hallado; se suman estas tres cantidades y se restan para quitar todas las partes del cubo de los dos primeros guarismos; y se continúa del mismo modo por las mismas razones.

Quando no se obtiene raiz exâcta, se han de añadir tres ceros á la resta por cada guarismo que se quiera en la raiz; porque si hubiese un guarismo decimal en la raiz, como esta debe ser tres veces factor para producir el cubo, producirá tres guarismos decimales. Por esta causa se debe hacer que el número de guarismos decimales sea múltiplo de tres quando se intente extraer la raiz de un número que contenga enteros y decimales ó decimales solas.

Si se quiere un valor aproxîmado en forma de quebrado comun, al

lado de la parte entera de la raiz se pondrá un quebrado cuyo numerador sea la resta, y el denominador el triplo del quadrado de la raiz entera, mas el triplo de la misma raiz, mas la unidad; por lo dicho (248), y en virtud de razones análogas á las expuestas (242) para la raiz quadrada.

250 Aqui tambien se va complicando mucho la operacion al paso que se sacan mas guarismos, y por lo mismo conviene abreviar la operacion. Para esto indagaremos analíticamente qué relacion debe guardar el número de guarismos que se pueden sacar abreviadamente con los ya sacados. Sea $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ la potencia de que se ha de extraer la raiz cúbica; a la parte ya extraida, y b la parte que falta por extraer; y puesto que la extraccion hecha por el método comun ha privado á la potencia $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ de su término a^3, lo que resta de esta potencia es $3a^2b+3ab^2+b^3$, cantidad que dividida por $3a^2$ da por quociente $b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$, que excede á la parte b que falta en $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$.

Luego tenemos ya reducida la qüestion á saber qual es la primera de las figuras de b, á que la adicion de $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$ puede afectar. Para conocerla supongamos que sea n el número de guarismos de a, y haciendo a igual con la unidad seguida de $n-1$ ceros, y b igual con la unidad en el lugar que ocupa la última de las figuras de a, la fraccion $\frac{b^2}{a}$ será igual á la unidad dividida por la unidad seguida de $n-1$ ceros; luego tendrá esta forma $\frac{1}{10000....00}=0,000....01=$ á la unidad en el lugar decimal expresado por $n-1$. Y por lo que toca á la fraccion $\frac{b^3}{3a^2}$ será igual á la unidad dividida por 3 acompañado de un número de ceros expresado por $2.(n-1)$ ó igual con $\frac{1}{3000000...0000}$; lo que la hará tan pequeña en comparacion de $\frac{b^2}{a}$ que no haciendo depender sino de esta la superioridad del quociente sobre b, será lo mismo que si se hiciese depender de $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$. Pero haciéndole depender solo de $\frac{b^2}{a}$ no puede exceder á la parte verdadera del quociente sino en una unidad en la cifra $n-1$ decimal de b; *luego si hubiesemos extraido por el método comun las* n *primeras figuras de la raiz cúbica de un numero, se podria tener seguridad de que dividiendo la resta que resulta de esta extraccion regular*

por tres veces el quadrado de las n *figuras ya extraidas, se encontrarian las* n—1 *figuras siguientes de la raiz, tan exâctamente que el mayor error que podria tener no excederia en una unidad de las que ocupen el lugar* n—1 *en estas figuras.* Esta unidad de error solo podria resultar en el caso extremo de que los guarismos de a fuesen 100000...&c.; pero si el primero de estos guarismos no fuese la unidad ó los otros no fuesen ceros, jamas se podria sospechar una unidad de error en este caso. Aun quando esto se verificase, nunca podria resultar un error tan grande; porque las suposiciones sobre que hemos raciocinado para sacar su valor, conspiran mas bien á aumentarle que no á disminuirle, pues que hemos supuesto que b era igual á la unidad de especie inferior de a, quando jamas se puede verificar; luego se puede contar que despues de haber obtenido n figuras de una raiz cúbica por el método comun, se pueden obtener las $n-1$ siguientes dividiendo la resta por el triplo del quadrado de las n figuras sacadas por el método vulgar.

Y así, si nos propusiéramos extraer la raiz cúbica de 53254235270, veríamos que no la tenia exâcta; y si quisiéramos aproxîmarnos por decimales hasta el tercer guarismo decimal, como ya tenemos quatro guarismos de la raiz entera, hallaríamos los tres decimales dividiendo la resta 11988542 por el triplo del quadrado de la raiz hallada; y el quociente le pondríamos en las rayas al lado de la raiz hallada, y la coma en la forma que aqui se presenta:

```
 53,254,235,270  | 3762,282
 27              | ----
 ----------      |
 262,54          | 27
 189             |
  441            |              119885420 | 42457932
   343           |               349695560 | 0,282
 -----------     |
 026012,35       | 4107           100321040
  24642          |                 15405176
    3996         |
      216        |
 -------------   |
  009685 92,70   | 424128
   848256        |
        4512     |
           8     |
 -------------   |
    11988542     |
```

251 Como para elevar un quebrado qualquiera al cubo se debe elevar su numerador y su denominador, resulta que para extraer la raiz cúbica de un quebrado se extraerá la raiz cúbica del numerador y la del denominador. Aqui pueden ocurrir los mismos casos que en la raiz qua-

drada; y en los dos primeros se procede conforme diximos tratando de ella, de manera que

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}=\tfrac{2}{5},\ \text{y}\ \sqrt[3]{\frac{11}{27}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{3}=\frac{2{,}2\ \&c.}{3}.$$

En el tercer caso que es quando ninguno de los dos términos la tiene exâcta (y aun quando la tenga el numerador) se puede hacer que uno la tenga multiplicando los dos términos del quebrado por el quadrado de aquel que queremos que la tenga, que por lo regular es el denominador; y así

$$\sqrt[3]{\tfrac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5\times 7^2}{7\times 7^2}}=\sqrt[3]{\frac{5\times 49}{7^3}}=\sqrt[3]{\frac{245}{343}}=\frac{\sqrt[3]{245}}{\sqrt[3]{343}}=\frac{6{,}2\ \&c.}{7}.$$

De las equaciones determinadas de segundo grado, y de las que siendo de un grado mas elevado contienen á la incógnita solo en dos términos, y el exponente del uno es duplo del del otro.

252 Ya hemos dicho que equacion de segundo grado es aquella en que se halla la incógnita elevada á la segunda potencia; quando la equacion es pura no tenemos que hacer para despejar la incógnita mas de lo expuesto (224), y por lo mismo solo nos falta manifestar como se resuelven las mixtas.

Lo primero que tenemos que manifestar es que *toda equacion mixta de segundo grado ha de constar solo de tres términos*: uno en que se halle la incógnita elevada al quadrado, otro en que se halle elevada á la primera potencia, y otro donde no se halle incógnita; de modo que podemos tomar por expresion general de las equaciones de segundo grado esta.

$$ax^2+bx=c,\ \text{ó}\ ax^2+bx-c=0.$$

No puede haber mas términos, porque no puede hallarse ninguno donde se encuentre la incógnita elevada á la tercera potencia ni á ninguna otra superior, pues entonces la equacion no seria de segundo grado; si hubiese muchos términos donde se hallase x^2 ó x todos los reduciríamos á uno haciendo la x^2 ó la x factor comun, y todos los términos donde no se hallase la x los podríamos considerar como uno solo. Tampoco puede tener menos términos, porque si faltase el ax^2 no seria de segundo grado, si faltase el bx no seria mixta, y si faltase el término constante c quedaria reducida la equacion á $ax^2+bx=0$, que dividiendo todo por x quedaba reducida á $ax+b=0$, que es de primer grado.

Ahora podemos dar á esta equacion otra forma dividiéndola toda por a, y se nos convertirá en $x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0$, ó haciendo $\frac{b}{a}=p$, y $-\frac{c}{a}=q$, en $x^2+px+q=0$ (C), que tomaremos por fórmula general

de las equaciones de segundo grado. Quando una equacion de segundo grado está baxo esta forma se dice que está *preparada*, y las circunstancias que exîge el estar preparada son el que se haya reducido la equacion á solos tres términos; el que se halle sin coeficiente el primer término, que es aquel en que la incógnita está elevada al quadrado: lo que se consigue dividiendo toda la equacion por el coeficiente que tenga dicho término; y que ademas dicho primer término tenga el signo positivo: lo que se consigue mudando los signos á toda la equacion quando tenga el signo negativo.

253 Antes de pasar á manifestar como se resuelven estas equaciones, pondremos aqui una bastante complicada para prepararla y reducirla á la forma (*C*).

Sea v. g. $ax^2+2bx-a^2+c^2-\frac{4bx^2}{e}=\frac{5}{3}ex-\frac{8d}{m}+\frac{7cx}{a}$.

Lo primero que executaremos será pasar al primer miembro todos los términos en que se halle la incógnita, y todos los demas al segundo en esta forma: $ax^2+2bx-\frac{4bx^2}{e}-\frac{5}{3}ex-\frac{7cx}{a}=-\frac{8d}{m}+a^2-c^2$; ahora sacaremos la x^2 fuera de un paréntesis, dentro del qual pondremos todos los coeficientes de los términos en que se halle, y lo mismo respecto de aquellos en que se halle x, de este modo:

$$x^2(a-\frac{4b}{e})+x(2b-\tfrac{5}{3}e-\frac{7c}{a})=-\frac{8d}{m}+a^2-c^2;$$

ahora dividiendo toda la equacion por lo que multiplica á x^2 tendré:

$$x^2+x\times\frac{2b-\frac{5}{3}e-\frac{7c}{a}}{a-\frac{4b}{e}}=\frac{-\frac{8d}{m}+a^2-c^2}{a-\frac{4b}{e}} \quad (1),$$

con lo qual la tenemos preparada; y si llamamos p á lo que multiplica á x, y $-q$ al término constante de que se compone el segundo miembro, se convertirá esta en $x^2+px=-q$, ó pasando la q al primer miembro en $x^2+px+q=0$ que es la (C).

Estando ya preparada tratemos de resolverla, y pues que todas se pueden reducir á la (*C*) se sigue que resuelta esta podremos tener por su medio resueltas ya las demas. Para resolver esta equacion $x^2+px+q=0$ pasaremos el término q al segundo miembro lo que nos dará $x^2+px=-q$.

Aqui advertimos que esta equacion quedaria resuelta si el primer miembro fuese un quadrado exâcto, porque en este caso extrayendo la raiz quadrada tendríamos la x elevada solo á la primera potencia; pero comparando el primer miembro con la expresion $x^2+2ax+a^2$ del quadrado de $x+a$, vemos que le falta el tercer término del quadrado; luego considerando á x como primera parte, x^2 será el quadrado de primera

parte; px el duplo de primera por segunda, y como x es la primera, p será el duplo de la 2.ª y por lo mismo su mitad $\frac{p}{2}$ será igual á dicha segunda parte; luego si á ambos miembros añadimos $\frac{p^2}{4}$ que es el quadrado de dicha mitad, la equacion no se alterará y el primer miembro será quadrado exâcto; luego tendremos: $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$, que extrayendo la raiz quadrada sale $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, de donde $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Pudiéramos haber demostrado que se habia de añadir la cantidad $\frac{p^2}{4}$ por un método puramente analítico en estos términos.

Si el primer miembro de la equacion $x^2+px+q=0$ (C) no es un quadrado exâcto, podríamos concebir que añadiéndole una cantidad de cierta especie lo será; sea A la cantidad que se le haya de añadir, y tendremos que la equacion (C) se convertirá en $x^2+px+q+A=A$ (D).

Ahora, pues que el primer miembro debe ser un quadrado exâcto, deberá tener esta forma $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$; luego deberá ser $2a=p$, de donde resulta $a=\frac{p}{2}$, y $a^2=q+A$, de donde $A=a^2-q=\frac{p^2}{4}-q$; luego la equacion (D) de arriba se convertirá en $x^2+2ax+a^2=\frac{p^2}{4}-q$, que extrayendo la raiz quadrada será: $x+a=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, que da $x=-a\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ó poniendo en vez de a su valor $\frac{p}{2}$, tendremos: $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Este último resultado nos puede servir de fórmula para resolver todas las equaciones de segundo grado; pero es mucho mas ventajoso en la práctica traducirle en regla, que comparándole con la equacion primitiva nos da la siguiente.

Para resolver una equacion de 2.º grado que ya está preparada, póngase desde luego la incógnita: luego el signo $=$, despues de este signo

la mitad del coeficiente (*) *del segundo término con un signo contrario al que lleve, despues el signo de ambigüedad* ±, *luego un radical de segundo grado: debaxo de este radical el quadrado de la mitad del coeficiente del segundo término siempre con el signo positivo, y despues el tercer término de la equacion con el mismo signo con que se halle en el segundo miembro, ó con un signo opuesto al que se halla en el primero.*

Aplicando esta regla á la equacion (1) tendremos inmediatamente.

$$x=-\frac{1}{2}\,\frac{2b-\frac{5}{3}e-\frac{7c}{a}}{a-\frac{4b}{e}}\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\,\frac{2b-\frac{5}{3}e-\frac{7c}{a}}{a-\frac{4b}{e}}\right\}^2+\frac{-\frac{8d}{m}+a^2-c^2}{a-\frac{4b}{e}}}$$

Como en el valor de x hallamos un signo de ambigüedad ±, nos dice que hay dos valores de x que reduzcan á cero el primer miembro de la equacion (C); y separándolos tendremos:

$$x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\ \text{y}\ x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Estos dos valores no pueden ser iguales á menos que p no sea 0. porque entonces el primero será $x=\sqrt{-q}$ y el segundo $x=-\sqrt{-q}$, que solo se diferencian en el signo. Pero quando $p=0$ la equacion (C) se reduce á una equacion pura; luego paraque los dos valores que da una equacion de 2.º grado sean iguales aunque de signo contrario, se necesita que esta equacion sea pura, ó que el coeficiente del 2.º término sea cero.

Que toda equacion de segundo grado debe dar dos valores para la incógnita lo podremos demostrar *á priori* de esta manera.

Sea $x^2+px+q=0$ dicha equacion: tratamos de demostrar que si hay una cantidad α, que substituida por x reduzca el primer miembro á 0, habrá necesariamente otra cantidad que substituida en vez de la misma incógnita satisfaga á la misma condicion.

En efecto, pues que α cumple por el supuesto con dicha condicion, se tendrá $\alpha^2+p\alpha+q=0$, de donde $q=-\alpha^2-p\alpha$; cuyo valor substituido en la primitiva la reduce á $x^2+px-\alpha^2-p\alpha=0$, ó á $x^2-\alpha^2+px-p\alpha=0$, que en virtud de la observacion hecha (179) podremos poner baxo esta forma: $(x+\alpha)(x-\alpha)+p(x-\alpha)=0$, ó $(x-\alpha)(x+\alpha+p)=0$; ahora, el primer miembro de esta equacion se convertirá en cero quando uno qualquiera de sus factores lo sea; luego dicha equacion queda ve-

(*) *De aqui en adelante se da á la palabra* coeficiente *un sentido mas extenso que el expuesto* (160), *pues llamaremos coeficiente de un término qualquiera de una equacion á todo lo que multiplica á la incógnita en aquel término.*

rificada ó quando $x-\alpha=0$ que da $x=\alpha$, ó quando $x+\alpha+p=0$ que da $x=-\alpha-p$; luego tenemos demostrado lo que nos proponíamos.

254 Por el método de las equaciones de segundo grado se resuelven las equaciones de un grado qualquiera, con tal que la incógnita se halle solo en dos términos, de manera que el exponente que tenga en el uno sea duplo del que tiene en el otro; todas estas equaciones tienen esta forma: $x^{2m}+px^m+q=0$ (E) expresando m un número entero positivo. Para resolver esta equacion haremos $x^m=z$, y tendremos elevando al quadrado que $x^{2m}=z^2$; luego substituyendo estos valores en la equacion (E) se convertirá en $z^2+pz+q=0$ (F), que en virtud de la regla (253) obtendremos inmediatamente:

$$z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

que poniendo en vez de z su valor x^m sera: $x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, y extrayendo la raiz m de ambos miembros se tendrá:

$$x=\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}};$$

que tambien podremos traducir en la siguiente regla.

Para despejar la incógnita en una equacion de las circunstancias dichas, se pondrá desde luego la incógnita, despues el signo =, luego un radical cuyo exponente sea el que lleva la incógnita en el segundo término, y debaxo de este radical se debe hallar todo lo que hemos dicho en la regla (253).

255 Propongámonos con la mira de hacer aplicacion de estas reglas resolver una qüestion de cada especie.

Qüestion 1.ª *Hallar un número tal que si al duplo de dicho número se añade siete veces el quociente que resulte de dividir* 30 *por dicho número, y de todo se quitan* 15 *unidades, resulte nueve veces la mitad de dicho número mas* 5.

Llamando x el número propuesto y siguiendo las reglas expuestas (215) plantearemos la qüestion en esta equacion: $2x+7\times\frac{30}{x}-15=9\times\frac{x}{2}+5$, que quitando ante todas cosas los divisores será:

$$4x^2+14\times30-15\times2x=9x^2+5\times2x,$$

ó pasando todos los términos donde hay incógnita al primer miembro, y todos aquellos donde no la hay al segundo, será:

$4x^2-30x-9x^2-10x=-14\times30=-420$, ó $-5x^2-40x=-420$; que mudando los signos á toda la equacion será: $5x^2+40x=420$; ahora, dividiéndola toda por 5, paraque el primer término se halle sin coeficiente, se tendrá: $x^2+8x=84$;

y como la tenemos ya preparada despejarémos la incógnita inmediatamente diciendo que es igual á la mitad del coeficiente del segundo término con un signo opuesto al que lleva; como el coeficiente del segundo término es 8, su mitad será 4, y por lo mismo pondremos —4 despues del signo =, luego el signo de ambigüedad ±, despues un radical del segundo grado, y despues el quadrado de 4, mitad del coeficiente del segundo término, que es 16, y luego el 84 con el mismo signo que tiene porque está en el segundo miembro, de manera que será:

$$x=-4\pm\sqrt{16+84}=-4\pm\sqrt{100}=-4\pm10.$$

Como aqui sacamos un signo de ambigüedad nos resultan dos valores para x, uno de tomar el signo superior, y otro el inferior; y tendrémos dos números que satisfagan á la condicion propuesta, á saber:

$$x=-4+10=+6,\ \text{y otro}\ x=-4-10=-14.$$

Qüestion 2.ª *Se pide un número tal que si del quádruplo de su cubo se resta cinco veces el quociente que resulta de dividir 40 por el mismo cubo, resulte el cubo del mismo número, menos una unidad.*

Teniendo presente lo dicho (215) y llamando x el número que se busca, tendrémos planteada la qüestion en la siguiente equacion:

$4x^3-5\times\dfrac{40}{x^3}=x^3-1$, que quitando los divisores da: $4x^6-5\times40=x^6-x^3$,
que se convierte en $4x^6-x^6+x^3=5\times40=200$, ó en $3x^6+x^3=200$; dividiéndola ahora por 3 será: $x^6+\frac{1}{3}x^3=\frac{200}{3}$;
que para aplicarle la regla (254) pondremos despues de x el signo =, luego un radical de tercer grado, y debaxo de este radical lo mismo que hubiéramos puesto si hubiera sido la equacion simplemente de segundo grado; de manera que tendrémos

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{1}{36}+\tfrac{200}{3}}}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{1}{36}+\tfrac{200.12}{3.12}}}=\ldots$$
$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{1}{36}+\tfrac{2400}{36}}}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{2401}{36}}}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\tfrac{49}{6}};$$

que separando los valores da: $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{6}+\frac{49}{6}}=\sqrt[3]{\frac{48}{6}}=\sqrt[3]{8}=2$,
y $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{6}-\frac{49}{6}}=\sqrt[3]{-\frac{50}{6}}=-\sqrt[3]{\frac{25}{3}}=$ (§ 251) —.....

$$\sqrt[3]{\tfrac{225}{27}}=-\frac{\sqrt[3]{225}}{3}=-\frac{6{,}09\ \&c.}{3}.$$

De las razones y proporciones.

256 Se da el nombre de *razon* á la comparacion de dos cantidades; la cantidad que se compara se llama *antecedente*, aquella con que se compara *consequente*, y lo que resulta de la comparacion se llama *rela-*

cion ó exponente de la razon. Quando el antecedente es igual con el conseqüente la razon se llama *razon de igualdad*; quando no, se llama razon de *desigualdad*; si el antecedente es mayor que el conseqüente se llama de *mayor desigualdad*; y si menor, de *menor desigualdad.* Con dos miras diferentes se puede hacer la comparacion de dos cantidades: ó con la mira de averiguar la diferencia que hay entre ellas, ó con la de averiguar las veces que la una contiene á la otra; quando la comparacion se hace con el objeto de averiguar la diferencia que hay entre dos cantidades se llama *razon aritmética*, y quando con el objeto de saber las veces que la una está contenida en la otra se llama *razon geométrica.*

La razon aritmética se señala poniendo el antecedente, despues un punto, y luego el conseqüente; la geométrica poniendo dos puntos entre el antecedente y el conseqüente. Por exemplo: para señalar la razon aritmética que hay entre 6 y 2, se escribirá 6.2, que se lee: 6 *es aritméticamente á* 2; y para señalar la razon geométrica que hay entre las mismas cantidades, se escribe 6:2 que se lee: 6 *es geométricamente á* 2; ó como estas razones son las que ocurren con mayor freqüencia, se leen omitiendo la palabra geométricamente así: 6 *es á* 2. Al antecedente y conseqüente juntos se les da el nombre de *términos* de la razon.

En la primera para encontrar el exponente de la razon restaremos el conseqüente del antecedente, y hallaremos que $6-2=4$; para hallarle en la segunda se dividirá el antecedente por el conseqüente, y será $\frac{6}{2}=3$. La razon aritmética se deberia señalar poniendo el signo — entre el antecedente y el conseqüente, porque no viene á ser otra cosa que la indicacion de una operacion de restar. La geométrica está perfectamente señalada; pues los dos puntos son el signo de la division.

257 Puesto que la razon aritmética no es mas que un modo particular de indicar una resta, se sigue que *no se alterará dicha razon* (84) *aunque á sus dos términos se les añada ó quite una misma cantidad*; y puesto que la razon geométrica no es mas que una division indicada, resulta que *no se alterará aun quando se multipliquen* (92) *ó partan sus dos términos por una misma cantidad.*

258 Quando se tienen dos razones de una misma especie, de las quales la una tiene por antecedente lo que la otra por conseqüente, se dice que la una es *inversa* de la otra; y así 2.6 es inversa de la que teníamos antes 6.2; y el exponente de su razon será tambien lo contrario de lo que era antes, como en efecto se verifica, pues que $2-6=-4$; tambien 2:6 es razon geométrica inversa de la 6:2 que teníamos antes, y el exponente de su razon es el contrario de lo de allí, puesto que allí era 3 ó $\frac{3}{1}$, y aquí es $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

259 Se llama *proporcion* á la igualdad de dos razones de una misma especie; y como las razones pueden ser de dos clases, á saber, *aritméticas* y *geométricas*, resulta que las proporciones serán *aritméticas* y *geométricas.* Proporcion aritmética será la igualdad de dos razones aritmé-

ticas, y proporcion geométrica la igualdad de dos razones geométricas. Como en una proporcion entran dos razones, y cada una consta de un antecedente y de un conseqüente, resulta que en toda proporcion entran quatro cantidades, dos antecedentes y dos conseqüentes.

Para escribir una proporcion aritmética se pone una razon á continuacion de la otra, poniendo dos puntos en medio: y para escribir una geométrica se ponen quatro puntos entre las dos razones. Para leerlas se lee cada razon separadamente, y quando se llega á los dos puntos en la aritmética se leen *como*, y los quatro puntos en la geométrica tambien se leen *como*.

260 Los principiantes encuentran mucha dificultad para escribir por sí mismos una proporcion; así les vamos á dar una regla para formarlas. *Para obtener una proporcion aritmética se pondrán dos cantidades qualesquiera, separadas entre sí con un punto paraque formen la primera razon; despues se pondrán dos puntos, y luego á las dos cantidades primitivas se les añadirá ó quitará una misma cantidad; y se pondrán estos dos números despues de los dos puntos, separados entre sí con un punto, los quales formarán la segunda razon*; y siempre que hagan esto estarán seguros de que han puesto una proporcion, puesto que la primera razon, habiéndose añadido á cada uno de sus términos una misma cantidad, no se ha alterado (257); luego la segunda razon que hemos escrito es la misma que la primera. *Para formar una proporcion geométrica se escribirán dos cantidades paraque formen la primera razon; luego, se pondrán los quatro puntos, y despues por segunda razon lo que resulte de multiplicar ó dividir por una misma cantidad los dos términos de la primera.* Como esta multiplicacion ó division no altera la razon (257), no queda duda en que por este medio tendrán escrita una proporcion geométrica.

Propongámonos, por exemplo, escribir una proporcion aritmética; y así, lo primero que haremos será poner dos cantidades qualesquiera 8 y 3, separadas con un punto, y luego poner los dos puntos y añadir ó quitar á las anteriores una misma cantidad, por exemplo 4, de manera que tendremos 8.3:12.7; esta proporcion la leeríamos diciendo: 8 *es aritméticamente á* 3 *como* 12 *á* 7, donde vemos que hay igualdad de razones, porque $8-3=5$ y $12-7=5$.

Si en vez de añadir 4 las hubiéramos quitado, tendríamos 8.3 : 4.—1, donde vemos que tambien hay igualdad de razones porque $8-3=5$, y $4-(-1)=4+1=5$. Si se quiere que no resulten cantidades negativas se evitará añadiendo siempre.

Propongámonos ahora escribir una proporcion geométrica; para lo qual escribiremos dos cantidades qualesquiera paraque formen la primera razon, por exemplo, 15 y 3; y despues de puestos los quatro puntos multiplicaremos ó dividiremos ambas cantidades por otra cantidad qualquiera, tal como 4, y tendremos, multiplicando, la proporcion

15:3::60:12; esta proporcion la leeríamos diciendo: 15 *es geométricamente* ó simplemente 15 *es á* 3 *como* 60 *á* 12; y vemos que es proporcion porque $\frac{15}{3}=5$, y $\frac{60}{12}=5$.

Si hubiéramos dividido por 4, hubiera resultado $15:3::\frac{15}{4}:\frac{3}{4}$ que tambien forman proporcion porque $\frac{15}{3}=5$, y $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{3}{4}}=(\S 122)\frac{15.4}{3.4}=\frac{15}{3}=5$; pero si se quiere evitar el que haya quebrados, nunca se procederá dividiendo ambos términos por una misma cantidad, sino multiplicándolos.

261 De los quatro términos que componen una proporcion se llaman antecedentes el primero y el tercero, y conseqüentes el segundo y el quarto. El primero y el último se llaman *extremos*, el segundo y tercero *medios*; el primero y segundo se llaman los dos *primeros* términos, y el tercero y quarto se llaman los dos *segundos* ó los dos *últimos*.

Quando los medios estan representados por diferentes cantidades como en las proporciones que hemos puesto hasta ahora, las proporciones se llaman *discretas*; pero quando el antecedente de la segunda razon es el mismo que el conseqüente de la primera, entonces los medios estan representados por una misma cantidad, y la proporcion se llama *continua*. Para formar una proporcion continua aritmética, se pondrá por tercer término de la proporcion el segundo, y para poner el quarto se quitará á este lo que el primero llevaba al segundo, ó se le añadirá lo que el segundo llevaba al primero. Así, para escribir una proporcion aritmética continua pondré por primera razon qualquiera, v. g. 6.11; despues del 11 pondré los dos puntos, luego el mismo 11, y despues de un punto lo que resulta de añadir 5 al 11; y así tendré la proporcion 6.11: 11.16.

Si el antecedente fuese mayor que el conseqüente le quitaria las unidades que aquel llevase á este, de manera que si por primera razon hubiera puesto 9.7 tendria 9.7:7.5.

La proporcion aritmética continua se escribe de un modo abreviado poniendo antes este signo ÷, despues el primer término, luego el medio, y despues el otro extremo separándolos con un punto; de manera que esta última se escribe ÷9.7.5.

La raya antes con el punto encima y debaxo sirve para indicar que el segundo término se ha de repetir, y se lee: 9 *es aritméticamente á* 7 *es á* 5; que es una expresion abreviada de la que verdaderamente indica; pues con extension se leeria 9 *es aritméticamente á* 7 *como* 7 *es á* 5.

Para formar una proporcion geométrica continua no hay mas que dividir los dos términos de la razon por el exponente de dicha razon. Así, para escribir una proporcion geométrica continua escribiremos dos números qualesquiera para formar la primera razon tales como 12 y 6, dividiremos ambos términos por el exponente 2 de la razon, y se tendrá 12:6::6:3, que se escribe así abreviadamente ∺ 12 : 6 : 3; donde la raya con los dos puntos encima y los dos debaxo, indica que

el segundo término se ha de repetir, y se lee abreviadamente así: 12 *es á* 6 *es á* 3, y con extension de este modo: 12 *es á* 6 *como* 6 *es á* 3.

Quando no se lleve otro objeto que el de formar una proporcion continua, conviene para evitar en todos los casos el tener que poner quebrados, el empezar por un número qualquiera, despues poner por segundo término un múltiplo qualquiera de este número, y luego para el tercer término se toma el mismo múltiplo del múltiplo anterior. Por exemplo, pondremos primero un número qualquiera 7, despues un múltiplo qualquiera de este, tal como 21 que es el triplo, y este será el medio; para hallar el otro extremo tomaremos el mismo múltiplo del 21, esto es, el triplo y se tendrá 7:21::21:63 ó ÷7:21:63.

262 La propiedad fundamental de la proporcion aritmética es que *la suma de los extremos es igual con la suma de los medios en la discreta, y con el duplo del término medio en la continua.*

Para demostrarlo supongamos la proporcion 7.4:13.10; y tendremos que como proporcion es lo mismo que igualdad de razones, y la razon se halla restando el conseqüente del antecedente, la proporcion anterior será la misma que esta equacion $7-4=13-10$; y como añadiendo á ambos miembros de una equacion una misma cantidad no se altera, resulta que si añadimos aqui la suma de los conseqüentes, á saber $4+10$, tendremos: $7-4+4+10=13-10+4+10$;
pero en el primer miembro -4 y $+4$ se destruyen, y en el segundo tambien se destruye -10 con $+10$; luego la equacion anterior se nos convertirá en $7+10=13+4$;
pero 7 y 10 son los extremos, 13 y 4 los medios, luego en toda proporcion aritmética *la suma de los extremos &c.*

Paraque quede la demostracion dada con toda generalidad, pondremos una proporcion aritmética general, tal como $a.b:c.d$; la qual nos dará, por ser proporcion igualdad de razones, $a-b=c-d$, que trasladando (220 *cor.*) se convertirá en $a+d=c+b$; pero a y d son los extremos, c y b los medios, luego &c.

Si la proporcion fuese continua tal como $\div a.b.c$, tendríamos escribiéndola con extension: $a.b:b.c$ ó igualando las razones $a-b=b-c$;
que trasladando será $a+c=b+b=2b$; pero a y c son los extremos y b es el término medio, luego en toda proporcion aritmética continua la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

Hemos dicho que esta propiedad es fundamental, porque si quatro cantidades son tales que la suma de dos de ellas es igual con la suma de las otras dos, estas formarán proporcion; en la qual estarán formados los medios por los dos sumandos que forman un miembro, y los extremos por los otros dos sumandos.

En efecto, si suponemos que se tenga $a+d=c+b$, vamos á probar que entre estas quatro cantidades hay la proporcion $a.b:c.d$; porque si de ambos miembros de la equacion $a+d=c+b$ quitamos la suma de dos,

que cada una esté en un miembro, por exemplo, de d y de b, será: $a+d-b-d=c+b-b-d$, que hecha la destruccion queda en $a-b=c-d$; pero $a-b$ expresa la razon aritmética que tiene a con b, y $c-d$ la que c tiene con d; luego pues que tenemos igualadas estas dos razones, podemos poner la proporcion $a.b:c.d$.

263 En esta propiedad fundamental de la proporcion aritmética está fundada la resolucion de tres problemas.

1.º *Dados tres términos de una proporcion aritmética discreta encontrar el quarto*; para lo qual no hay mas que *sumar el segundo con el tercero, y de esto restar el primero*; por exemplo, si se nos pide hallar el quarto término de esta proporcion 5.9:12 diremos: 12 y 9 son 21; 21 menos 5 son 16, y el quarto término será 16; de manera que se tendrá 5.9:12.16.

La demostracion estriba en que si llamamos a, b, c á los tres términos dados y x al quarto, tendremos $a.b:c.x$;
pero debiendo ser la suma de los extremos igual á la de los medios, deberemos tener $a+x=b+c$, que (219) da $x=b+c-a$; cuya expresion traducida al lenguage vulgar da la regla.

El segundo problema se enuncia. *Dados dos términos hallar el tercero*: y quiere decir que en una proporcion continua se conoce el primer término y el término medio, y se pide el otro extremo: para encontrarle *se duplica el segundo, y de esto se resta el primero.* Por exemplo, si quisiera hallar un tercer término á 17 y á 24 diria: el duplo de 24 es 48; 48 menos 17 son 31, luego tendré ÷17.24.31.

Esto está fundado en que si se nos pidiese el tercer término correspondiente á estos dos a y b, llamándole x porque no le conocemos, se tendrá $\div a.b.x$; y como en una proporcion continua la suma de los extremos es igual al duplo del término medio, será: $a+x=2b$;
de donde (219) sale $x=2b-a$, que traduciendo da la regla expuesta.

Finalmente, el tercer problema es: *Dados dos términos hallar un medio proporcional aritmético*, que está reducido á encontrar el término medio de una proporcion continua; para lo qual se *sumarán los extremos y de la suma se tomará la mitad*; v. g., si se quisiese hallar un medio entre 7 y 29, sumaria el 7 con el 29, y de la suma 36 tomaria la mitad que es 18; y tendria ÷7.18.29.

Esto está fundado en que dándosenos los dos extremos a y b paraque encontremos el medio, le podremos llamar x y tendremos $\div a.x.b$;

de donde (§ 262) $a+b=2x$, y (§ 221) $x=\dfrac{a+b}{2}$,

que traduciendo este resultado al lenguage vulgar da la regla.

264 La propiedad fundamental de la proporcion geométrica es *que el producto de los extremos es igual al producto de los medios en la discreta, y al quadrado del término medio en la continua.*

Para demostrarlo desde luego con generalidad, supongamos que se tenga la proporcion geométrica $a:b::c:d$.

Como proporcion es lo mismo que igualdad de razones, y la razon geométrica se halla dividiendo el antecedente por el conseqüente, tendremos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

de donde quitando los divisores (223 *cor.*) resultará $ad=cb$; pero a y d son los extremos, c y b son los medios; luego *en toda proporcion geométrica discreta el producto de los extremos &c.*

Supongamos que se tenga ahora la continua $\div a:b:c$, que puesta con extension es $a:b::b:c$ y da $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; de donde quitando los divisores se sacará $ac=bb=b^2$; y como a y c son los extremos y b el medio, resulta que en toda proporcion continua *el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio.*

Hemos dicho que esta propiedad es fundamental, porque siempre que se tengan quatro cantidades tales que el producto de dos de ellas sea igual con el de las otras dos, estas cantidades formarán una proporcion, en que las dos que formen un producto esten por medios y las otras dos por extremos. En efecto, supongamos que se nos dé la equacion $ad=bc$; si dividimos ambos miembros por el producto bd de dos de ellas, con tal que ambas no se hallen en un mismo miembro, será: $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, ó simplificando $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

pero el primer miembro expresa la razon que tiene a con b, y el segundo la de c con d; luego, puesto que son iguales, podremos ponerlos en forma de proporcion de este modo: $a:b::c:d$ que es la primitiva.

Ocurre con mucha freqüencia el tener que poner en proporcion una equacion y al contrario; y así, segun Vieta, se podia decir que *proporcion era la que constituía la equacion, y equacion la resolucion de la proporcion.*

Para sacar una equacion de una proporcion, no hay que hacer mas que efectuar el producto de extremos é igualarle con el de los medios; y para poner en proporcion una equacion qualquiera, poner en los extremos todas las cantidades que formen un producto, y por medios las que formen el otro.

Propongámonos, por exemplo, descomponer en proporcion la equacion $6a^7b^2cd=35m^4e^5n^2$: con tal que por extremos pongamos todas las cantidades que forman el un miembro, y por medios las otras, de qualquier modo que los pongamos tendremos proporcion; y así, de esta equacion podremos deducir todas las proporciones que se ven en (A).

(1.ª) $6a^7:35m^4::e^5n^2:b^2cd$
(2.ª) $6a^7b^2:35m^4e^5::n^2:cd$
(3.ª) $6a^7b^2c:35m^4e^5n::n:d$ (A)
(4.ª) $3a^7:5m^4::7e^5n^2:2b^2cd$
y otras muchísimas.

263 La propiedad fundamental de la proporcion geométrica tambien conduce á la resolucion de tres problemas: 1.º *Dados tres términos de una proporcion hallar el quarto*; para lo qual *se multiplica el segundo por el tercero, y el producto se parte por el primero.* Así, si nos proponemos hallar el quarto término á estos tres 5, 7 y 15, multiplicaremos el 7 por el 15, y el producto 105 le dividiremos por 5, lo que nos dará 21; y tendremos que la proporcion completa será: 5:7::15:21.

Quando se va á buscar el quarto término se suele suponer que es igual con x, y luego se van indicando allí mismo las operaciones en esta forma:

$$5:7::15:x=\frac{7\times15}{5}=\frac{7\times3\times5}{5}=7\times3=21;$$

esto está fundado en que suponiendo que x sea el quarto término que se busca á los tres a,b,c, tendremos $a:b::c:x$,
que multiplicando extremos y medios da $ax=bc$,
ó dividiendo por a, $x=\frac{bc}{a}$,
que traduciendo este resultado al lenguage vulgar da la regla.

El 2.º problema es: *Dados dos términos hallar el tercero continuo proporcional*; para lo qual *se quadrará el segundo, y este quadrado se partirá por el primero*; de manera que si quisiéramos hallar el tercer término á estos dos 4 y 6, diríamos: el quadrado de 6 es 36; 36 dividido por 4 da 9; luego 9 es el tercer término pedido, y tendré ÷4:6:9.

Esto está fundado en que llamando en general a y b á los dos términos dados, y x al tercero que buscamos, deberemos tener ÷$a:b:x$, de donde (§264) $ax=b^2$, y dividiendo por a será $x=\frac{b^2}{a}$ que da la regla.

Finalmente, el 3.er problema está reducido á *encontrar un medio continuo proporcional á dos cantidades dadas*; para esto *se multiplican dichas dos cantidades, y del producto se extrae la raiz quadrada, la qual será el medio pedido*; de manera que si entre 3 y 27 quisiéramos encontrar un medio, multiplicaríamos el 3 por el 27, y del producto 81 extraeríamos la raiz quadrada, que es 9, y nos dará ÷3:9:27.

Quando no se pueda extraer la raiz quadrada, ó se dexará indicada ó se aproximará por decimales; de manera que si se nos pidiese hallar un medio entre 5 y 12, multiplicaríamos el 5 por el 12, y del producto 60 extraeríamos la raiz quadrada; pero como no la tiene exâcta la dexaríamos indicada de uno de estos modos: $\sqrt{60}=\sqrt{4\times15}=2\sqrt{15}$, ó nos aproxîmaríamos por decimales.

Esta regla está fundada en que llamando a y b á los extremos conocidos, y x al medio que busco, será ÷$a:x:b$,
de donde $x^2=ab$, y $x=\sqrt{ab}$ que da la regla expuesta.

Si el producto ab no es un número quadrado, no tendremos de nin-

gun modo un medio exâcto; y por consiguiente no hay un número que satisfaga á la condicion de ser un término medio, y de tener una relacion determinada con la unidad; por esta causa se ha llamado á los números incomensurables, números *irracionales.*

De las transformaciones que se pueden dar á una proporcion sin que dexe de subsistir proporcion, que es en lo que consistia la análisis de los antiguos.

266 Ya hemos visto la analogía que hay entre proporcion y equacion; y por esta causa los antiguos con el uso de las proporciones conseguian el efecto que nosotros conseguimos por el despejo de las incógnitas, que es mucho mas sencillo; pero no obstante conviene conocer en que consistia el artificio de los antiguos.

Con toda proporcion geométrica se pueden hacer seis cosas sin que dexe de subsistir proporcion, á saber: *alternar*, *invertir*, *componer*, *dividir*, *permutar* y *convertir.*

Alternar es *comparar antecedente con antecedente, y conseqüente con conseqüente, cuya operacion queda hecha con mudar de lugar los medios ó los extremos*; esto se puede hacer con toda proporcion, porque aunque se muden de lugar los medios ó los extremos, su producto siempre será el mismo; y por tanto permaneciendo el producto de los extremos igual con el de los medios, tendremos proporcion (264).

Invertir es *comparar conseqüente con antecedente en cada una de las razones, cuya operacion queda hecha con poner los medios en lugar de los extremos, y los extremos en lugar de los medios*; esto se puede hacer, porque no altera en nada el producto de los extremos ni el de los medios.

Si suponemos que se nos da la proporcion $a:b::c:d$, y la alternamos se tendrá $a:c::b:d$; y si esta la invertimos resultará $a:c::d:b$; si esta la volvemos á alternar y luego á invertir, tendremos que despues de ocho transformaciones nos resulta la proporcion primitiva como se ve en (A):

(1) $a:b::c:d$ proporcion primitiva
(2) $a:c::b:d$ 1.ª alternada
(3) $c:a::d:b$ 2.ª invertida
(4) $c:d::a:b$ 3.ª alternada
(5) $d:c::b:a$ 4.ª invertida (A)
(6) $d:b::c:a$ 5.ª alternada
(7) $b:d::a:c$ 6.ª invertida
(8) $b:a::d:c$ 7.ª alternada
(9) $a:b::c:d$ 8.ª invertida.

Componer es *comparar la suma de antecedente y conseqüente con uno de los dos*; esto es, ó con el antecedente ó con el conseqüente.

Para probar que se puede hacer esto con toda proporcion, supongamos la primitiva $a:b::c:d$; de donde sale $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ó añadiendo 1 á ambos miembros $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; ahora reduciendo el entero á la especie

del quebrado que le acompaña en ambos miembros, será $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;
que poniendo en proporcion da $a+b:b::c+d:d$ (10),
la qual traducida quiere decir que en toda proporcion *la suma de antecedente y conseqüente de la primera razon es al conseqüente, como la suma de antecedente y conseqüente de la segunda es á su conseqüente.*

Para demostrar que tambien se puede comparar con el antecedente, invertiremos la primitiva y nos dará $b:a::d:c$, de donde sale $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, y añadiéndole 1 tendremos $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$, que reduciendo el entero al quebrado que le acompaña, da $\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$, ó $b+a:a::d+c:c$ (11); que respecto de la primitiva manifiesta que tambien se puede comparar *la suma de antecedente y conseqüente con el antecedente.*

Dividir una proporcion es *comparar la diferencia de antecedente y conseqüente con uno de los dos en cada una de las razones*; esto es, ó bien con el antecedente ó bien con el conseqüente.

Para probar que esto se puede hacer en toda proporcion, elegiremos la $a:b::c:d$, que igualando las razones da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y quitando 1 de ambos miembros será $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,
que reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, dará $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, ó formando proporcion $a-b:b::c-d:d$ (12);
la qual manifiesta que *se puede comparar la diferencia de antecedente y conseqüente con el conseqüente.*

Para probar que tambien se puede hacer con el antecedente, la invertiremos y dará $b:a::d:c$ que da $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,
y quitando ambos miembros de la unidad ó restando esta equacion de la $1=1$, nos resultará $1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c}$ ó $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$,
ó poniendo en proporcion $a-b:a::c-d:c$ (13),
que manifiesta que tambien se puede comparar con el antecedente. Á todo esto podríamos aun darle mas generalidad, pues si á ambos miembros de la equacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ añadimos la cantidad $\pm n$, tendremos $\frac{a}{b}\pm n=\frac{c}{d}\pm n$, ó $\frac{a\pm bn}{b}=\frac{c\pm dn}{d}$, que puesta en proporcion da

$a\pm bn:b::c\pm dn:d$; y nos dice que tambien se puede comparar el antecedente despues de añadirle ó quitarle un número qualquiera de veces el conseqüente con el conseqüente.

Permutar es *mudar de lugar las razones, ó poner la segunda razon por primera y la primera por segunda.*

Para demostrar que esto se puede hacer con toda proporcion, basta recordar que proporcion es la igualdad de dos razones, y que subsistirá siempre la misma igualdad qualquiera que sea la razon que se ponga antes; ó si queremos desmostrarlo por cálculo no tenemos mas que alternar la primitiva, despues invertirla, y luego volverla á alternar, y resultará una proporcion permutada; así es, que la proporcion (4) está permutada respecto de la primitiva (1).

Convertir propiamente es *comparar el antecedente con la suma ó diferencia de antecedente y conseqüente*; quando se compara con la suma se llama *convertir componiendo*, y quando con la diferencia *convertir dividiendo.* Para manifestar que toda proporcion se puede convertir componiendo, no tenemos mas que invertir la (11) que nos dará

$$a:b+a::c:d+c \quad (14),$$

que comparada con la primitiva manifiesta lo que deseamos.

Invirtiendo la (13) tendremos $a:a-b::c:c-d$ (15), que comparada con la primitiva manifiesta que toda proporcion se puede convertir dividiendo.

Tambien se puede comparar el conseqüente con la suma de antecedente y conseqüente y con la diferencia; pues si invertimos las (10) y (12) tendremos $\left\{\begin{array}{l} b:a+b::d:c+d \ (16) \text{ y} \\ b:a-b::d:c-d \ (17), \end{array}\right\}$ que comparadas con la primitiva manifiestan la verdad de que se trata.

De aqui se deduce que podriamos decir en general que convertir es *invertir una proporcion compuesta ó dividida.*

267 Entendido esto, pasemos á demostrar algunas proposiciones que enunciaremos baxo el nombre de teoremas para fixar mas la atencion.

Teor. 1.º *Si los antecedentes de una proporcion son iguales tambien lo serán los conseqüentes, y si son iguales los conseqüentes tambien lo serán los antecedentes.*

Dem. Porque si en la proporcion $a:b::c:d$ multiplicamos extremos y medios tendremos $ad=bc$; que si suponemos $a=c$, podremos suprimirlas y quedará $d=b$; y si supusiéramos $d=b$, despues de suprimidas quedaria $a=c$, que era L. Q. D. D.

Teor. 2.º *Si dos proporciones tienen una razon comun con las otras dos razones tambien se podrá formar proporcion.*

Expl. Sean las dos proporciones $a:b::c:d$, y $a:b::m:n$, que tienen comun la razon $a:b$; digo que tambien se tendrá $c:d::m:n$.

Dem. Pues que proporcion es lo mismo que igualdad de razones, las

dos anteriores nos darán $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, y poniendo en esta segunda equacion en vez de $\frac{a}{b}$ su igual $\frac{c}{d}$ sacado de la primera, será $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, ó poniendo en forma de proporcion $c:d::m:n$ que es L.Q.D.D.

Cor. De aqui se deduce que *si dos proporciones tienen unos mismos antecedentes ó unos mismos conseqüentes, se podrá formar proporcion con los conseqüentes ó antecedentes*; porque alternadas tendrian una razon comun.

Teor. 3.º *Si dos proporciones tienen unos mismos extremos ó medios, con los otros podremos formar proporcion; pero de manera que los que estaban por medios ó extremos en las dadas, queden tambien formando extremos ó medios en la nueva.*

Ex. Si se tiene $a:b::c:d$ y $m:b::c:n$, se tendrá $m:a::d:n$ ó $a:m::n:d$.

Dem. Porque multiplicando extremos y medios en las proporciones primitivas, se tendrá $bc=ad$, y $bc=mn$; de donde resulta que $ad=mn$, que da $a:m::n:d$ ó $m:a::d:n$, que era L. Q. D. D.

Teor. 4.º *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la de conseqüentes como un antecedente es á su conseqüente.*

Dem. Sea la proporcion $a:b::c:d$, que alternada será $a:c::b:d$, y componiéndola dará $a+c:c::b+d:d$ ó alternada $a+c:b+d::c:d$ (18); pero a y c son los antecedentes de la primitiva, b y d los conseqüentes, c un antecedente y d su conseqüente; luego si traducimos esta proporcion al lenguage vulgar, tendremos la proporcion enunciada en el teorema.

Teor. 5.º *En toda proporcion geométrica la diferencia de antecedentes es á la diferencia de conseqüentes como un antecedente es á su conseqüente.*

Dem. Para demostrarlo elegiremos la misma proporcion $a:b::c:d$, que alternada da $a:c::b:d$, y dividiéndola tendremos $a-c:c::b-d:d$; que alternada da $a-c:b-d::c:d$ (19) que expresa L. Q. D. D.

Teor. 6.º *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la suma de conseqüentes como la diferencia de antecedentes es á la diferencia de conseqüentes.*

Dem. Para demostrar esto respecto de la misma proporcion $a:b::c:d$, solo observaremos que las proporciones (18) y (19) que se deducen de ella, tienen comun la razon $c:d$; y por lo mismo con las otras dos podremos formar proporcion y será $a+c:b+d::a-c:b-d$ (20), que expresa L. Q. D. D.

Teor. 7.º *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de conseqüentes es á su diferencia.*

Dem. Porque si alternamos la proporcion anterior (20), tendremos $a+c:a-c::b+d:b-d$ (21), que expresa L. Q. D. D.

Las proporciones (18), (19), (20) y (21) traducidas respecto de la $a:c::b:d$ que es la primitiva alternada, nos darian estos quatro teoremas. 1.° *La suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos últimos como un conseqüente es al otro*; 2.° *La diferencia de los dos primeros términos es á la diferencia de los dos últimos como un conseqüente es al otro*; 3.° *La suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos últimos como la diferencia de los dos primeros es á la diferencia de los dos últimos*; 4.° *La suma de los dos primeros términos es á su diferencia como la suma de los dos últimos es á su diferencia.*

De todo esto se deduce que una proporcion solo con alternarla é invertirla nos ha dado las ocho transformaciones que hemos puesto (266). Si alternásemos é invirtiésemos, del mismo modo que lo hemos hecho con la primitiva, la (10) que resulta de componerla comparando con el conseqüente, tendríamos otras ocho transformaciones. Si executásemos lo mismo con la (11) que resulta de componer la primitiva comparando con el antecedente, tendríamos otras ocho transformaciones. Haciendo lo mismo con la (12) que resulta de dividir comparando con el conseqüente, tendríamos otras ocho; tambien resultarian otras ocho de la (13) que resulta de dividir comparando con el antecedente; y finalmente executando lo mismo con la (20) que resulta de comparar la suma y la diferencia de antecedentes con la suma y diferencia de conseqüentes, tendríamos otras ocho; de manera que el número de transformaciones que se pueden dar á toda proporcion está representado por 6 veces 8 ó por 48.

Paraque se vean todas esta transformaciones las pondremos aqui respecto de una proporcion que la elegiremos numérica, porque todas las que hemos puesto antes han sido algebráicas; estas transformaciones se hallan en la siguiente

Tabla en que se contienen las 48 *formas que se pueden dar á la proporcion* 4:3::36:27.

De alternar é invertir la primitiva resultan las 8 siguientes.

(1) 4:3::36:27
(2) 4:36::3:27
(3) 36:4::27:3
(4) 36:27::4:3
(5) 27:36::3:4
(6) 27:3::36:4
(7) 3:27::4:36
(8) 3:4::27:36

De alternar é invertir la primitiva compuesta comparando con el conseqüente estas ocho.

(9) 4+3:3::36+27:27
(10) 4+3:36+27::3:27
(11) 36+27:4+3::27:3
(12) 36+27:27::4+3:3
(13) 27:36+27::3:4+3
(14) 27:3::36+27:4+3
(15) 3:27::4+3:36+27
(16) 3:4+3::27:36+27

De alternar é invertir la primitiva compuesta comparando con el antecedente estas ocho.

(17) $4+3:4::36+27:36$
(18) $4+3:36+27::4:36$
(19) $36+27:4+3::36:4$
(20) $36+27:36::4+3:4$
(21) $36:36+27::4:4+3$
(22) $36:4::36+27:4+3$
(23) $4:36::4+3:36+27$
(24) $4:4+3::36:36+27$

De alternar é invertir la primitiva dividida comparando con el conseqüente estas ocho.

(25) $4-3:3::36-27:27$
(26) $4-3:36-27::3:27$
(27) $36-27:4-3::27:3$
(28) $36-27:27::4-3:3$
(29) $27:36-27::3:4-3$
(30) $27:3::36-27:4-3$
(31) $3:27::4-3:36-27$
(32) $3:4-3::27:36-27$

De alternar é invertir la primitiva dividida comparando con el antecedente estas ocho.

(33) $4-3:4::36-27:36$
(34) $4-3:36-27::4:36$
(35) $36-27:4-3::36:4$
(36) $36-27:36::4-3:4$
(37) $36:36-27::4:4-3$
(38) $36:4::36-27:4-3$
(39) $4:36::4-3:36-27$
(40) $4:4-3::36:36-27$

Y finalmente de alternar é invertir la que resulta de comparar la suma y diferencia de antecedentes con la suma y diferencia de conseqüentes, estas ocho.

(41) $4+36:4-36::3+27:3-27$
(42) $4+36:3+27::4-36:3-27$
(43) $3+27:4+36::3-27:4-36$
(44) $3+27:3-27::4+36:4-36$
(45) $3-27:3+27::4-36:4+36$
(46) $3-27:4-36::3+27:4+36$
(47) $4-36:3-27::4+36:3+27$
(48) $4-36:4+36::3-27:3+27$

Y estas son las 48 transformaciones que se pueden dar á toda proporcion geométrica.

Teor. 8.º *Si quatro cantidades estan en proporcion la suma de la mayor y menor es mayor que la suma de las otras dos.*

Dem. Supongamos que la proporcion sea $8:4::6:3$;
por el teorema quinto tenemos $8-6:4-3::8:4$;
pero $8>4$, luego $8-6>4-3$; y si á estas cantidades que son desiguales les añadimos una misma cantidad, á saber, la suma $6+3$ de los conseqüentes será : $8-6+6+3>4-3+6+3$,
que despues de hecha la destruccion queda $8+3>6+4$; L. Q. D. D.

268 Si tubiésemos tres ó mas razones iguales como $3:6;4:8;15:30$,&c. entonces se escriben de este modo : $3:6::4:8::15:30::$&c.
ó se escriben abreviadamente así : $3:4:15:$&c$::6:8:30:$&c. ;
á un conjunto de razones de esta especie se le caracteriza con el nombre de *serie de razones iguales*; y vamos á probar que en toda serie de razones iguales se verifican las mismas cosas que en una proporcion, que es una serie de dos razones iguales.

Teor. 1.° *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los conseqüentes como un antecedente es á su conseqüente.*

Dem. Sea v. g. esta la serie de razones iguales $a:b::c:d::m:n::$&c.
y tendremos, tomando las dos primeras, la proporcion $a:b::c:d$,
que (267 teor. 4.°) nos dará $a+c:b+d::c:d$,
ó poniendo en vez de la razon $c:d$ su igual $m:n$ por el supuesto, será

$$a+c:b+d::m:n;$$

que por el mismo teorema nos dará $a+c+m:b+d+n::m:n\ (\alpha)$
que expresa la condicion enunciada.

Si hubiese mas razones iguales, en vez de la última $m:n$ substituiríamos otra; y continuando del mismo modo lo tendríamos demostrado respecto de quantas razònes se tubiesen.

Teor. 2.° *En toda serie de razones iguales la diferencia de antecedentes es á la diferencia de conseqüentes como un antecedente es á su conseqüente.*

Dem. Supongamos la misma serie $a:b::c:d::m:n::$&c,
y tomando las dos primeras tendremos la proporcion $a:b::c:d$:
la qual (267 teor. 5.°) nos dará $a-c:b-d::c:d$;
ó poniendo en vez de $c:d$ su igual $m:n$ tendremos $a-c:b-d::m:n$;
que en virtud del mismo teorema dará $a-c-m:b-d-n::m:n\ (\beta)$,
que expresa la condicion enunciada.

Teor. 3.° *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los conseqüentes como la diferencia de antecedentes es á la de conseqüentes.*

Dem. Como las proporciones (α), (β), tienen comnn la razon $m:n$, con las otras dos formaremos proporcion y tendremos
$a+c+m:b+d+n::a-c-m:b-d-n\ (\gamma)$ que expresa L. Q. D. D.

Teor. 4.° *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de conseqüentes es á la suya.*

Dem. Porque si alternamos la proporcion anterior tendremos
$a+c+m:a-c-m::b+d+n:b-d-n\ (\delta)$ que expresa L. Q. D. D.

Teor. 5.° *En toda serie de razones iguales la relacion que tenga un antecedente con la suma de los otros, esa misma tendrá el conseqüente correspondiente con la suma de los demas.*

Dem. Sea la serie de razones iguales $a:b::c:d::m:n::p:q::r:s::$&c;
y si consideramos que dicha serie empieza desde la segunda razon tendremos (teor. 1.°) $c+m+p+r+$&c$:d+n+q+s+$&c$::c:d$;
pero si en vez de la razon $c:d$ ponemos su igual $a:b$, tendremos

$$c+m+p+r+\&c:d+n+q+s+\&c::a:b;$$

la qual permutada y alternada se convierte en
$a:c+m+p+r+$&c$::b:d+n+q+s+$&c. (ε) que era L. Q. D. D.

269 *Cor.* De aqui resulta que *si el primer antecedente es igual con la suma de los demas, el primer conseqüente tambien será igual con la suma*

de los demas conseqüentes; porque si en esta proporcion suponemos $a=c+m+p+\&c.$, la primera razon será de igualdad, y por lo mismo lo deberá ser la segunda, pues de otro modo no habria proporcion; luego tendremos $b=d+n+q+\&c.$

270 Quando se multiplican dos ó mas razones entre sí, el producto que resulta se llama *razon compuesta*; quando las razones componentes son dos é iguales, la razon que resulta se llama *duplicada*, y el exponente de la razon equivale al quadrado del exponente de qualquiera de las primitivas. Quando son tres é iguales se llama *triplicada*, y el exponente de su razon es el cubo del de qualquiera de las componentes. Quando son quatro é iguales se llama *quadruplicada*; y así sucesivamente.

No se debe confundir razon *dupla* con razon *duplicada*; *tripla* con *triplicada*, &c. De una razon se dice que es *dupla* de otra quando su exponente es duplo del de ella, y se dice que es duplicada quando es su quadrado; *tripla* quando su exponente es triplo del de la otra, y *triplicada* quando es el cubo.

Como las razones no son otra cosa que un quebrado, cuyo numerador es el antecedente y el denominador el conseqüente, resulta que para multiplicar entre sí dos ó mas razones, se multiplican ordenadamente los antecedentes por los antecedentes, y los conseqüentes por los conseqüentes. Por exemplo: si tenemos las tres razones 3:5; 20:30; 8:4 para multiplicarlas, diremos: 3 por 20 son 60; 60 por 8 son 480; 5 por 30 son 150; 150 por 4 son 600; luego la razon compuesta es 480:600, ó despues de simplificada dividiendo por 10 (lo que se consigue borrando un cero) será 48:60, ó 24:30, ó 12:15, ó 4:5.

Para evitar el que resulten los términos demasiado complicados se hace la simplificacion, indicando la razon compuesta por la multiplicacion de sus términos; de manera que la anterior será $3\times20\times8:5\times30\times4$,
ó descomponiendo en factores ~~3~~.~~4~~.~~5~~.~~2~~.4:~~5~~.5.~~3~~.~~2~~.~~4~~,
que despues de suprimir los factores comunes queda como antes 4:5.

Aun se hace con mas prontitud poniendo las razones unas debaxo de otras, y viendo la supresion que se puede hacer de los factores de sus términos en esta forma:

~~3~~:~~5~~
5
~~10~~
~~20~~:~~30~~
4
~~8~~:~~4~~

Aqui observamos desde luego que el 20 antecedente de la segunda equivale á 5×4, luego le podremos suprimir con el 5 y el 4 de los conseqüentes de las otras; ahora veo que el 30 es lo mismo que 3×10, luego podré suprimir el 3 con el 3, y quedará el 10; que para saber lo que me queda tacho el 30 y pongo á su lado, encima ó donde me quepa, el 10; y como el 8 y el 10 que quedan tienen aun de comun el factor 2, despues de suprimido, queda por último la razon 4:5 como antes.

Cor. De aqui se deduce que *en una razon compuesta se puede substituir en vez de una de las razones componentes qualquiera otra que le sea igual*; porque si tenemos la razon $3\times5:6\times20$ la podremos poner baxo

este aspecto $\frac{3}{6}\times\frac{5}{20}$; y en vez de $\frac{5}{20}$ podremos poner $\frac{1}{4}$, $\frac{10}{40}$, $\frac{20}{80}$, &c. que le son iguales, y será $\frac{3}{6}\times\frac{5}{20}=\frac{3}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{6}\times\frac{10}{40}=\frac{3}{6}\times\frac{20}{80}=$&c.,
ó $3\times5:6\times20=3\times1:6\times4=3\times10:6\times40=3\times20:6\times80=$&c.
ó poniendo los quatro puntos en vez del signo $=$, será:

$$3\times5:6\times20::3\times1:6\times4::3\times10:6\times40::3\times20:6\times80::\text{\&c.}$$

271 Como proporcion es lo mismo que igualdad de razones, resulta que *podremos multiplicar entre sí ordenadamente* (esto es, antecedente por antecedente y conseqüente por conseqüente) *dos ó mas proporciones, de manera que los resultados formen proporcion*; porque esto equivale á multiplicar entre sí dos equaciones, en cuyo caso el producto es una equacion. Luego tambien podremos multiplicar una proporcion por ella misma; y como en este caso nos resultarán los quadrados de los términos de la proporcion primitiva, tenemos que *si quatro cantidades estan en proporcion tambien lo estarán sus quadrados*; y por la misma razon tambien lo estarán los cubos, y en general una potencia qualquiera; y tambien se verifica la inversa, á saber, *que si quatro cantidades estan en proporcion tambien lo estarán sus raices de qualquier grado que sean.* A esto tambien conduciria la proporcion primitiva $a:b::c:d$, poniéndola baxo la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; porque elevando ambos miembros de esta equacion á la potencia n, será $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$ que da $a^n:b^n::c^n:d^n$; y extrayendo la raiz n de la misma equacion será

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}} \text{ ó } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} \text{ que da } \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}.$$

Quando ocurra multiplicar entre sí dos ó mas proporciones convendrá, para hallar desde luego la proporcion compuesta mas sencilla, el executar dicha multiplicacion como hemos dicho de las razones; para lo qual observaremos que un factor qualquiera que se halle en un extremo se puede suprimir con uno qualquiera de los medios; pero jamas lo puede hacer un factor de un medio con otro del medio, ni uno de un extremo con otro del otro extremo.

Esto está fundado en que no alterándose una razon geométrica quando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número, resulta que podremos multiplicar ó dividir los dos primeros términos ó los dos últimos de una proporcion sin que dexe de subsistir proporcion; y como si la alternásemos quedarian los antecedentes de la primitiva formando la primera razon de esta, y sus conseqüentes la segunda, resulta que en general se pueden multiplicar ó dividir por una misma cantidad, sin que dexe de subsistir proporcion, no solo los dos primeros términos ó los

dos últimos: sino tambien el primero y el tercero que son los antecedentes, ó el segundo y el quarto que son los conseqüentes.

Entendido esto, para multiplicar entre sí las tres proporciones

$$15:56::30:112,\quad 16:10::8:5,\quad y\quad 14:12::7:6$$

```
 3    8           2
15 : 56 :: 30 : 112
          2
16 : 10 :: 8 : 5
 2    2
14 : 12 :: 7 : 6
------------------
 1 :  2 :: 1 : 2
```

Las colocaremos como aqui se presenta: lo primero que observamos es que un 5 del 15 puede suprimir un 5 del 10, y quedará del uno un 3, y del otro un 2; el 56 equivaliendo á 7×8, observaremos que el 7 quedará suprimido con el 7 del 14, y por lo mismo quedará del primero un 8 y del segundo un 2; ahora, como el 16 es lo mismo que 8×2, le suprimiremos con el 8 que quedó del 56, y con el 2 del 10; ahora, el 12 equivaliendo á 2×6, y el 6 siendo lo mismo que 2×3, podremos suprimir este 6 con el 2 del 14 y el 3 del 15; de manera que la primera razon queda reducida á $1:2$; porque aunque todos los antecedentes se han suprimido queda siempre la unidad, como quando se hace la simplificacion de los quebrados.

Ahora, para la segunda razon vemos en primer lugar que el 30 se puede suprimir con el 5 y con el 6; el 112 siendo duplo de 56, y $56=7\times8$, podremos suprimir el 8 y el 7 con el 56 del 112, y quedará solamente 2 del 112, y la segunda razon quedará reducida tambien á $1:2$.

De manera que la proporcion compuesta que resulta es $1:2::1:2$; pero como el objeto que se suele llevar al executar una de estas multiplicaciones es el poner la mas sencilla, resulta que aun podremos simplificar esta dividiendo los conseqüentes por 2, y quedará $1:1::1:1$ que es la proporcion mas sencilla de todas; á la qual podríamos haber llegado directamente borrando el 2 que quedaba del primer medio con el 2 que quedaba del segundo extremo.

272 Antes de concluir el asunto de las proporciones diremos algo acerca de las *desproporciones y desigualdades*.

A la igualdad de dos razones la hemos llamado proporcion, y la analogía nos conduce á llamar *desproporcion* á la desigualdad de dos razones; y así, pues que $\frac{12}{4}=3$, y $\frac{6}{3}=2$, y $3>2$, tendremos $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$, ó poniendo estos quebrados en forma de razon será $12:4>6:3$. Con esta expresion á que hemos dado el nombre de desproporcion, se pueden hacer cosas análogas á las que se hacen con las proporciones; así es, que se podrán alternar, porque en la expresion $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$ permanecerá aun desigualdad, aunque se multipliquen ambos miembros por una misma cantidad tal como $\frac{4}{6}$, y será $\frac{12}{4}\times\frac{4}{6}>\frac{6}{3}\times\frac{4}{6}$ ó $\frac{12}{6}>\frac{4}{3}$, ó $12:6>4:3$, que es la primitiva alternada. Tambien se puede invertir; pero en este caso es necesario invertir ó trastornar tambien el signo $>$; porque siendo $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$, si dividimos la unidad por estas dos cantidades tendremos (§91)

$\frac{1}{\frac{12}{4}} < \frac{1}{\frac{6}{3}}$, ó en virtud de lo dicho (§123) $\frac{4}{12} < \frac{3}{6}$, que da $4:12 < 3:6$.

Tambien se puede componer, pues si añadimos la unidad á ambas cantidades de la expresion $\frac{12}{4} > \frac{6}{3}$

será $\frac{12}{4} + 1 > \frac{6}{3} + 1$ que da $\frac{12+4}{4} > \frac{6+3}{3}$ ó $12+4:4 > 6+3:3$.

Del mismo modo demostraríamos las otras propiedades, y que en toda desproporcion hay desigualdad entre el producto de los extremos y el de los medios.

Á las expresiones en que entra el signo $>$ ó el signo $<$ las deberíamos llamar *desequaciones* por analogía; pero les daremos el nombre de *desigualdades* porque es expresion mas castellana, y observaremos que con estas desigualdades podemos hacer lo mismo que con las equaciones; y así, podemos añadir, quitar, multiplicar y dividir ambos miembros por una misma cantidad. Tambien se pueden multiplicar y sumar entre sí dos desigualdades permaneciendo desigualdad, con tal que se sumen ó multipliquen ordenadamente, esto es, que se sumen ó multipliquen los miembros mayores entre sí, y los menores entre sí. Porque si eran desiguales quando se sumaban ó multiplicaban por iguales, quando la mayor se sume ó se multiplique por la mayor con mas razon permanecerán desiguales.

No sucede así con la resta; pues aqui solo permanecerá en general desigualdad, quando de la mayor se reste la menor, porque la resta en este caso será mayor que lo que seria quando se restasen iguales; y como la division es análoga con la resta, sucederá lo mismo con esta operacion.

273 Tampoco podemos dexar de decir algo acerca de la *proporcion armónica*, para lo qual remontaremos á su orígen del modo siguiente.

Se sabe que mientras mas vibraciones hace una cuerda en un tiempo dado, por exemplo en un segundo, mas *agudo* es el sonido que tiene esta cuerda; que al contrario el sonido que tiene una cuerda es tanto mas *grave*, quantas menos vibraciones hace en un segundo. Á esto añadiremos que las cuerdas que dan los sonidos recibidos en música, hacen en un segundo números de vibraciones cuyas relaciones son muy simples: que en particular dos cuerdas á la *octava* la una de la otra hacen en un segundo números de vibraciones que estan en la relacion de 1 es á 2; que dos cuerdas á la *quinta* la una de la otra hacen en un segundo números de vibraciones que estan en la relacion de 2:3; y que cuerdas á la *tercera* la una de la otra hacen en un segundo números de vibraciones que estan en la relacion de 4:5. En fin, es un hecho el que los músicos han dado el nombre de *armonía perfecta* á la que hacen quatro cuerdas en que las tres últimas estén respectivamente á la tercera, á la quinta y á la octava de la primera; ó de otro modo: los músicos han dado el nombre de *armo-*

nía perfecta á la que resulta de quatro cuerdas que hacen en un segundo números de vibraciones proporcionales á 4, 5, 6, 8.

Esto supuesto, los matemáticos han observado aun que estos números 4, 5, 6 y 8, eran tales que el *primero tenia con el quarto la misma relacion que la diferencia de los dos primeros con la diferencia de los dos últimos*; es decir, que han observado que 4:8 :: 5—4:8—6 :: 1 : 2, sobre lo qual generalizando la idea tomada de su observacion han establecido que habria proporcion armónica entre quatro números siempre que *el primero fuese al quarto como la diferencia de los dos primeros á la de los dos últimos*; y tambien advirtieron que habria *contrarmonía* entre quatro números, de los quales *el último era al primero como la diferencia de los dos primeros á la diferencia de los dos últimos*. De manera que quando a, b, c, d, son tales que $a:d::a-b:c-d$, se dice que estan en *proporcion armónica*; y que estan en *proporcion contrarmónica*, quando $d:a::a-b:c-d$; y de estas nociones han pasado á las de *proporcion armónica continua*, *proporcion contrarmónica continua*, *progresion armónica*, y *progresion contrarmónica*.

Se verifica la proporcion armónica continua entre tres términos, de los quales *el primero es al tercero como la diferencia entre el primero y segundo es á la diferencia entre el segundo y tercero*; por exemplo: a, b, c estan en proporcion armónica continua quando $a:c::a-b:b-c$. *La proporcion contrarmónica continua* tiene lugar quando a, b, c, son tres números tales que $c:a::a-b:b-c$. La progresion armónica es un conjunto de términos de los quales tres qualesquiera, tomados á continuacion los unos de los otros, estan en proporcion armónica continua. La progresion contrarmónica es un conjunto de términos de los quales tres qualesquiera, tomados á continuacion los unos de los otros, estan en proporcion contrarmónica continua.

Entendidas ya estas denominaciones pasaremos á resolver con relacion á la proporcion armónica los mismos problemas que se han resuelto acerca de las otras proporciones.

Sean a, b, c, los tres primeros términos de una proporcion armónica; si queremos hallar el quarto le llamaremos x y tendremos $a:x::a-b:c-x$; de donde (264) sale $a(c-x)=x(a-b)$ ó $ac-ax=ax-bx$ ó $2ax-bx=ac$, que da $x=\frac{ac}{2a-b}$; de modo que a, b, c y $\frac{ac}{2a-b}$, son los quatro términos proporcionales armónicos.

Sean a y c los dos términos extremos de una proporcion armónica continua, si queremos hallar el medio le llamaremos x, y tendremos $a:c::a-x:x-c$, de donde $a(x-c)=c(a-x)$ ó $ax-ac=ca-cx$, que da $ax+cx=2ca$, y $x=\frac{2ca}{a+c}$.

En fin, si fuesen a y b los dos primeros términos de una proporcion armónica continua y se pidiese el tercero, llamándole x seria $a:x::a-b:b-x$, de donde $a(b-x)=x(a-b)$, ó $ab-ax=ax-bx$ que da $2ax-bx=ab$, y $x=\frac{ab}{2a-b}$.

De la regla de tres y de otras que dependen de ella, como la conjunta, la de compañía, de aligacion &c.

274 Hemos dicho (266) que la teoría de las proporciones eran los recursos de que se valian los antiguos para suplir la falta de la análisis. Así es, que hicieron de dicha teoría varias aplicaciones interesantes; una de las mas trascendentes es la que se conoce con el nombre de *regla de tres*, á que algunos han llamado *regla de oro* y vamos á manifestar.

Regla de tres es la *que enseña á determinar los efectos por medio de las causas ó las causas por medio de los efectos* (*), *quando se conoce el enlace ó dependencia que tienen entre sí.*

La regla de tres puede ser de dos modos: *simple* y *compuesta*; la simple es aquella en que para determinar el efecto ó la causa que se busca, solo se necesita atender á una circunstancia; y compuesta es aquella en que se necesita atender á dos ó mas circunstancias.

La regla de tres simple se subdivide ó puede ser de otros dos modos: *directa* é *inversa*; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, ó la causa de que proviene un efecto, quando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie. Paraque se vea bien la diferencia que hay entre las reglas de tres nos valdremos de estos exemplos.

1°. *Sé que 15 pares de mulas han conducido de la era en un dia 60 cahices de trigo; si quiero averiguar quántos cahices podrán traer 45 pares de mulas en el mismo tiempo, esto es, en un dia*: tengo aqui una regla de tres que es simple, porque el número de cahices que busco solo depende de una circunstancia, á saber, del número de pares de mulas que los han de traer; ademas es directa porque trato de averiguar los

(*) *Quando se ve que una cosa es capaz de producir otra, á la que produce se le llama* causa *y á la producida* efecto. *Por exemplo: desde que vemos que la cera se derrite constantemente por la aplicacion de cierto grado de calor, damos al calor el nombre de causa, y al derretirse la cera el nombre de efecto; quando un labrador siembra trigo y coge, el trigo que siembra es la causa que produce el trigo que coge, el qual es el efecto.*

cahices, esto es, el efecto que han de producir los 45 pares de mulas, que son la causa, por medio del conocimiento que tengo del que han producido en las mismas circunstancias 15 pares de mulas. Tambien seria simple y directa la regla de tres si viniese propuesta en estos términos: *sé que 15 pares de mulas han traido de la era en un dia 60 cahices de trigo; para traer en el mismo tiempo 180 cahices, quántos pares de mulas se necesitarán?* Porque aqui se trata de averiguar la causa, esto es, los pares de mulas que se necesitan para traer los 180 cahices que son el efecto, por medio del efecto conocido 60 cahices que han conducido los 15 pares de mulas.

2°. exemplo: *Sé que 15 pares de mulas han trasportado de la era en 6 dias 60 cahices de trigo; si quiero averiguar quántos pares de mulas se necesitarán para trasportar los mismos 60 cahices en 10 dias*: esta regla de tres será inversa, porque aqui tengo un mismo efecto que es 60 cahices, para cuya produccion han concurrido dos causas, los 15 pares de mulas y los 6 dias que han trabajado; ahora trato de determinar una de las causas, á saber, el número de pares de mulas que junta con la otra, es decir, con los 10 dias en que han de trabajar, ha de producir el mismo efecto de traer los 60 cahices de la era.

3.er exemplo: *Sé que 15 pares de mulas han trasportado de la era en 5 dias 60 cahices de trigo; si quiero averiguar los cahices que trasportarán 45 pares de mulas en 12 dias*: esta regla de tres será compuesta, porque el número de cahices que busco depende de dos circunstancias, á saber, de los 45 pares de mulas que se han de emplear, y de los dias que han de estar trabajando.

275 Toda qüestion que conduce á una regla de tres ha de constar de dos partes, á saber, del *supuesto* y la *pregunta*; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto, y en la pregunta la causa ó efecto que se da para determinar el efecto ó causa que se busca.

En toda regla de tres simple entran tres cantidades conocidas: dos del supuesto, y una de la pregunta; como esta ha de ser de la misma especie que una de las del supuesto, á las dos cantidades que son de una misma especie se les da el nombre de *principales*: la otra y la que se busca se llaman *relativas*; pero como de las relativas solo se conoce una, se llama cantidad *principal y su relativa* por excelencia á las dos del supuesto, siendo la principal aquella que es de la misma especie que la de la pregunta. Por exemplo: quando quiero averiguar los cahices que trasportan 45 pares de mulas en el supuesto de que 15 hayan trasportado 60 cahices, las dos cantidades principales son los 15 pares de mulas y los 45; las relativas son los 60 cahices y los cahices que busco; y las que se llaman por excelencia cantidad principal y su relativa son los 15 pares de mulas y los 60 cahices, siendo la principal los 15 pares de mulas que es la de la misma especie que la de la pregunta.

276 Toda la dificultad en la resolucion de la regla de tres consiste en

plantearlá; porque despues de planteada todo está en hallar el quarto término de una proporcion geométrica. Así, debemos indagar si se puede hallar *á priori* alguna regla que en la práctica nos pueda conducir á dicho planteo sin equivocar la qüestion, que es lo que suele suceder mayormente quando la regla de tres es inversa.

Supongamos ante todas cosas que la regla de tres sea directa, y que se pide el efecto que producirá la cantidad c sujeta á las mismas circunstancias en que la cantidad a ha producido el efecto b; como nosotros no conocemos este efecto que buscamos, le llamaremos x, y tendremos que siendo b el efecto que ha producido la cantidad a, $\frac{b}{a}$ será el efecto que habrá producido cada unidad de las que contenga a; y como c debe ser de la misma especie que a, y está sujeta á las mismas leyes, por cada unidad que contenga producirá $\frac{b}{a}$; luego toda la cantidad c producirá tantas veces el efecto $\frac{b}{a}$ como unidades haya en c; luego el efecto de c estará representado por $\frac{b}{a}\times c$, y por lo mismo será $x=\frac{b}{a}\times c=\frac{bc}{a}$, que quitando el divisor da $ax=bc$,
ó poniendo en proporcion será $a:b::c:x$ ó $a:c:b:x$.

Luego en general *para plantear una regla de tres directa se deberá poner por primer término la cantidad principal del supuesto, despues qualquiera de las otras dos, á saber, la relativa del supuesto ó la principal de la pregunta, despues la otra, y el quarto término de la proporcion será lo que se busca; que para encontrarle no hay mas que multiplicar el segundo por el tercero, y partir esto por el primero* (*).

Entendido esto, pasaremos á resolver algunos exemplos. 1.° *Se sabe que* 300 *soldados han abierto en un tiempo qualquiera* 1200 *varas de trinchera, para abrir* 6000 *varas en el mismo tiempo quántos soldados se necesitarán?* Aqui la cantidad principal y su relativa son 1200 varas y 300 soldados, luego plantearemos la qüestion del modo siguiente:

$$1200^{v}:6000^{v}::300^{s}:x=\frac{300\times6000}{1200}=\frac{300\times5\times12}{12}=300\times5=1500,$$

y saco que se necesitan poner á trabajar 1500 hombres.

(*) *En el mismo tiempo de la revolucion francesa fue quando esta nacion puso mas conato en el adelantamiento de las ciencias, y los sabios mas célebres no se desdeñaron de enseñarlas; por esta causa Lagrange y Laplace no tubieron inconveniente en explicar la Aritmética y Geometría; pero como explicaban para sugetos que ya tenian conocimientos, se detenian solo en la parte mas sublime; por lo que Lagrange, hablando de*

2.° *Un sugeto desea saber lo que le producirán 86235 r.s que va á imponer en un fondo al 5 por 100.* Aqui la cantidad principal del supuesto es 100, porque la qüestion quiere decir que 100 reales le dan de rédito al año 5 reales; y así, la operacion se executará como aqui se ve: 100 rs. 5 : rs. : : 86235rs. : 4311,75 rs. = 4311 rs. y 25,5 mrs.

3.° *Un sugeto quiere averiguar el capital que le produce 42321 rs. al tres por 100.* Aqui la cantidad principal del supuesto es 3; y así, executando la operacion sacaré que el capital que tiene en el fondo es 1410700 rs.

4.° *Sé que 1728 varas de Aragon equivalen á 1597 españolas; si quiero averiguar las varas españolas que componen 5000 aragonesas, executaré la operacion como aqui se ve:*

1728 vs. ar. : 1597 esp. : : 5000 ar. : 4620,949 esp.

5.° *En una fuente que tiene tres caños, se sabe que uno solo llena el pilon en 3 horas, otro solo en 12, y otro en 15; se pregunta en quánto tiempo le llenarán corriendo los tres juntos?*

Llamando x al tiempo que buscamos tendremos que el caño que le llenaba en tres horas llenará $\frac{1}{3}$ del pilon en una hora; por lo qual diremos: si en una hora llena $\frac{1}{3}$ del pilon que consideraremos como la unidad, en x horas quánto llenará? y hallaremos $\frac{1}{3}x$.

Por la misma razon el que le llenaba en 12 horas llenará $\frac{1}{12}x$, y el otro $\frac{1}{15}x$; luego tendremos $\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{15}x=1$, que quitando los divisores da (§ 232) $20x+5x+4x=60$ ó $29x=60$, que da $x=\frac{60}{29}=2\frac{2}{29}$ horas.

Hay una qüestion que se resuelve por regla de tres, que suele costar algun trabajo á los principiantes, y que resolveremos aqui con la mira de deducir una regla sumamente sencilla para la práctica.

Esta qüestion es la siguiente: *Sabiendo que la manecilla de un relox*

---

la regla de tres, *dice que* no presenta ninguna dificultad para los que hayan adquirido el espíritu analítico; *cuya proposicion ha pasado á algunos libros elementales sin tener presente que el objeto de esta clase de obras es el que los principiantes adquieran dicho espíritu; y los que mejor tratan esta materia se reducen á decir: que despues de conocidos los dos términos de cada especie, se exâmine si el término desconocido ha de ser mayor ó menor que el correspondiente de su especie, y se diga (en el caso de ser mayor)*

el término menor de la primera especie
es al mayor de la misma
como el menor de la segunda
es al mayor de esta otra.

Donde se ve que para hacer dicho exâmen se necesita poseer ó tener un espíritu del que no todos estan dotados; y por lo mismo nuestra regla que no exige mas que el conocimiento de las cantidades de una misma especie para plantear inmediatamente la proporcion, está mas al alcance de los principiantes.

está entre una hora dada, hallar qué hora será quando la manecilla de los minutos está sobre la de las horas.

Para resolver esta qüestion basta observar que la manecilla de los minutos da una vuelta entera, mientras que la de las horas anda el espacio de una hora, que es la dozava parte de toda la vuelta; y así, si llamamos a la hora dada y x la parte que ha andado la manecilla que señala las horas desde que se hallaba en la hora menor, tendremos que $a+x$ será lo que habrá andado en el mismo tiempo la manecilla de los minutos; y así, estableceremos la siguiente proporcion $12:1::a+x:x$;

la qual dividida da $12-1:1::a+x-x:x=\frac{a}{11}$;

la qual expresion nos dice que *á la hora menor se deben añadir tantos 11 avos como unidades tiene a*; de manera que si la manecilla que señala las horas se halla entre las 7 y las 8, se encontrarian á las $7\frac{7}{11}$, que reduciendo á minutos da $38\frac{2}{11}$ de minuto.

277 Supongamos que la regla de tres sea inversa, y que se sepa que las dos cantidades a y b, consideradas como causas, han producido otra cantidad K que consideraremos como efecto; y que se busque la causa B de la misma especie que b, la qual junta con la dada A de la misma especie que a, han de producir el mismo efecto K.

Si la causa a obrase sola y produxese el efecto K, cada unidad de a obraria un efecto $\frac{K}{a}$; pero como no solo obra la unidad de a sino que obra al mismo tiempo la causa b, resulta que el efecto de cada unidad de a que acabamos de señalar, será tantas veces mayor como exprese el valor de b; luego para tener lo que produce cada unidad de a sola deberemos dividir $\frac{K}{a}$ por b, y será dicho efecto $=\frac{K}{ab}$. Ahora, por la misma razon será $\frac{K}{AB}$ el efecto que produzca cada unidad de A; pero como a y A son de una misma especie, los efectos que produzca cada una de sus unidades serán los mismos; y tendremos que $\frac{K}{ab}=\frac{K}{AB}$, ó quitando los divisores $ABK=abK$, ó dividiendo por K será $AB=ab$, que da (§ 264) $A:a::b:B$; luego en la regla de tres inversa *se ha de escribir por primer antecedente la cantidad principal de la pregunta, y por medios la cantidad principal y relativa del supuesto; despues se multiplican los medios, se parte por el extremo, y el resultado es la causa que se busca.*

Puesto que los medios estan representados por las dos cantidades del supuesto, resulta que podemos resolverla sin necesidad de escribir la proporcion, multiplicando desde luego las dos cantidades del supuesto y partiendo el producto por la de la pregunta. Por exemplo: *si quiero*

averiguar los pares de mulas que se necesitan para trasportar en 10 *dias el mismo trigo* (*por exemplo* 60 *cahices*) *que han trasportado* 15 *pares de mulas en* 6 *dias*; multiplicaré los dos números del supuesto 15 y 6, y dividiré el producto 90 por el número de la pregunta, y sacaré que solo se necesitan 9 pares de mulas; ó si queremos escribir la proporcion será $10^{ds.}:6^{ds.}::15^{ps.}\ de^{ms.}:x=\frac{6\times15}{10}=\frac{90}{10}=9^{ps.}\ de^{ms.}$

Como la regla de tres inversa es la que mas suele detener á los principiantes, resolveremos varios exemplos de ella.

1.° *Un comerciante ha ganado en* 6 *meses* 540 *doblones con un capital de* 3000 *doblones, para ganar los mismos* 540 *doblones con un capital de* 1200 *doblones, quánto tiempo necesitará?*

Aqui la cantidad principal y su relativa son $3000^{ds.}$ y $6^{ms.}$, la principal de la pregunta 1200 doblones; por lo que executando la operacion como aqui se ve: $1200^{ds.}:3000^{ds.}::6^{ms.}:x=\frac{3000\times6}{1200}=\frac{180}{12}=15$ meses, hallo que necesitará 15 meses.

2.° *Un General de trinchera tiene calculado que con poner* 5000 *hombres á trabajar, ya á la zapa ya á la trinchera, llegará en* 8 *dias á hacer todas las obras que necesita para llegar al camino cubierto; tiene aviso de su mayor General que es indispensable tomar el camino cubierto dentro de* 5 *dias, quántos hombres necesitará poner á trabajar?*

Aqui la cantidad principal y su relativa son 8 dias y 5000 hombres, que son las causas que han de concurrir para executar todas las obras necesarias; y lo que se busca es quántos han de ser los hombres que juntos con la causa conocida 5 dias han de poder obrar el mismo efecto; por lo qual plantearemos la qüestion en estos términos:

$$5^{ds.}:8^{ds.}::5000^{hs.}:x=\frac{5000\times8}{5}=1000\times8=8000 \text{ hombres},$$

qué son los que tendrá que poner á trabajar.

3.° *En una embarcacion hay víveres para tres meses: á causa de una borrasca se ha alexado del puerto adonde se dirigia, y por lo mismo han de durar los víveres* 5 *meses; se trata de saber qué racion se ha de dar á cada uno de los que van embarcados.*

Aqui el efecto que se ha de producir es la manutencion de todos los que van embarcados; y lo que se sabe es que con los víveres que hay se puede lograr esta manutencion durante tres meses, dando á cada uno su racion regular que se podrá llamar 1; ahora se quiere que esta manutencion se logre en 5 meses, y lo que se trata de averiguar es la otra causa que ha de producir dicha manutencion, á saber, la racion que se ha de dar á cada persona; y como aqui la cantidad principal de la pregunta es 5 meses, executaré la operacion como aqui se ve:

$$5\ m.^{s}:3\ m.^{s}::1\ rac.^{n}:x=\tfrac{3}{5}\ \text{de racion};$$

y hallo que á cada uno de los que van embarcados se le ha de dar $\frac{3}{5}$ partes de la racion que se le daba; es decir, si le daban 5 onzas de arroz, ahora se le deberán dar 3, y así de las demas cosas, como agua, vino, &c.

4.º *En una plaza sitiada hay víveres solo para* 15 *dias; el Gobernador ha recibido una órden de su Soberano en que le dice que de ninguna manera se entregue; porque á los* 20 *dias le embiará socorro*; en este caso debe el Gobernador disminuir la racion de cada soldado, y executando la operacion como en el exemplo anterior, se hallará que á cada soldado le debe dar $\frac{3}{4}$ partes de la racion que antes.

5.º *La guarnicion de una plaza se compone de* 6000 *hombres: el Gobernador sospecha que le van á sitiar los enemigos, y no tiene víveres para mantener á dicha guarnicion sino dos meses y medio; y como debe prevenirse para tres meses lo menos y no tiene de donde, el recurso que debe tomar es echar soldados de la plaza, porque si les disminuye la racion no estarian bastante robustos para resistir las fatigas de un sitio*; y así, para averiguar el número de soldados que deben quedar de guarnicion executaré la operacion como aqui se ve:

$$3 \text{ me.}^s : 2\tfrac{1}{2} \text{ me.}^s :: 6000 \text{ sold.}^s : x = \frac{6000 \times 2\frac{1}{2}}{3} = 5000 \text{ soldados},$$

y hallaré que deben quedar solo 5000 soldados de guarnicion; los otros 1000 los embiará á otra plaza en que tengan necesidad de hombres y no de víveres.

278 Para resolver una regla de tres compuesta *se halla primero el resultado que corresponde á la pregunta, atendiendo á una sola circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, considerándole como pregunta, atendiendo á otra circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, atendiendo á otra circunstancia; y así sucesivamente.*

1.er Exemp. *Si quiero averiguar los cahices de trigo que podrán trasportar* 45 *pares de mulas en* 12 *dias, en el supuesto de haber traido* 15 *pares de mulas en* 5 *dias* 60 *cahices de trigo*: primero averiguaré los cahices que traerán los 45 pares de mulas en el mismo tiempo, esto es en 5 dias, lo que executaré como aqui se ve:

$$15 \text{ pares de mulas} : 45 \text{ pares de mulas} :: 60 \text{ cah.}^s : x = 180 \text{ cah.}^s$$

y encuentro que traerán 180 cahices.

Ahora: *si en* 5 *dias traen* 45 *pares de mulas* 180 *cahices, en* 12 *dias quántos traerán*? Executaré la operacion como aqui se ve:

$$5 \text{ d.}^s : 12 \text{ d.}^s :: 180 \text{ cah.}^s : x = \frac{12 \times 180}{5} = 12 \times 36 = 432 \text{ cah.}^s$$

y saco que traerán 432 cahices.

2.º exemp. *Sé que* 8 *hombres en* 10 *dias, trabajando en cada dia* 6 *horas, han segado* 50 *fanegas de trigo;* 4 *hombres en* 12 *dias, trabajando* 9 *horas al dia, quántas fanegas segarán?*

Aqui tendré que hacer las tres reglas de tres simples siguientes:

8 hom.^{s}:4 homb.^{s}::50 f.^{s}:25 f.^{s}
10 d.^{s}:12 d.^{s}::25 f.^{s}:30 f.^{s}
6 homb.^{s}:9 homb.^{s}::30 f.^{s}:45 f.^{s}

Y saco que segarán 45 fanegas de trigo.

3.^{er} exemp. *Sé que 720 hombres en 5 dias, trabajando 6 horas al dia, han hecho 600 varas de obra; para hacer las mismas varas 360 hombres, trabajando 9 horas al dia, quántos dias necesitarán?*

Executando la operacion como aqui se ve:

360 homb.^{s}:720 homb.^{s}::5$^{ds.}$:10$^{ds.}$
9 hor^s.:6 hor^s.::10$^{ds.}$:6$\frac{2}{3}$$^{ds.}$

Saco que necesitarán 6 dias y las dos terceras partes del trabajo de otro dia.

Esta regla de tres compuesta tambien se suele llamar *regla de tres con tiempo.*

Tambien se puede resolver una regla de tres compuesta por medio de una sola proporcion, á saber: *multiplicando entre sí las circunstancias del supuesto y pregunta, y hallando el resultado correspondiente por una sola proporcion*; en esta forma.

Para el segundo exemplo multiplicaré 8 por 10 y por 6, que me darán 480; por lo que consideraré que 8 hombres en 10 dias trabajando 6 horas al dia, harán lo mismo que 480 hombres en una hora, ó que un hombre en 480 horas. Multiplicaré tambien los de la pregunta, diciendo: 4 por 12 son 48; 48 por 9 son 432, por lo que las circunstancias de la pregunta equivalen á estas: 432 hombres en una hora ó un hombre en 432 horas; y así diré:

$$480:432::50 \text{ fan.}^s:x=\frac{432\times50}{480}=\frac{2160}{48}=45 \text{ como antes}$$

Para el 3.^{er} exemplo multiplicaré el 720 por 6, y tendré 4320; ahora multiplicaré 360 por 9 lo que dará 3240; y estará reducida la qüestion á encontrar quántos dias deberán trabajar 3240 hombres para hacer la misma obra que 4320 han hecho en 5 dias; y como esta regla de tres es inversa, plantearé la qüestion en estos términos:

$$3240:4320::5:x=\frac{4320\times5}{3240}=\frac{2160}{324}=6\tfrac{2}{3} \text{ como antes.}$$

279 En muchas ocasiones no se conoce inmediatamente la relacion que tiene la causa con el efecto, sino que se conoce por medio de otras circunstancias; en este caso la regla de tres recibe el nombre de *regla conjunta.* Propongámonos, por exemplo, la qüestion siguiente.

Se sabe que 50 metros franceses equivalen á 179 pies españoles, y que 699 pies españoles equivalen á 100 toesas antiguas francesas; si queremos averiguar 380 metros franceses á quántas toesas francesas equivalen: advertiremos que aqui no se nos da inmediatamente la relacion

que tienen entre sí el metro y la toesa, sino que se nos da por medio de la del pie español; y así, lo que se hace es averiguar primero los 380 metros quántos pies españoles componen, lo que executaremos por medio de esta proporcion: $50^{ms.} : 380^{ms.} :: 179^{ps.} : x = \frac{380^{ms.} \times 179^{ps.}}{50^{ms.}}$ p.^{s} esp.^{s}

Ahora diremos: si 699 pies españoles equivalen á 100 toesas francesas, $x = \frac{380^{ms.} \times 179^{ps.}}{50^{ms.}}$ pies á quántas toesas equivaldrán? y obtendremos por esta proporcion: $699\,p.^s : 100\ toes.^s :: \frac{380^{ms.} \times 179^{ps.}}{50^{ms.}}\,p.^s : x' = \ldots$

$$\frac{100^{ts.} \times \frac{380^{ms.} \times 179^{ps.}}{50^{ms.}}\,p.^s}{699\,p.^s} = \frac{100\,t^s \times 380\,m^s \times 179\,p^s.}{50m^s \times 699p^s.}$$

Pero á este valor hubiéramos llegado por medio de esta proporcion

$$50^{ms.} \times 699^{ps.} : 100^{ts.} \times 179^{ps.} :: 380^{ms.} : x';$$

y como la primera razon es una razon compuesta la podremos descomponer en estas dos $50^{ms.} : 179^{ps.}$ y $699^{ps.} : 100^{ts.}$ y por lo mismo escribiremos la qüestion de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} 50 \text{ metros} : 179 \text{ pies} \\ 699 \text{ pies} : 100 \text{ toesas} \end{array}\right\} :: 380 \text{ metros} : x'.$$

Escrita esta qüestion vemos que en las razones componentes estan comparados en la primera los metros con los pies, y en la segunda los pies con las toesas; aqui hay impropiedad porque no se pueden comparar cosas que no sean homogéneas; pero se escriben así todas las qüestiones semejantes, porque esto no altera de ningun modo el resultado; pues el valor de x depende de los números considerados en abstracto, y porque de este modo se tiene la ventaja de ir colocando los datos conforme se va enunciando la qüestion.

Ahora, para resolverla se tendrá cuidado, antes de efectuar la multiplicacion de las razones, de simplificarlas si se puede; lo que vemos que aqui se puede conseguir suprimiendo ó borrando un cero en el 100 y en el 50; despues el 5 que queda del 50 le podremos suprimir con el 5 que es factor del 10; y así, solo tendremos que multiplicar el 179 por 2 y por 380, y dividir el producto por 699, lo que dará 194,6 &c. toesas.

Otra qüestion de regla conjunta: *Si tres libras tornesas de Francia valen* 32 *dineros esterlines de Inglaterra*, 240 *dineros esterlines de Inglaterra valen* 408 *dineros gros de Holanda*, 50 *dineros gros valen* 190 *maravedíses, quántos maravedíses valen* 60 *libras tornesas?*

La colocacion de los términos la executaremos conforme se va enunciando la qüestion del modo que se ve en la página siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\quad 8 \\ \not{3}\text{ lib. torn.}^s : \not{3}\not{2}\text{ din.}^s\text{ esterl.} \\ \not{4} \quad\quad\quad\quad\quad 136 \\ \not{2}\not{4}\not{0}\text{ din.}^s\text{ esterl.} : \not{4}\not{0}\not{8}\text{ din.}^s\text{ gros} \\ 5\not{0}\text{ din.}^s\text{ gros} : 19\not{0}\text{ mrs.} \end{array}\right\} :: \not{6}\not{0}\text{ lib.}^s\text{ tor.}^s : x,$$

en la qual simplificando del modo que hemos dicho (271), vemos que el 60 se suprime con un 60, factor del 240, y por lo mismo pongo encima de este factor 4 que queda; ahora, este 4 se puede suprimir con un 4 factor del 32, del qual solo quedará el otro factor 8; el 0 del 50 con el 0 del 190, y el 3 con un 3 factor del 408 del qual quedará 136: y por consiguiente para hallar el resultado multiplicaremos 8 por 136 y por 19; el producto 20672 le dividiremos por 5, y el quociente 4134 serán los maravedíses que valdrán las 60 libras tornesas.

280 Se da el nombre *de regla de compañía á la que enseña á determinar quánto corresponde de la ganancia ó pérdida á cada uno de muchos compañeros que han puesto su caudal en un fondo, con arreglo á lo que puso cada uno.* Esta suelen decir que es de dos modos: *simple* y *con tiempo*; la llaman *simple* quando el caudal que tiene cada uno en el fondo parmanece un mismo tiempo; y con tiempo quando no permanecen los caudales el mismo tiempo en el fondo. Esta se reduce á la simple multiplicando el tiempo por lo que puso cada uno; pues de este modo el tiempo es un factor comun, y por otra parte lo mismo es 15 doblones en dos años, que 30 en un año. Entendido esto pasaremos á su resolucion que depende de la siguiente:

Qüestion. *Partir un número dado* a *en las partes que se quiera*, v. g. *en tres, que tengan entre sí la misma razon que las cantidades dadas* m, n, p, *esto es, que la primera tenga con la segunda la razon de* m:n, *y la primera con la tercera la razon de* m:p.

Sea x la primera parte y tendremos

$m:n::x:\frac{nx}{m}$ que será lo que corresponde á la segunda,

$m:p::x:\frac{px}{m}$ que será lo que corresponde á la tercera,

y como todas juntas han de equivaler á a, se tendrá: $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$; que quitando los divisores será $mx+nx+px=ma$,

y descomponiendo en factores tendremos: $x(m+n+p)=ma$,

que da $x=\frac{ma}{m+n+p}=m\times\frac{a}{m+n+p}$ (*).

(*) *En este resultado, y lo mismo en los siguientes, se observa el factor comun* $\frac{a}{m+n+p}$, *el qual está multiplicado por la puesta de cada*

Si substituimos este valor de x en lo que correspondia á la segunda, y simplificamos, se tendrá $\frac{nx}{m}=\frac{na}{m+n+p}$, y la tercera será $\frac{px}{m}=\frac{pa}{m+n+p}$ cuyos resultados manifiestan que podemos hallar cada una de estas partes por medio de la siguiente proporcion:

$m+n+p$ (suma de las puestas) : a (ganancia ó pérdida) :: *lo que puso cada uno : á la ganancia ó pérdida que le corresponde.*

Hagamos aplicacion á un caso particular: supongamos que tres sugetos han puesto en un fondo el primero 240 doblones, el segundo 320, y el tercero 400, cuya suma compone 960 doblones, y que hayan ganado 120 doblones; si se pregunta quánto corresponde á cada uno, será $m=240$, $n=320$, $p=400$, y $m+n+p=960$;

luego será la parte del primero. . . $=\frac{240\times120}{960}=$ 30 doblones.

la del segundo. . . . . $=\frac{320\times120}{960}=$ 40 doblones.

y la del tercero . . . . $=\frac{400\times120}{960}=$ 50 doblones.

cuyas partes componen la ganancia total . . . . . 120 doblones.

El no haber contado con el tiempo nos indica que las puestas permanecieron uno mismo en el fondo; pero si el primero la hubiese puesto por 10 meses, el segundo por 15, y el tercero por 8, siendo la ganancia 120 doblones tambien como antes, qué parte corresponderia á cada uno?

Para determinar la parte de cada uno, observaremos que 240 doblones puestos por diez meses es lo mismo que 240×10 por un solo mes; 320 doblones puestos por 15 meses es lo mismo que 320×15 doblones por un solo mes; y 400 doblones puestos por 8 meses equivalen á 400×8 por un solo mes; de manera que las puestas serán 2400; 4800 y 3200 cuya suma es 10400; en cuyo caso al primero le corresponderá

$\frac{120\times2400}{10400}=27\frac{72}{104}$; al 2°. $\frac{4800\times120}{10400}=55\frac{40}{104}$ y al 3°. $\frac{3200\times120}{10400}=36\frac{96}{104}$, cuya suma es igual con 120 como antes.

281 Qüestion. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de falsa posicion.*

Se da el nombre *de regla de falsa posicion á aquella en que suponiendo un número arbitrario, pero determinado, nos servimos despues de*

---

uno para hallar su parte respectiva; de donde se deduce para la práctica esta regla que es muy sencilla. Divídase la ganancia ó pérdida por la suma de las puestas (*si dicha suma es mayor se convertirá en quebrado decimal*), multiplíquese el quociente por la puesta de cada uno y se tendrá la ganancia ó pérdida que le corresponde.

él para encontrar el verdadero. Propongámonos resolver esta qüestion. *Tres comerciantes pusieron en un fondo igual cantidad; pero no teniendo todos la misma ciencia convinieron en repartir su ganancia de modo que el segundo tubiese duplo que el primero, y el tercero el triplo del segundo; ganaron 9000 doblones, quánto toca á cada uno?*

Supongamos que al primero le tocaron 12, el segundo tendria 24, y el tercero 72, y sumando tendré $12+24+72=108$; ahora diré: si 108 dan 12, los 9000 quánto darán? sale 1000 para el 1.°, de donde resulta 2000 para el 2.°, y 6000 para el 3.°, cuya suma $=9000$ doblones.

La resolucion de esta qüestion está fundada en que dos números qualesquiera tienen la misma razon que qualquiera de sus partes alíquotas, y que el conjunto de un número qualquiera de dichas partes; para demostrarlo en general sean a y b estos dos números; y como una razon no se altera aunque se dividan sus dos términos por una misma cantidad, tendremos que $a:b::\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::\frac{a}{m'}:\frac{b}{m'}::\frac{a}{m''}:\frac{b}{m''}::$ &c.

Y en virtud de lo dicho (268 teor. 5.°) será igualmente

$$a:b::\frac{a}{m}+\frac{a}{m'}+\frac{a}{m''}+\&c.:\frac{b}{m}+\frac{b}{m'}+\frac{b}{m''}+\&c.$$

que manifiesta la verdad que hemos asegurado.

Si nos propusiéramos esta otra: *Un padre dexa á Juan la tercera parte de su dinero, á Pedro la quarta parte y á Diego la quinta; la suma de estas partes asciende á 9400 doblones, en cuyo supuesto se quiere saber quánto dinero tenia?*

Supongamos que su dinero era 60 doblones, y resultará que su tercera parte será 20, su quarta 15 y su quinta 12; y tendremos que entre todas ascienden á 47 doblones. Ahora diré: si 47 doblones provienen de 60 doblones, 9400 de quánto provendrán? y encuentro que provienen de 12000.

282 Qüestion. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de dos falsas posiciones.*

Se llama *regla de dos falsas posiciones ó de falsa posicion doble*, aquella en que para hallar lo que se busca se hacen dos supuestos. Propongámonos, por exemplo, hallar dos números cuya suma sea 25, y su diferencia 7; supondré que el número menor sea 4 y tendré que el mayor será $4+7=11$; sumando los dos resulta $11+4=15$, que para componer 25 faltan 10, y diré que la equivocacion es -10; supondré ahora que el número menor sea 8, y tendré que el mayor será 15, los quales sumados dan $15+8=23$, que dan -2 de equivocacion.

Esto supuesto, la regla práctica que se sigue es la siguiente: *multiplíquese cada número supuesto por la equivocacion del otro, y divídase la diferencia de los productos por la diferencia de las equivocaciones*; de

manera que aqui se colocará la operacion en esta forma (A): restaré el producto menor del mayor y será $-80+8=-72$, que dividiré por $-10+2=-8$ diferencia de las equivocaciones, y tendré $\frac{-72}{-8}=9$, luego el menor número será 9 y el mayor será 16.

$$\begin{array}{cc} & (A) \\ 4 & 8 \\ -2 & -10 \\ \hline -8 & -80 \end{array}$$

Para no tener que atender á los signos se dice en general que *quando los errores ó equivocaciones tienen un mismo signo, se resta el un producto del otro, y la resta se divide por la diferencia de las equivocaciones*; y *que quando una equivocacion tiene el signo + y la otra el signo —, la suma de los productos se divide por la suma de los errores.* Así, si el segundo número supuesto hubiera sido 12 tendríamos que el mayor seria 19, y como $19+12=31$ habria $+6$ de equivocacion, en cuyo caso tendríamos (A):

Sumaríamos 24 con 120, y la suma 144 la dividiríamos por 16 suma de los errores, y tendríamos $\frac{144}{16}=9$ como antes.

$$\begin{array}{cc} & (A) \\ 4 & 12 \\ +6 & -10 \\ \hline 24 & -120 \end{array}$$

Para manifestar los fundamentos de esta regla observaremos que suponiendo x el número que buscamos, a y b los dos números supuestos, α y β las dos equivocaciones, la condicion que se ha de verificar la podremos expresar por $\frac{m}{n}\times x$, siendo m y n números qualesquiera que su relacion expresará multiplicada por x lo que exîja la qüestion; ahora, como suponemos que de ser el número supuesto a resulta una equivocacion, expresándola por α se tendrá $\frac{m}{n}\times x=\frac{m}{n}\times a+\alpha$; y por la misma razon $\frac{m}{n}\times x=\frac{m}{n}\times b+\beta$; y pasando al primer miembro el término donde hay $\frac{m}{n}$, resulta en ambas $\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times a=\alpha$, $\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times b=\beta$, que formando proporcion tendremos:

$$\alpha:\beta::\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times a:\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times b::\frac{m}{n}(x-a):\frac{m}{n}(x-b)::x-a:x-b$$

que da $\alpha(x-b)=\beta(x-a)$ ó $\alpha x-\alpha b=\beta x-\beta a$,

que despejando x sale $x=\frac{\alpha b-\beta a}{\alpha-\beta}$, que da la regla práctica que hemos dicho.

Ahora, si suponemos que una de las equivocaciones sea negativa, por exemplo la β, esta expresion se convertirá en $x=\frac{\alpha b+\beta a}{\alpha+\beta}$, que expresa la circunstancia dicha antes; lo mismo hubiéramos obtenido haciendo negativa a α porque entonces hubiera sido

$$x=\frac{-\alpha b-\beta a}{-\alpha-\beta}=\frac{-(\alpha b+\beta a)}{-(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha b+\beta a}{\alpha+\beta}.$$

Exemplo 1.° Un padre con el fin de estimular á su hijo á que estudie, le dice: *por cada dia que sepas la leccion te doy* 10 *reales, pero por cada dia que no la sepas me has de dar* 4; *al cabo de* 15 *dias le tubo que dar el padre* 66 *reales; se pregunta, quántos dias estudió y quántos no?*

Supongo que estudió 7 dias, y entonces 7 por 10 son 70 rs., y esto será lo que habria ganado el hijo; y como dexó de estudiar 8, tubo que dar el hijo 4×8=32; luego solo debió recibir del padre 70—32=38, lo que da—28 de error. Suponiendo que estudió 13 habria ganado 13×10=130, y hubiera tenido que dar 2×4=8; luego deberia haber recibido 122, lo que da un error de +56; por lo que executaré la operacion como aquí se presenta (A):

(A)

7	13
+ 56—	28
392—	364

Sumaré 392 con 364, y la suma 756 la dividiré por 84, y hallaré que supo la leccion 9 dias, y la dexó de saber 6.

Exemplo 2.° *De dos jugadores el mas diestro pone 6 pesetas contra 4 pesetas cada juego; al cabo de 20 juegos el otro le tiene que dar 10 pesetas; quántos juegos ganó el primero?*

Supongamos que ganó 11, con lo qual el otro ganaria 9; y la ganancia del primero será 11×4—9×6=—10, por consiguiente este saldria perdiendo 10 pesetas; pero como la qüestion dice que las ganó hay—20 de error ó equivocacion; supongo ahora que ganó 14, el otro ganaria 6, y la ganancia del primero será 14×4—6×6=20; hay pues ahora +10 de equivocacion. Dispongo los términos en esta forma:

11	14
10—	20
110—	280

Parto la suma 110+280=390 por 30, suma de las equivocaciones, y sale 13, número de juegos que ganó el primero.

283 Qüestion. *Declarar los fundamentos y la prâctica de la regla de aligacion.*

Se da el nombre de *regla de aligacion á la que enseña á determinar el precio á que se ha de vender la mezcla de dos géneros, quando se dan conocidas las cantidades que entran en ella y sus valores*; ó á la que enseña *á determinar en qué razon se han de tomar las cantidades de la mezcla, dado que sea el precio medio y los precios de las cantidades que se han de mezclar.*

En esta regla de aligacion ocurren dos casos: 1.° quando se mezclan varias cosas de diferentes precios, y se pregunta á cómo se ha de vender la mezcla; y 2.° quando se pide la razon en que se han de mezclar para venderlas á un precio dado.

Supongamos, por exemplo, que se haya mezclado una porcion A de un género qualquiera, cuyo precio es m, con otra porcion B del mismo género de inferior calidad, cuyo precio es n; y que se trate de averiguar á quánto se ha de vender cada unidad de la mezcla para no per-

der ni ganar. Puesto que el precio de A es m tendremos que Am será su valor, y por la misma razon Bn será el de B, luego el valor de toda la mezcla estará representado por $Am+Bn$; y como en toda la mezcla hay un número de unidades expresado por $A+B$, resulta que dividiendo el valor de todas las unidades por la suma de ellas nos vendrá el valor de cada una, que si le llamamos x será $x=\frac{Am+Bn}{A+B}$.

Exemplo. *Habiendo 32 arrobas de vino de 22 rs. mezcladas con 24 de á 29, hallar el precio medio á que se debe vender dicha mezcla.* En este caso $A=32, m=22, B=24, n=29$, y por consiguiente

$$x=\frac{Am+Bn}{A+B}=\frac{32\times22+24\times29}{32+24}=25 \text{ precio medio.}$$

Para pasar al 2.º caso supongamos que nos den los precios de dos géneros A y B, y que se pida en qué razon se han de mezclar para venderlos á un precio medio sin que se pierda ni se gane.

Si llamamos m el precio medio, tendremos que el precio mayor le podremos representar por $m+a$, y el menor por $m-d$; ahora, si llamamos x la porcion que se echa del de mayor valor, y z á la del menor, tendremos que como despues de hecha la mezcla debe resultar el mismo valor que tenian separadamente las cantidades, será

$$(m+a)x+(m-d)z=m(x+z),$$

que efectuando las operaciones da $mx+ax+mz-dz=mx+mz$, que se reduce á $ax-dz=0$ ó á $ax=dz$, de donde sale $x:z::d:a$; y quiere decir *que las cantidades de estos géneros se han de tomar en razon inversa de la diferencia entre su valor y el precio medio.*

Esta regla se dispone de este modo: $m\left\{\begin{matrix} m+a \\ m-d \end{matrix}\right\}\begin{matrix} d \\ a \end{matrix}$

se pone el precio medio en una llave, y dentro de ella los precios de las cosas, poniendo superiores á m los que sean mayores que el precio medio, é inferiores los que sean menores; se resta el menor del precio medio, y esta resta que aqui es d se pone enfrente del precio mayor, algunas veces fuera de otra llave; se resta el precio medio del mayor, y su diferencia a se pone enfrente del precio inferior: y tenemos al lado de cada precio la cantidad que expresa la razon en que se debe tomar de ella.

Si quisiera saber, por exemplo, qué porciones de vino de á 16 rs. y de 9 he de mezclar para vender la mezcla á 13 rs., tendria en este caso $m=13$, $m+a=16$ y $m-d=9$, que dan $a=3$, $d=4$, y disponiendo la operacion será: (A)

(A)

$$13\left\{\begin{matrix} 16\ldots \\ 9\ldots \end{matrix}\right\}\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$$

y esto manifiesta que la razon en que debo tomar las cantidades de la mezcla de vino de á 16 y de á 9 es la de 4:3.

Si hubiese mas de dos clases, por exemplo tres, habria dos cuyo

precio seria mayor ó menor que el medio; entonces el número que representaria la razon de la cantidad que se habia de tomar de la otra; estaria expresado por la suma de las diferencias de los precios de las otras dos al precio medio.

Supongamos que hay tres clases de té: uno de á 80 reales la libra, otro de á 60 rs. y otro de á 57, y que se pregunte en qué razon se han de mezclar paraque se pueda vender á 72 rs. la libra; dispondremos los términos en esta forma (A):

y hallo que por cada 8 libras de á 60 y de á 57 que mezcle, deberé mezclar 27 del de á 80 rs.

$$\text{(A)}\quad 72\left\{\begin{array}{ll} 80\ldots & 12+15=27 \\ 60\ldots & 8 \\ 57\ldots & 8 \end{array}\right.$$

Estas qüestiones son susceptibles de una de estas dos determinaciones.

Se puede pedir ademas que se forme una cantidad determinada de mezcla, como aqui si ademas se dixese que la mezcla habia de componer 301 libras; en este caso se suman los números que expresan las razones lo que nos dará aqui $27+8+8=43$, y se dirá: si en 43 de mezcla entran 27 del de á 80, en 301 quántas entrarán? y se encontrará por esta proporcion $43:27::301:x=\frac{301\times27}{43}=189$; número de libras que se han de tomar.

Para las otras clases diremos: $43:8::301:x=\frac{301\times8}{43}=56$; luego deberemos tomar de cada una de las otras clases 56 libras, y tendremos: $56+56+189=301$ libras de la mezcla.

El otro modo con que puede determinarse la qüestion es diciendo que de uno de los géneros que se han de mezclar hay una cantidad fixa; como si, por exemplo, se dixese en esta qüestion que habia 243 libras de á 80, y que se queria saber la porcion de á 60 y de á 57 que se debia mezclar; para esto diríamos: si con 27 de á 80 se deben mezclar 8 de á 60 y de á 57, con 243 quántas se deberán mezclar? y tendremos $27:8::243:x=\frac{8\times243}{27}=72$, que nos dice que con las 243 libras de 80 deberemos mezclar 72 del de á 60, y otras 72 del de á 57.

Si la qüestion incluyese quatro cantidades, de las que tres fuesen de un precio inferior ó superior al precio medio, entonces de la otra se deberia tomar una cantidad, para término correspondiente de la razon, expresada por la suma de las diferencias de cada uno de los precios de las otras tres al medio; y del mismo modo se procederia si hubiese mas con esta circunstancia; si dos fuesen superiores al precio medio y dos inferiores, se combinarán cada una de las mayores con cada una de las menores de un modo qualquiera como vamos á manifestar.

Supongamos que hay trigo de á 30 rs., de á 25, de á 17 y de á 13, se pregunta en qué razon se han de mezclar paraque la mezcla se pueda

vender á 20 rs. sin perder ni ganar? executaré la operacion como aqui se presenta (A):

de manera que por cada 3 de á 30 se deberán tomar 7 de á 25; 10 de á 17, y 5 de á 13: ó por cada 7 de á 30, tomaré 3 de á 25; 5 de á 17, y 10 de á 13.

(A)

20	30....	3	ó	 7
	25....	7		 3
	17....	10		 5
	13....	5		 10

284 Qüestion. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de interes.*

Se da el nombre de regla de interes á *la que determina lo que se debe pagar por alguna porcion de dinero prestado con ciertas condiciones.* Hay dos especies de interes, á saber, el *simple* y el *compuesto*: el primero es el que se paga solo por el principal ó capital, y el segundo es el que se paga por el principal y los intereses que dexan de pagarse.

Entendido esto, pasemos á resolver nuestra qüestion.

Supongamos que se nos dé el capital, el tiempo que está puesto á interes y el tanto por ciento que ha de ganar; para hallar la suma que componen al cabo de un tiempo determinado el capital y los intereses juntos, llamaremos p al capital, t al tiempo, r al interes que da un real cada año, y s á la suma que buscamos. Y diremos: si un real da r interes en un año, quánto dará el principal p? ó $1 : r :: p : pr$,
luego pr será el interes que dará cada año el capital p.

Despues diremos: si en un año p da el interes pr, quánto dará al cabo del tiempo t? ó $1 : pr :: t : prt$,
luego prt serán los intereses que dará el principal p al cabo del tiempo t; por consiguiente al cabo de dicho tiempo t habrá que cobrar $s = p + prt$.

Supongamos que un usurero ha prestado 15600 reales á 8 por 100 al año, y que queramos saber quánto tendrá que cobrar al cabo de 5 años por el capital y los intereses caidos. Aqui $p = 15600$; como el interes es á 8 por 100 será $r = 0{,}08$ porque diremos:

$$100 : 8 :: 1 : r = \frac{8}{100} = 0{,}08 \text{ y } t = 5,$$

luego será $s = 15600 + 15600 \times 0{,}08 \times 5 = 21840$.

Si ahora dado un capital, el tiempo que queda puesto á ganancias y el interes anual, nos propusiéramos hallar quánto monta al cabo de dicho tiempo el capital junto con los intereses á interes compuesto, llamaríamos a el capital, r el interes que da un real al año, t el tiempo, y haciendo $1 + r = R$ tendríamos que R seria lo que se deberia cobrar al cabo de un año por un real y el interes que da. Para hallar lo que se deberá al cabo del segundo año por un real y sus intereses á interes compuesto, hemos de considerar que á principios de este segundo año el principal puesto á ganancias es $1 + r$ ó R, pues siendo la qüestion de interes compuesto los intereses r han de ser parte del principal correspondiente al segundo año.

Diremos pues: si 1 da $1 + r$ ó R al cabo de un año, quánto dará R en el mismo tiempo? ó $1 : R :: R : R^2$, cuyo quarto término es lo que se

deberá al cabo del segundo año por el capital y las ganancias á interes compuesto. Haciendo la misma consideracion hallaremos que en el mismo supuesto será $R3$ lo que se deberá al cabo del tercer año, y por consiguiente que al cabo de t años la suma del capital, siendo este un real, y de los intereses á interes compuesto será R^t. Luego para hallar lo que importará la suma del capital a é interes al cabo de t años, á interes compuesto, esto es, en el supuesto de agregarse cada año los intereses al capital, diremos: si al cabo de t años un real puesto á interes compuesto da R^t por el capital y los intereses, quánto dará a en los mismos supuestos? ó $1:R^t::a:aR^t$, luego $s=aR^t$.

Supongamos que parte del caudal de un pupilo consiste en una suma de 20000 pesos que su tutor á puesto á ganancias á 5 por 100. Al cabo de un año el sugeto que tenia esta suma la vuelve pagando el interes estipulado. El tutor halla en el instante proporcion de emplear dicha cantidad al mismo interes, forma un nuevo capital con los 20000 pesos y el interes que dieron el primer año, é impone este nuevo capital. Emplea del mismo modo á principios del tercer año todo lo que cobró á fines del segundo, y prosigue á este tenor por espacio de seis años, veamos lo que ha de cobrar al cabo de este tiempo.

En este caso $a=20000$; $t=6$; r es el interes simple de un peso; $R=1+r$, esto es, un peso con el interes que da en un año. Para sacar el valor de R hemos de sacar primero el de r diciendo:

$$100:5::1:0,05=r;\ \text{luego}\ R=1+r=1,05;$$

y haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula $aR^t=s$, saldrá $s=20000\times(1,05)^6=20000\times1,3401=26802$ pesos.

No insistiremos mas sobre este punto, porque los que se hayan impuesto medianamente en el artificio del cálculo se hallarán en disposicion de resolver todas estas qüestiones directamente por los métodos generales de la análisis.

De las progresiones aritméticas y geométricas.

285 Se da el nombre de *progresion á una proporcion continua continuada ó á un conjunto de términos continuo-proporcionales.* Si los términos son continuo-proporcionales aritméticos la progresion será *aritmética*; y si son continuo-proporcionales geométricos la progresion será *geométrica.*

Como en una proporcion continua aritmética el primer término lleva al segundo tanto como el segundo al tercero, ó el segundo lleva al primero tanto como el tercero al segundo: se deduce que como progresion no es mas que la continuacion de la proporcion continua, una progresion aritmética es *una continuacion de términos tales que cada uno lleva al que le precede ó sigue un mismo exceso ó diferencia*; quando lleva al que le precede la progresion se llama *creciente*, porque entonces los térmi-

nos van aumentando; quando lleva al que le sigue se llama *decreciente*, porque los términos van disminuyendo.

Aqui en la progresion aritmética se llama razon ó diferencia á aquello que se necesita añadir ó quitar al término antecedente paraque se convierta en el que le sigue; quando se necesite quitar es lo mismo que añadir considerando como negativa á la diferencia; de donde resulta que llamaremos en general *razon* de la progresion aritmética á aquello que se necesita añadir á un término qualquiera paraque resulte el siguiente; quando la razon sea positiva, la progresion será *creciente*, y quando negativa *decreciente*.

Una progresion aritmética se escribe poniendo antes una raya con un punto encima y otro debaxo, y poniendo un punto entre sus términos de esta manera : $\div 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.$&c.

Esta raya con el punto encima y debaxo sirve para indicar que cada término del medio se ha de repetir; de manera que esta progresion no es sino un modo de abreviar la siguiente serie de razones aritméticas iguales : $\cdot 1.3:3.5:5.7:7.9:9.11:11.13:13.15:15.17:17.19:$ &c.

Si al primer término le llamamos a, y d á la razon, la expresion

$$\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d.a+6d\ldots\ldots a+(n-1)d$$

será una progresion aritmética general.

De la idea que nos hemos formado de las progresiones aritméticas, resulta que el segundo término es igual al primero mas la razon; que el tercero es igual con el segundo mas la razon, pero como el segundo es igual al primero mas la razon, resulta que el tercero será igual con el primero mas dos veces la razon; el quarto se compondrá del tercero mas la razon, ó como el tercero es igual al primero mas dos veces la razon, el quarto equivaldrá al primero mas tres veces la razon; el quinto se compondrá del quarto mas la razon, ó del primero mas quatro veces la razon; y en general un término qualquiera se compondrá del antecedente mas la razon, ó *del primero mas tantas veces la razon como términos hay antes de él.*

Si llamamos u á un término qualquiera, a el primer término de la progresion, d á la razon ó diferencia, y n al lugar que dicho término u ocupa en la progresion, tendremos traducida (215) la última regla de un término qualquiera en la equacion ó fórmula $u=a+(n-1)d$, con cuyo auxîlio se puede calcular un término qualquiera de una progresion sin necesidad de los anteriores; para lo qual no hay mas que substituir por a el primer término, por d la razon, y por n el lugar que ha de ocupar dicho término; y así, el término octavo de la progresion de arriba será $1+(8-1)2=1+7\times2=15$.

Quando el primer término de la progresion sea cero, entonces un término qualquiera se compondrá de tantas veces la razon como términos hay antes de él.

286 De la formacion de la progresion se deducen varias conseqüencias.

1.ª *Quatro términos consecutivos, tomados donde se quiera, forman proporcion discreta*; porque la razon entre los dos primeros es la misma que entre los dos últimos, así es que 7.9:11.13.

2.ª *Tres términos consecutivos la forman continua*; porque la razon entre el primero y el segundo es la misma que entre el segundo y el tercero; así es que ÷ 5.7.9.

3.ª *Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos, tómense donde se quieran*; porque la razon de los dos primeros siendo la de la progresion es la misma que la de los dos últimos; así es que 5.7:13.15.

4.ª *Dos términos qualesquiera estan en proporcion discreta, con otros dos términos qualesquiera que disten entre sí tanto como los dos primeros distaban*; porque la razon en ambas equivale á tantas veces la de la progresion como términos hay en medio mas uno; así es que 3.11:7.15.

5.ª *Tres términos qualesquiera tales que los dos extremos disten igualmente del medio, forman proporcion continua*; porque la razon entre el primero y el medio es la misma que entre el medio y el extremo, pues ambas equivalen á tantas veces la de la progresion como términos hay entre ellos mas uno; así ÷ 5.11.17.

La 6.ª y principal conseqüencia es: *que la suma del primer término y último es igual á la suma de dos términos qualesquiera equidistantes de los extremos; é igual al duplo del término que hay en medio si el número de términos es impar.* Para convencernos de esto observaremos que el primer término y el segundo formando proporcion con el penúltimo y el último (cons. 3.ª), el 2.º junto con el penúltimo serán iguales con el primero junto con el último; el primero y el tercero formando proporcion con el antepenúltimo y último, la suma del primero con el último equivaldrá á la del tercero y antepenúltimo, y así de los demas.

287 Hemos dicho que esta conseqüencia es la principal, porque fundados en ella vamos á encontrar la suma de tantos términos como se quiera de una progresion.

Para esto sea la progresion general ÷ $a.b.c.d......r.s.t.u$ y llamando s la suma de los términos hasta u que consideraremos por ser inicial de último, y observando que la suma no se altera aunque se escriba al reves, tendremos poniendo debaxo de la suma ella misma escrita al reves. $\left\{\begin{array}{l} s=a+b+c+d...+r+s+t+u \\ s=u+t+s+r...+d+c+b+a \end{array}\right\}$ y sumando estas dos equaciones será

$$2s=(a+u)+(b+t)+(c+s)+(d+r)...+(r+d)+(s+c)+(t+b)+(u+a)$$

Ahora, como $a+u=b+t=c+s=$ &c. (cons. 6.ª) resulta que el duplo de la suma equivale á tantas veces la suma del primer término y último como términos hay en la progresion; luego si al número de términos le llamamos n tendremos $2s=(a+u)n$, de donde $s=(a+u)\frac{n}{2}$; que nos

dice que *la suma de los términos que se quieran de una progresion aritmética se halla sumando el primero con el último, y multiplicando esto por la mitad del número de los términos*; y así, la suma de ocho términos de la progresion (§ 285) será igual con $(1+15)\frac{8}{2}=16\times4=64$, como en efecto se verifica.

Como las dos equaciones $u=a+(n-1)d$, y $s=(a+u)\frac{n}{2}$, contienen cinco incógnitas, á saber, a,d,n,u y s, con su auxîlio se podrán determinar dos siempre que se tengan conocidas las otras tres. Si en la primera de estas equaciones despejamos d tendremos $d=\frac{u-a}{n-1}$, la qual nos servirá para hallar la razon quando se tenga conocido el último término, el primero y el número de términos, y nos dice: que para esto *se resta del último el primero, y lo que queda se divide por el número de términos menos uno.*

En esta propiedad está fundada la interpolacion de un número qualquiera de medios aritméticos entre dos dados; y así, si nos proponemos interpolar entre 5 y 47 seis medios aritméticos, restaremos el 5 del 47, y la resta 42 la dividiremos por el número de términos que ha de haber antes del 47; y como entre 5 y 47 ha de haber seis medios, habrá antes del 47 un término mas, á saber, el primero 5; luego esta resta *la deberemos dividir por el número de medios que se han de interpolar mas* 1, esto es, por 7, y resultará que $\frac{42}{7}=6$; por lo qual tendremos formados los términos en esta forma ÷5.11.17.23.29.35.41.47.

Entendido esto, pasaremos ya á la progresion geométrica.

288 Como en una proporcion continua geométrica el primer término contiene ó está contenido en el segundo tantas veces como el segundo contiene ó está contenido en el tercero, resulta que como *progresion* no es mas que una proporcion continua continuada, una progresion geométrica será un conjunto de términos tales que cada uno quepa en el que le precede ó sigue un mismo número de veces: quando quepa en el que le sigue la progresion será *creciente*, y quando quepa en el que le precede será *decreciente.*

De aqui se deduce que si llamamos razon al número por qué se ha de multiplicar un término qualquiera para que resulte el que le sigue en la progresion creciente, este número será entero ó fraccionario: y en la decreciente será quebrado propio.

Esta progresion se escribe poniendo una raya con dos puntos encima y dos debaxo, y luego los términos separados con dos puntos, en esta forma ∺2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024:2048:4096:&c.

La raya con los dos puntos encima y debaxo indica que cada término se debe considerar repetido, por ser esta una expresion abreviada de
2:4::4:8::8:16::16:32::32:64::64:128::128:256::256:512::&c.

de donde se deduce que tanto en esta progresion como en la aritmética todos los términos son antecedentes menos el último, y todos conseqüentes menos el primero. Si al primer término le llamamos a, y q á la razon, tendremos que $\div\!\div a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6\ldots aq^{n-1}$, será una progresion geométrica general.

289 De la idea que nos hemos formado de la progresion geométrica (288) resulta que el segundo término se compone del primero multiplicado por la razon; el tercero del segundo multiplicado por la razon; pero como el segundo equivale al primero multiplicado por la razon, resulta que el tercero equivale al primero multiplicado por el quadrado de la razon; el quarto se compone del tercero multiplicado por la razon, ó porque el tercero equivale al primero multiplicado por el quadrado de la razon, resulta que el quarto se compone del primero multiplicado por el cubo de la razon; y en general, un término qualquiera se compone del anterior multiplicado por la razon, *ó del primero multiplicado por una potencia de la razon expresada por el número de términos que hay antes de él.*

Si esta última regla la traducimos al lenguage algebráico, llamando a al primer término, u al término que se considera, q á la razon por ser inicial de quociente, y n al lugar que ocupa en la progresion, tendremos $u=aq^{n-1}$. De esta fórmula nos valdremos para sacar un término qualquiera sin necesidad de los anteriores, substituyendo en vez de a, q y n los valores correspondientes; de manera que el séptimo término de la progresion de arriba será igual con $2\times2^{7-1}=2\times2^6=2\times64=128$.

Si el primer término fuese la unidad, entonces un término qualquiera equivaldrá á una potencia de la razon expresada por el número de términos que hay antes de él.

Por razones análogas á las de la progresion aritmética, tenemos en esta: *que quatro términos consecutivos forman proporcion geométrica discreta; tres consecutivos la forman continua: que dos términos qualesquiera forman proporcion con otros dos términos qualesquiera, que disten igualmente entre sí, &c. &c.*

En toda progresion geométrica el quadrado del primer término es al quadrado del segundo como el primero al tercero, ó como un término qualquiera al que ocupa el tercer lugar respecto de él; porque quadrando los dos primeros términos obtenemos el quadrado de la razon de la progresion; pero la razon entre el primero y tercero, ó entre un término qualquiera y el que ocupa respecto de él el tercer lugar, es tambien el quadrado de dicha razon, luego se deduce la proporcion enunciada. Y como los tres primeros términos de una progresion son los de una proporcion continua, resulta que en esta se verifica igualmente dicha propiedad.

Del mismo modo demostraríamos que en toda progresion geométrica *el cubo del primer término es al cubo del segundo como el primero es al*

quarto; y en general que *la potencia* n *del primero es á la potencia* n *del segundo, como el primero al término que en la progresion ocupa el lugar expresado por* $n+1$; ó mas general aun, *que la potencia* n *de un término qualquiera es á la misma potencia del que le sigue como un término qualquiera es al que ocupa respecto de él un lugar expresado por* $n+1$.

290 Para encontrar la suma de una progresion geométrica observaremos que una progresion geométrica no es mas que una serie de razones iguales; y como en toda serie de razones iguales *la suma de los antecedentes es á la suma de los conseqüentes como un antecedente es á su conseqüente* (268 *teor.* 4.°), resulta que como en la progresion todos son antecedentes menos el último, si llamamos s á la suma de todos los términos será $s-u$ la suma de antecedentes; y como todos son conseqüentes menos el primero, tendremos que $s-a$ será la suma de los conseqüentes; llamando a al primer término y suponiendo que q sea la razon, será aq el segundo término y tendremos $s-u:s-a::a:aq::1:q$; de donde multiplicando extremos y medios sale

$$(s-u)q=(s-a)1\text{..... ó } sq-uq=s-a$$

que da $sq-s=uq-a$, ó $s(q-1)=uq-a$ y por último $s=\frac{uq-a}{q-1}$

Si en esta expresion substituimos el valor de u hallado antes, se nos convertirá en $\frac{aq^{n-1}q-a}{q-1}=\frac{aq^{n}-a}{q-1}=\frac{q^{n}-1}{q-1}\times a$.

Con esta fórmula y con la $u=aq^{n-1}$ podremos determinar dos qualesquiera de las mismas cantidades a, q, n, u, s, con tal que se den conocidas las otras tres.

Si en esta última despejamos la q sacaremos $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$

la qual nos podrá servir para interpolar medios geométricos entre dos números dados; para *lo qual no hay mas que dividir el último término por el primero, y del quociente extraer una raiz del grado que expresa el número de términos que ha de haber en todos menos uno*; *ó del grado que expresa el número de medios que se han de interpolar mas uno.*

291 La expresion de la suma nos va á dar á conocer todos los términos de una progresion; porque si en primer lugar trastornamos los signos de ambos términos del quebrado $\frac{q^{n}-1}{q-1}\times a$,

esto no altera en manera alguna ni su valor ni su signo, y así será:

$$s=\frac{q^{n}-1}{q-1}\times a=\frac{1-q^{n}}{1-q}\times a=(\S\ 186)\ (1+q+q^{2}+q^{3}\ldots q^{n-1})a=\ldots.$$

$$a+aq+aq^{2}+aq^{3}+aq^{4}\ldots.aq^{n-1},$$

y por lo mismo la progresion de que s es la suma será

$$\div\!\div a:aq:aq^{2}:aq^{3}:aq^{4}\ldots\ldots aq^{n-1},$$

que es una progresion geométrica general.

292 Quando las progresiones geométricas son decrecientes, continuadas indefinidamente tienen una suma finita y determinada; para encontrarla observaremos que siendo esta última una fórmula general de las progresiones geométricas, si queremos que esté continuada indefinidamente no deberemos suponer este último término; y así, su suma estará representada por $s=a+aq+aq^2+aq^3+\&c.$

Ahora, si multiplicamos esta equacion por q será

$$qs=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\&c.$$

y restando de esta expresion la anterior tendremos

$$qs-s=aq+aq^2+aq^3+\&c.-a-aq-aq^2-aq^3-\&c.$$

pero $+aq$ y $-aq$ se destruyen, $+aq^2$ y $-aq^2$ tambien, $+aq^3$ y $-aq^3$ tambien; y como lo que debe seguir que señalamos con el &c. debe ser igual con lo otro que señalamos con el $-\&c.$ resulta que $qs-s=-a$, de donde se saca $s(q-1)=-a$, ó mudando los signos $s(1-q)=a$, y por último será $s=\frac{a}{1-q}$;

lo qual nos da esta regla: *para hallar la suma de una progresion geométrica continuada indefinidamente, se dividirá el primer término por la diferencia que haya entre la unidad y la razon.*

Por esta causa la suma de la progresion $\div\div 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\&c.$ es $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

293 Hagamos ahora una observacion que nos será de la mayor importancia en lo sucesivo; y es que puesto que la suma de esta progresion es 2, si tomamos el primer término 1, como solo le falta 1 para llegar á 2, la suma de todos los términos que siguen al primero no valdrá mas de 1; si tomamos dos términos tendremos que $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, por lo que la suma de todos los términos que siguen solo valdrá $\frac{1}{2}$; si tomamos tres términos será $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ que solo le falta $\frac{1}{4}$ para 2 ú $\frac{8}{4}$; luego la suma de todos los términos que siguen al tercero, solo valdrá $\frac{1}{4}$; y en general podemos establecer que en una progresion de esta especie: *un término qualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen.*

Ahora, como esta propiedad se verifica quando los términos se van haciendo dos veces menores, resulta que quando la razon sea menor que $\frac{1}{2}$, entonces un término qualquiera será mayor que la suma de todos los que le siguen.

Para comprobarlo elegiremos la progresion $\div\div 1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\frac{1}{27}:\frac{1}{81}:\&c.$ cuya suma indefinida, si la queremos encontrar directamente sin auxîlio de la fórmula, será: $s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c.$

y multiplicando por $\frac{1}{3}$ será: $\frac{1}{3}s=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c.$

como aqui vemos que $\frac{1}{3}s<s$, restaremos desde luego esta última de la primera y será $s-\frac{1}{3}s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c.-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}-\&c.=1$

lo que da $\frac{2}{3}s=1$, y $s=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$.

Ahora, si tomamos un término solo de la progresion, como es 1, vemos que solo le falta para $\frac{3}{2}$ un medio que es menor que 1; si tomamos dos tér-

minos será $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$, que le falta para $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ solo $\frac{1}{6}$, que es menor que $\frac{1}{2}$; y como lo mismo nos resultaria en los demas términos, se deduce que aqui *un término qualquiera es mayor que la suma de todos los que le siguen.*

294 Toda fraccion periódica decimal la podemos considerar como una progresion geométrica; sea, por exemplo, la fraccion 0, *abc abc abc* &c. en la qual ponemos a, b, c en vez de los guarismos paraque las conseqüencias resulten con la mayor generalidad. Esta fraccion la podremos descomponer en las siguientes : $0,abc+0,000abc+0,000000abc+$&c.

ó (§ 138) en $\frac{abc}{1000}+\frac{abc}{1000000}+\frac{abc}{1000000000}+$ &c.

que es la suma de una progresion geométrica cuyo primer término es $\frac{abc}{1000}$, y la razon $\frac{1}{1000}$; luego llamándola s tendremos (§ 292)

$$s=\frac{\frac{abc}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{\frac{abc}{1000}}{\frac{1000-1}{1000}}=\frac{abc\times1000}{999\times1000}=\frac{abc}{999},$$ que da la regla (141).

De las equaciones de dos términos, nociones generales acerca de lo que los matemáticos llaman raices de las equaciones, y método de resolver las equaciones numéricas de segundo y tercer grado por procedimientos análogos á los de la extraccion de la raiz quadrada y cúbica.

295 Si nos propusiéramos, por exemplo, resolver la equacion $cx^m=b$, despojaríamos al primer miembro del coeficiente c, dividiendo toda la equacion por c lo que nos daria $x^m=\frac{b}{c}$; y ahora extrayendo la raiz m de ambos miembros será $x=\sqrt[m]{\frac{b}{c}}$. Esto ya lo sabíamos; pero aqui lo volvemos á considerar con el objeto de manifestar que pueden ser tantos los valores de x como unidades tiene el exponente m.

Para hacerlo ver llamaremos a al valor $\sqrt[m]{\frac{b}{c}}$, lo que dará $\frac{b}{c}=a^m$; y la equacion $x^m=\frac{b}{c}$, será $x^m=a^m$. Ahora, si x^m es igual con a^m, quitando del primer miembro la cantidad a^m que hay en el segundo, será $x^m-a^m=0$. Baxo este aspecto consideran los matemáticos las equaciones, y llaman *raiz de una equacion á todos los valores de* x *que pueden reducir á cero dicha equacion.*

Para manifestar que no solo quando $x=a$ se reduce esta equacion á 0,

descompondremos el primer miembro en sus factores (186) de este modo : $(x-a)(x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^2+....xa^{m-2}+a^{m-1})=0$
y tendremos que esta equacion será cero quando uno de los factores lo sea; luego serán raices de la equacion todos los valores que puedan hacer igual con cero al factor $x-a$, que es $x=a$,
y al $x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^2....xa^{m-2}+a^{m-1}=0$.

Todos estos valores tienen con la unidad relaciones muy simples que vamos á descubrir haciendo $x=az$; pues en virtud de esta hipótesis la equacion $x^m-a^m=0$, será $a^mz^m-a^m=0$,
ó dividiendo por a^m, tendrémos $z^m-1=0$ (A),
de donde se obtendrán los valores de x multiplicando por a los de z.

La equacion $z^m-1=0$ da en 1^er. lugar $z^m=1$, de donde $z=\sqrt[m]{1}=1$; pero dividiendo z^m-1 por $z-1$ que sacamos del primer valor $z=1$, nos resulta (§ 186) $z^{m-1}+z^{m-2}+z^{m-3}....z^2+z+1$,
que igualando con cero este quociente, tendrémos la equacion de donde dependen los otros valores de z, que tengan, así como la unidad, la propiedad de satisfacer á la equacion $z^m-1=0$ ó $z^m=1$,
es decir, que su potencia del grado m sea la unidad.

De aqui resulta una conseqüencia extraña al parecer, y es que la unidad puede tener muchas raices diferentes de ella misma.

Estas raices, aunque imaginarias, son de un uso muy freqüente en la análisis; pero ahora no podemos hacer conocer sino las de los quatro primeros grados, porque sino es para estos no tenemos medios de resolver la equacion $z^{m-1}+z^{m-2}+z^{m-3}+z^{m-4}...1=0$ que las da.

Supongamos 1.° $m=2$; y en este caso la equacion (A) será $z^2-1=0$ que da $z^2=1$, y $z=\pm 1$, esto es, $z=1$ y $z=-1$.

2.° Haciendo $m=3$ resulta $z^3-1=0$, ó (§186) $(z-1)(z^2+z+1)=0$, de donde sale $z-1=0$, que da $z=1$ y $z^2+z+1=0$,

que da (§ 253) $z=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1-4}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=$

$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

que separando los valores da $z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, y $z=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Las dos últimas expresiones son imaginarias; pero elevándolas al cubo por medio de la multiplicacion, se halla que todas dan $z^3=1$.

3.° Haciendo $m=4$, la equacion (A) se convierte en $z^4-1=0$, ó (§186) en $(z-1)(z^3+z^2+z+1)=0$ que da $z-1=0$ y $z^3+z^2+z+1=0$.

Pero como esta equacion es de tercer grado, resulta que no la podemos resolver aun; y así, descompondrémos á la (A) en dos de segundo en virtud de la observacion hecha (§ 179), pues segun esto $z^4-1=0$ es lo mismo que $(z^2-1)(z^2+1)=0$ que da $z^2-1=0$, ó $z^2+1=0$;

la 1.ª de estas da $z=\pm 1$, ó separando los valores $z=+1$, y $z=-1$; y la 2.ª $z=\pm\sqrt{-1}$ que separándolos da $z=+\sqrt{-1}$, y $z=-\sqrt{-1}$; donde tenemos que de los quatro valores los dos primeros son reales, é imaginarios los otros dos.

Esta multitud de raices de la unidad proviene de una ley general de las equaciones, por la qual una incógnita admite tantos valores como unidades hay en el exponente del grado de la equacion que la determina; y quando la qüestion no admite este número de soluciones reales, está completada por símbolos puramente algebráicos, que sometiéndolos á las operaciones indicadas en la equacion, la verifican.

De aqui se sigue que las raices de los números tienen dos especies de expresiones ó valores: la primera, á la qual podremos llamar *determinacion aritmética*, es el número que se encuentra por los procedimientos expuestos (239 y 249), y que es única para cada caso particular; la segunda comprende los valores negativos y las expresiones imaginarias, á las quales podremos llamar *determinaciones algebráicas*, porque no deben su existencia sino á la combinacion de los signos del Algebra.

296 Entre las obras de Vieta se halla un tratado con este título: *De numerosâ potestatum affectarum resolutione*, que nos parece tan ingenioso que no podemos menos de dar aqui una idea de él. Está reducido á resolver las equaciones numéricas por el método de extraccion de raices; él llega por este medio hasta resolver las equaciones de sexto grado. Nosotros no presentaremos aqui sino las de segundo y tercer grado, porque esto bastará para nuestro objeto; no lo haremos como el mismo Vieta porque su método exîge un artificio demasiado grande, sino que lo executaremos de un modo que no parezca tan artificial.

Supongamos que se nos da la equacion $x^2+7x=60750$; si descomponemos el primer miembro en factores, tendremos $x(x+7)=60750$; donde se ve que la qüestion está reducida *á encontrar un número tal que multiplicándole por la suma de dicho número con siete, resulte* 60750.

Esto supuesto, dividiremos el número 60750 en periodos de dos en dos guarismos como si fuésemos á extraer la raiz quadrada, y veremos qual es el mayor quadrado que está contenido en el primer periodo; y como es 4 pondremos 2 en la raiz, multiplicaremos este primer guarismo 2 por el mismo 2 junto con el 7; pero este 2 que hemos sacado ha de expresar centenas puesto que tenemos tres periodos (§ 239), y como el 2 por el 2 dará el quadrado 4 de las centenas le colocaremos debaxo del primer periodo 6; el guarismo 2 que ha de expresar centenas

```
6,07,50 | 243
4       | 2+7
 14
-------
19350   | 4 primer divisor
16
 16
  28
-------
01470   | 48 2.º divisor
 144
   9
  21
-------
 0000
```

multiplicado por las unidades que son 7 dará 14 centenas, que deberemos colocar desde las centenas en adelante; por lo mismo colocaremos el 14 en un reglon mas abaxo que el 4 de modo que caiga debaxo de las centenas; sumaremos estas dos expresiones y al mismo tiempo efectuaremos la resta diciendo: 4 es 4, de 4 á 7 ván 3; 1 es 1, de 1 á 10 van 9, y llevo 1; 4 es 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 6 va 1; saco por consiguiente la resta 193, á cuyo lado baxo todo lo que hay del número propuesto.

Ahora, para sacar el segundo guarismo debemos hacer lo mismo que en la raiz quadrada, esto es, separar el último guarismo del periodo que sigue al primero de que se extraxo la raiz quadrada, y dividir lo que quede á la izquierda por el duplo de la raiz hallada que es aqui 4; por consiguiente señalaré de un modo qualquiera por exemplo con un punto puesto encima ó debaxo, el guarismo 3 que es el que corresponde al segundo periodo, y dividiré lo demas, esto es el 19 que queda, por 4, y el quociente 4 le pondré al lado del 2 anterior; hallado este segundo guarismo tengo que formar las dos partes del quadrado y ademas el producto de 7 por este guarismo; por lo mismo diré: 4 por 4 son 16 que pondré debaxo del 19, porque el duplo de la raiz hallada por el quociente debe ocupar este lugar; luego diré: el quadrado del quociente 4 es 16 que pondré debaxo del 16 anterior, corriéndole un lugar hácia la derecha; y finalmente multiplicaré el quociente 4 por el 7 y pondré el producto 28 debaxo del anterior, corriéndole un lugar hácia la derecha, porque expresando el 4 de la raiz decenas, este producto tambien expresará decenas; sumaré estas tres partidas y al mismo tiempo las restaré de lo de arriba diciendo: 8 es 8, de 8 á 15 van 7; 6 y 2 son 8 y 1 que llevábamos son 9, de 9 á 13 van 4, y de 13 llevo 1; 6 y 1 que llevaba son 7, y 1 son 8, de 8 á 9 va 1, y de 9 no llevo nada; 1 es 1, de 1 á 1 no va nada, y por consiguiente nos resulta la resta 147, que agregándole el 0 del qual no se restó queda 1470.

En esta resta apuntaremos el último guarismo 0, dividiremos lo que quede á la izquierda por 48, duplo de la raiz hallada, y el quociente 3 le pondremos en la raiz hallada. Multiplicaremos el 48 por dicho quociente, y el producto 144 le pondremos debaxo del 147; quadraremos el quociente y su quadrado 9 le pondremos debaxo un lugar mas hácia la derecha, que será debaxo del último guarismo; finalmente multiplicaré el 3 por el 7, y el producto 21 le colocaré debaxo de las unidades, porque el producto de 3 que expresa unidades debe ser unidades; sumaré estas tres partidas, y restándolas al mismo tiempo veo que me sale por resta cero, lo que manifiesta que el número que buscaba es 243.

Si hubiera quedado resta se le podrian haber añadido dos ceros, y sacar un guarismo decimal, y así sucesivamente.

Si se nos propusiese resolver la equacion $x^2+6x=58155867$ procederíamos como se presenta en la página siguiente (A):

297 Pasemos ya á las equaciones de tercer grado, y propongámonos, por exemplo, resolver la equacion $x^3+30x=14356197$.

Descompondremos el primer miembro en $x(x^2+30)$, y tendremos la qüestion reducida *á encontrar un número tal que si se multiplica por su quadrado mas* 30, *resulte un producto igual con* 14356197.

Para esto extraeremos la raiz cúbica de este número por el método expuesto (249), y al mismo tiempo multiplicaremos los guarismos que váyamos sacando por el 30, colocando el producto donde corresponda, y restándole, junto con las partes del cubo, en la forma que se ve en (B):

```
          (A)
58,155,867 | 7623
49         | 7.....+6
  42
---------
091,38,67  | 14   1.er divisor
 84
  36
   36
---------
03502,67   | 152  2.o divisor
  304
     4
    12
---------
 045747    | 1524 3.er div.
  4572
      9
     18
---------
  00000
```

```
      (B)                 43
14,356,197 | 25
 8         | 2...+30
    60
---------
06350,197  | 12   1.er divisor
 48
  96
   64
   120
---------
 0524997   | 1728 2.o divis.
  5184
   648
     27
     90
---------
  000000
```

Despues de dividido el número en periodos de tres en tres guarismos, veo que el mayor cubo contenido en 14 es 8 cubo de 2, pongo por consiguiente 2 en la raiz y el cubo 8 debaxo del 14; el 2 de la raiz expresa centenas porque hemos sacado la raiz del tercer periodo, y por lo mismo multiplicándolas por 30 darán 60 centenas; luego deberé poner 60 en un renglon inferior al 8, y debaxo del 1 que expresa las centenas; sumaremos y restaremos á un tiempo de este modo: o es o, de o á 1 va 1; 6 es 6, de 6 á 6 no va nada; como en los otros lugares no hay guarismos que se deban restar, pondré los de arriba ó iré diciendo: de o á 5 van 5, de o á 3 van 3, de 8 á 14 van 6, y llevo 1; de 1 á 1 no va nada; y baxando los otros dos guarismos 97 de que no resté, conservo la última coma en su lugar y apunto el 5 por lo dicho (249). y lo que queda á la izquierda lo dividiré por 12 triplo del quadrado de la raiz hallada; encuentro por quociente 5 que pongo; pero como al formar las dos primeras partidas del cubo veo que la suma de los guarismos de especie superior da 7, que es mayor que 6, infiero que debo po-

ner menos en la raiz; por consiguiente borraré lo que tengo escrito y pondré 4; formaré las tres partes del cubo, y ademas multiplicaré el 4 por el 30, poniendo el producto 120 debaxo de las decenas; sumo y resto, y en la resta 524997 apunto el primer 9, divido todo lo que queda á la izquierda por 1728 triplo del quadrado de la raiz hallada 24, y el quociente 3 lo pongo en la raiz; efectúo las tres partes del cubo y el producto de 3 por 30, sumo y resto, y como no me sale diferencia infiero que el número que busco es 243.

Si nos propusiéramos resolver la equacion $x^3+531x=581351037462$, executaríamos la operacion como aqui se presenta (G).

```
581,351,037,462 | 8346          (G)
512             |--------
         4248   | 8.....531
----------------|
069346,789,462  | 192 1.er div.
  576
   216
     27
       1593
-----------------
 095596 30,162  | 20667 2.°
  82668
    3984
        64
        2124
-----------------
  1252904922    | 2086668 3.°
  1252000 8
       90072
          216
         3186
-----------------
  0000000000
```

De las permutaciones y combinaciones, y de la elevacion de un binomio á una potencia qualquiera.

298 Se llaman *permutaciones* á los diferentes modos que hay de disponer ó colocar muchas cosas ó cantidades las unas respecto de las otras; y se llaman *combinaciones* á los diferentes modos que hay de tomar muchas cantidades ó cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres, &c. sin atender al órden con que se han de colocar.

Principiaremos por las permutaciones, y elegiremos por signos de las cosas por permutar las letras del alfabeto por ser bastante conocidas. Si tubiéramos una sola letra tal como a, esta no admitiria nada mas que una permutacion, por quanto, respecto de ella, de qualquiera manera que se coloque estará sola. Si tomamos ahora dos letras a y b se podrán colocar de dos maneras diferentes, porque la a se puede poner antes de la b ó despues de la b, en esta forma ab, ba; luego dos letras se pueden permutar de 2×1 maneras. Si suponemos ahora otra tercer letra c, esta se podrá colocar antes, en el medio y al fin de cada permutacion anterior, y tendremos las seis siguientes cab, acb, abc, cba, bca, bac; luego tres cantidades ofrecen un número de permutaciones expresado por $3\times2\times1$. Y en general siguiendo el mismo raciocinio podríamos determinar que un número n de letras, cantidades ó cosas, ofrece un número de permutaciones que estaba expresado por $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots2\times1$.

Hemos llegado á este resultado por la induccion, y estamos seguros de que nadie dudará de su exâctitud; pero no obstante vamos á manifestar esto analíticamente, proponiéndonos la proposicion como

Problema. *Determinar de quántas maneras se pueden permutar* n *letras, cantidades ó cosas.*

Supongamos que se tienen ya formadas todas las permutaciones de $n-1$ letras; y tendremos que para obtener el de n letras será necesario introducir en cada permutacion la nueva letra en todos los lugares posibles; luego la podremos colocar antes de la primera, antes de la segunda &c... antes y despues de la última; luego un término compuesto de $n-1$ letras daria n compuestos de n letras. Así, representando por x las permutaciones de que son susceptibles n letras, y por x' las que corresponden al número $n-1$ de letras, se tendria la equacion $x=nx'$.

Esta equacion se verifica en qualquier valor de n; luego si representamos por x'', x''', x^{IV},......$x^{(n-1)'}$ el número de permutaciones de que son susceptibles $n-2$, $n-3$....$n-(n-1)$ letras, se tendrá:
$x'=(n-1)x''$; $x''=(n-2)x'''$; &c. $x^{(n-1)'}=n-(n-1)=n-n+1=1$, porque una letra no es susceptible sino de una permutacion. Substituyendo en vez de $x^{(n-1)'}$, $x^{(n-2)'}$, &c. sus valores en las equaciones precedentes se tendrá $x=n(n-1)(n-2)(n-3)....[n-(n-1)]$ como antes.

Al intentar hallar las permutaciones puede suceder que se determine el número de cosas que han de entrar en cada permutacion; y así, nos propondremos el siguiente:

Problema. *Dadas* n *letras* a, b, c, d, &c. *determinar el número de permutaciones que pueden resultar, con tal que no entren sino* m *letras en cada permutacion.*

Res y *Dem.* Sea z el número buscado, z' el número de las permutaciones de $n-1$ letras tomadas de $m-1$ en $m-1$ letras; é indaguemos, como en la qüestion precedente, el medio de hacer depender z de z'. Para esto observaremos que colocando la letra a delante de cada permutacion de las $n-1$ letras tomadas de $m-1$ en $m-1$, se tendrian todas las permutaciones de m letras, en las quales la letra a ocuparia el primer lugar; y el número de estos términos seria z'; del mismo modo colocando la letra b delante de cada permutacion de las otras $n-1$ letras a, c, d, &c. tomadas tambien de $m-1$ en $m-1$, se tendrian todas las permutaciones de m letras, en las quales la letra b ocuparia el primer lugar, lo que daria tambien z' términos. Haciendo el mismo raciocinio para cada una de las letras c, d, &c. se tendrian á cada vez z' términos: luego, pues que el número de las letras es n, se tendrian en todas nz' términos; y así resultaria como en la qüestion precedente $z=nz'$.

Y representando por z'', z''' &c. el número de permutaciones de $n-2$ letras tomadas de $m-2$ en $m-2$, de $n-3$ letras tomadas de $m-3$ en $m-3$, &c. tendremos estas equaciones $z'=(n-1)z''$, $z''=(n-2)z'''$ &c. Y si señalamos con $z^{(m-1)'}$ el número de permutaciones que dan

$n-(m-1)$ letras tomadas de $m-(m-1)$ en $m-(m-1)$ ó de una en una, se tendrá $z^{(m-1)\prime}=n-(m-1)$, por lo que substituyendo en las equaciones precedentes estos valores hasta la primera se hallará

$$z=n(n-1)(n-2)(n-3)...[n-(m-1)].$$

De esta fórmula se puede deducir el número de permutaciones de n letras, haciéndolas entrar todas ellas en cada una, para lo qual basta hacer $n=m$, lo que nos dará: $z=x=n(n-1)(n-2)(n-3)....2\times1$.

299 Finalmente, para determinar el número de combinaciones nos propondremos el siguiente:

Problema. *Dado un número qualquiera* n *de letras, determinar quántas combinaciones diferentes dan tomándolas de* m *en* m *letras.*

Res. y Dem. Si estos productos fuesen conocidos, dando á las letras que entran en cada término todas las permutaciones posibles, se tendrian todas las diferentes disposiciones de n letras tomadas de m en m. Y pues que cada combinacion ha de estar compuesta de m letras, para cada término se tendrian $1.2.3....m$ permutaciones;
luego si se representa por C el número de las combinaciones, se tendrá:

$$C.1.2.3.....m=(\S 286)n(n-1)(n-2)(n-3).....[n-(m-1)]$$

de donde sale $C=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)...[(n-(m-1)]}{1.2.3.4....m}$

Todos los casos particulares se deducen fácilmente de esta fórmula. Haciendo en ella $m=1$ se tiene la expresion $C=n$. Haciendo $m=2$, la expresion se convierte en $\dfrac{n(n-1)}{2}$; y si suponemos ahora que $n=5$ se tendrá $C=\dfrac{5.4}{2}=\dfrac{20}{2}=10$, que son los diez ambos que se pueden sacar á la lotería, en el supuesto de acertar los cinco números que salen. Haciendo $m=3$ tendremos $C=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$;
que suponiendo $n=5$ se convierte en $C=\dfrac{5.4.3}{2.3}=5.2=10$, que son tambien los diez ternos que se pueden sacar á la lotería en el mismo supuesto.

300 Entendido esto, pasemos á determinar la expresion $x+a$ elevada á una potencia qualquiera. Ya hemos visto que

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2, \text{ que } (x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$$

y tambien por la multiplicacion sucesiva nos cercioramos de que

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4, \text{ \&c.}$$

pero esta multiplicacion no hace percibir claramente la ley de los coeficientes numéricos de estos resultados. Reflexionando acerca del procedimiento de la multiplicacion, se echará de ver que los coeficientes numéricos nacen de las reducciones que trae consigo la igualdad de los

factores que forman una potencia, y que impidiendo estas reducciones se hará mas perceptible la composicion de estos productos.

Para conseguir el efecto que deseamos basta dar á todos los binomios que se multiplican, segundos términos diferentes entre sí, esto es, que bastará tomar, v. g. $x+a, x+b, x+c, x+d$, &c.

y efectuando las multiplicaciones, y colocando en columna todos los términos donde se halle x con un mismo exponente, tendremos:

1.ª $(x+a)(x+b)=x^2+ax+ab$
$\qquad\qquad\qquad\qquad +bx$

2.ª $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+ax^2+abx+abc$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +bx^2+acx$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +cx^2+bcx$

3.ª $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +bx^3+acx^2+abdx$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +cx^3+adx^2+acdx$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +dx^3+bcx^2+bcdx$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +bdx^2$

&c. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +cdx^2$

Sin efectuar mas productos que estos se puede ya reconocer la ley de su formacion; y concibiendo que todos los términos afectos de la misma potencia de x, y colocados en la misma columna, no forman sino uno solo, como por exemplo: $ax^3+bx^3+cx^3+dx^3=(a+b+c+d)x^3$, y así de los demas, tendremos:

1.º *Que en cada producto se halla un término mas que unidades hay en el número de sus factores.*

2.º *Que el exponente de* x *en el primer término es el mismo que el número de los factores; y va disminuyendo una unidad de un término al otro, hasta que en el último ya no se halla ó se halla con el exponente cero, que entonces siendo igual con la unidad desaparece enteramente.*

3.º *Que en el primer término no tiene coeficiente la* x; *en el segundo tiene por coeficiente á la suma de los segundos términos de los binomios; en el tercero tiene por coeficiente á la suma de los diferentes productos que se obtienen multiplicando de dos en dos los segundos términos de los binomios; en el quarto el coeficiente de* x *es la suma de los diversos productos que se obtienen, multiplicando de tres en tres los segundos términos de los binomios, y así sucesivamente; de manera que el último término que no contiene á* x, *ó la contiene elevada á cero que equivale por lo mismo á la unidad, está representado por el producto de todos los segundos términos de los binomios.*

301 La analogía nos manifiesta que la forma de estos productos debe ser la misma qualquiera que sea el número de factores; pero no obstante daremos otra razon.

Para esto demostraremos que todo producto de esta especie debe con-

tener las potencias sucesivas de x desde aquella en que el exponente es igual al número de factores que se han multiplicado, hasta aquella cuyo exponente es cero. Y así, para señalar el resultado con generalidad se expresará este número por la letra n, con lo qual quedarán indicadas las potencias sucesivas de x por $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, x^{n-4}$, &c. y poniendo $P, Q, R....Y$ por sus coeficientes partiendo desde el segundo término que es donde se halla x^{n-1}, tendremos que el producto de n factores estará representado por $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}....+Y$ expresion en que no pudiéndose escribir sino los primeros y últimos términos mientras no se determine n, señalamos con puntos todos los que pueden faltar.

Ahora, multiplicando este resultado por un nuevo factor $x+l$,

$$\text{tendremos}\begin{cases} x^{n+1}+Px^n+Qx^{n-1}+Rx^{n-2}....+Yx \\ \quad +lx^n+Plx^{n-1}+Qlx^{n-2}.........+lY \end{cases}$$

en cuya expresion observaremos

1.º *Que si* P *es la suma de los* n *segundos términos* a, b, c, d &c. P+l *será la de los* n+1 *segundos términos* a, b, c, d, &c. l, *y por consiguiente la composicion señalada á este coeficiente será verdadera para el producto del grado* n+1 *si es verdadera para el grado* n.

2.º *Si* Q *es la suma de los productos de las* n *cantidades* a,b,c,d,&c. *tomadas de dos en dos*, Q+lP *expresará la de los productos de* n+1 *cantidades* a,b,c,d,&c. l, *tomadas tambien de dos en dos*; porque siendo P la suma de las primeras, lP será la suma de sus productos por la nueva cantidad introducida l; luego la composicion señalada será verdadera para el grado $n+1$ si lo es para el grado n.

3.º *Si* R *es la suma de los productos de* n *cantidades ó letras* a,b,c,d,&c. *tomadas de tres en tres*, R+lQ *será la de los productos de* n+1 *cantidades* a, b, c, d &c, l, *tomadas tambien de tres en tres*; pues siendo Q la suma de los productos de las primeras tomadas de dos en dos, multiplicada por la nueva cantidad introducida l dará los diferentes productos de las letras tomadas de tres en tres; luego la composicion señalada será verdadera para el grado $n+1$ si lo es para el grado n.

Donde se ve que este modo de discurrir se extiende á todos los términos, y que el último lY será el producto de los $n+1$ segundos términos de los binomios.

Siendo verdaderas las advertencias hechas para el producto de quarto grado, por exemplo, lo serán segun lo que se acaba de ver para el de quinto, para el de sexto, y elevándose así de grado en grado quedarán enteramente probadas.

302 Ahora, suponiendo que los segundos términos de los n factores $x+a, x+b$, &c. son iguales entre sí, el producto se convertirá en la potencia n del binomio $x+a$, y tomará por consiguiente esta forma:

$$x^n+nax^{n-1}+Aa^2x^{n-2}+Ba^3x^{n-3}+Ca^4x^{n-4}+\&c.$$

Los coeficientes A, B, C, &c. representan el número de productos dife-

rentes que se pueden formar con n letras, tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c.

Pero los productos diferentes que se pueden formar con un número qualquiera de cosas, letras ó cantidades, tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. es lo mismo que el número de combinaciones que se pueden formar con dichas cantidades, porque en los productos no altera en nada la permutacion de los factores; luego A tendrá esta forma $\frac{n(n-1)}{2}$, por ser el número que expresa los productos diferentes ó combinaciones que se pueden formar con n letras tomadas de dos en dos; B tendrá esta forma $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}$, porque es el número de combinaciones de n letras de tres en tres; C será igual á $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}$ y así sucesivamente; luego $(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^2x^{n-2}+$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}a^3x^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}a^4x^{n-4}+$&c.
y un término qualquiera del desarrollo, ó el término general suponiendo que m exprese el número de términos que hay antes de él, estará representado por $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(m-1)]}{1.2.3.4\ldots\ldots m}$,

ó resolviendo en factores, por $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}a^mx^{n-m}$.

Si en vez de m suponemos $m+1$, tendremos en esta expresion el término que ocupa el lugar $m+2$, y será

$$\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}\times\frac{n-m}{m+1}a^{m+1}x^{n-(m+1)};$$

y dividiendo esta expresion por la anterior, como convienen en todos los factores del divisor menos en el último, los podremos suprimir, y tendremos solamente $\frac{\frac{n-m}{m+1}a^{m+1}x^{n-m-1}}{a^mx^{n-m}}=\frac{n-m}{m+1}\times\frac{a}{x}$.

Luego despues de sacado un término qualquiera, para sacar el siguiente no hay mas que multiplicar el último por $\frac{n-m}{m+1}\times\frac{a}{x}$; pero como $n-m$ es el exponente de la primera parte en el término anterior, y $m+1$ el lugar que dicho término anterior ocupa en la fórmula, resulta esta regla sencilla para la práctica: *multiplíquese el término anterior ó última-*

mente formado por el exponente que en él lleva la primera parte del binomio; divídase este resultado por el número que expresa el lugar que ocupa dicho término anterior en la expresion; y multiplíquese tambien por el quociente de dividir la segunda parte del binomio por la primera, lo que se executa disminuyendo una unidad al exponente de la primera parte y aumentándola en el de la segunda.

Conviene mucho acostumbrarse á executar operaciones de estas, y así nos propondremos elevar á la 7ª. potencia la cantidad $c+d$, y se tendrá:
$(c+d)^7=c^7+7c^6d+21c^5d^2+35c^4d^3+35c^3d^4+21c^2d^5+7cd^6+d^7$.

Diciendo: el primer término es el primero del binomio, elevado á la potencia que indica el exponente; y así será c^7. Ahora, para hallar el segundo nos podemos valer desde luego de que su coeficiente es el exponente de la potencia, ó sacarle por la regla general diciendo: 7, exponente de c en el término anterior, por 1, su coeficiente, y dividido por 1, lugar que ocupa dicho término anterior, da 7; disminuiremos el exponente de la c en una unidad, y haremos que aparezca la d con la unidad por exponente; despues diremos: 7 por 6 son 42; 42 dividido por 2 son 21, y por consiguiente el tercer término será $21c^5d^2$; para el siguiente diremos: 21 por 5 son 105, que dividido por 3 da 35; por lo que dicho término será $35c^4d^3$; el coeficiente del siguiente será
$\frac{35\cdot4}{4}=35$; el del otro $\frac{35\cdot3}{5}=\frac{5\cdot7\cdot3}{5}=7\cdot3=21$;

el del otro será $\frac{21.2}{6}=\frac{3.7.2}{3.2}=7$; el del otro será $\frac{7.1}{7}=1$;

y como en este ya no se halla la primera parte ó se halla con un exponente 0, aplicando la regla para el coeficiente del término siguiente daria
$\frac{1.0}{1.8}=\frac{0}{8}=0$; luego el coeficiente de este término y por consiguiente el mismo término seria 0; y todos los demas que han de resultar de la multiplicacion de este tambien lo serán.

Esto tambien nos lo manifiesta la expresion del término general, porque como en él se hallan los factores n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. en llegando á $n-n$, que aqui es $7-7$, debe ser 0 este término, y todos los que le siguen, porque contienen este factor.

Esta fórmula que hemos obtenido se conoce con el nombre de fórmula del *binomio de Neuton*; este admirable geómetra la dió sin demostracion, y la aplicó para quando n era un número entero, quebrado, positivo ó negativo. Con los conocimientos que tenemos hasta ahora no la podemos demostrar sino para quando n es un número entero, como lo acabamos de executar; en adelante la manifestaremos en los demas casos, y por dos métodos muy diversos.

303 Quando el exponente es un número entero, la expresion tiene un número finito de términos; y en habiendo formado la mitad de

ellos, los coeficientes son los mismos que los de los anteriores como se ha podido observar en $(c+d)^7$, y en todas las (300); pero no obstante demostraremos esta propiedad enunciándola en el siguiente:

Teor. *Dos términos del desarrollo de $(x+a)^n$, equidistantes de los extremos, tienen un mismo coeficiente numérico.*

Dem. Para demostrarlo supongamos que los términos se hallen m lugares distantes, tanto del primero como del último. El que dista m lugares del primero, ocupará el lugar $m+1$ en dicho desarrollo, ó lo que es lo mismo, tendrá m términos antes de él; luego su coeficiente será

$$(\S\ 302)\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)[n-(m-1)]}{1.2.3.4...m}\ \text{(A)}.$$

Llamemos r al lugar que ocupa despues del primero el término que dista m lugares del último; ó lo que es lo mismo, sea r el número de términos que hay antes del que dista m lugares del último, y tendremos que su coeficiente será $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)....[n-(r-1)]}{1.2.3.4....r}$ (B).

Luego todo está reducido á probar que las expresiones (A) y (B) son iguales: con cuyo objeto observaremos que siendo n el exponente de la potencia, el número total de términos (§ 300, 1.º) será $n+1$; y como antes del término que tiene á (B) por coeficiente hay r términos, y despues de él hay m términos, resulta que si sumamos r con m, y añadimos la unidad por el mismo término cuyo coeficiente es (B), tendremos el número total de términos del desarrollo; luego será $r+m+1=n+1$, de donde resulta $r=n-m$.

Luego si substituimos en vez de r este valor en (B), tendremos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...[n-(n-m-1)]}{1.2.3.4....(n-m)};$$

y como $n-(n-m-1)=n-n+m+1=m+1$, esta expresion se nos convertirá en $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)....(m+1)}{1.2.3.4...(n-m)}$ (C),

y todo está reducido á probar que esta expresion (C) es igual con la (A); para lo qual nos basta manifestar que reducidas á un comun denominador, tienen iguales sus numeradores; pero efectuando esta operacion se obtienen los numeradores

$$n(n-1)(n-2)(n-3)...[n-(m-1)].1.2.3...(n-m)\ (A')$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)...(m+1).1.2.3...m\ (C').$$

Pero (A′) es el producto de los números naturales desde n hasta $n-(m-1)$ multiplicado por los números naturales que hay desde $n-m$ hasta la unidad, ó el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n inclusive; y como el (C′) ofrece el mismo producto queda demostrada la proposicion.

Esc. 1.º Hubiéramos podido dar esta demostracion con mas breve-

dad, observando: 1.° que el desarrollo del binomio $(x+a)^n$ debe permanecer el mismo, aunque se mude x en a y a en x, y se obtenga v.g. $(a+x)^n$; y 2.° que los coeficientes no dependen sino del exponente y de números que expresan los lugares; de donde resulta que partiendo de los dos términos extremos, los coeficientes de los términos que ocupan el mismo lugar deben ser los mismos.

Esc. 2.° De la fórmula del binomio de Neuton, y haciendo observaciones análogas á las hechas respecto del quadrado y cubo, podemos sacar la siguiente regla para extraer una raiz qualquiera de una cantidad numérica: *divídase el número propuesto en periodos de tantos guarismos como unidades tiene el exponente de la raiz que se quiere sacar; véase qual es la mayor potencia de aquel grado contenida en el primer periodo de la izquierda, póngase en la raiz, y dicha potencia réstese de dicho periodo; al lado de la resta báxese el periodo siguiente, sepárense tantos guarismos menos uno como unidades tiene el exponente de la raiz que se quiere extraer; elévese la raiz hállada á una potencia una unidad menos que el grado de la raiz que se extrae, multiplíquese esto por el exponente de dicha raiz, y este será el número por qué se deberá dividir lo que queda á la izquierda de la coma; despues se formarán las partes de dicha potencia, y se continuará del mismo modo.*

De los Logaritmos.

304 En general se llaman *logaritmos* los términos de una progresion aritmética correspondientes á los de una progresion geométrica que se llaman números; de manera que si reunimos las dos progresiones

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot \&c.$$
$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : \&c.$$

los términos 3, 5, &c. de la primera son los logaritmos de sus correspondientes 2, 4, 8. &c. de la segunda que se llaman números. Si la progresion aritmética tiene por primer término cero y la geométrica por primer término la unidad, entonces estas dos progresiones suministran los medios mas expeditos para abreviar las operaciones; y si á esto se agrega el que la razon de la progresion aritmética sea la unidad, entonces dichas progresiones formarán un *sistema* de logaritmos; por exemplo: las dos progresiones

$$\left.\begin{array}{l}\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \;\&c.\\ \div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 \;\&c.\end{array}\right\} (P) \text{ forman un sistema.}$$

Y como en este caso los términos de la progresion geométrica estan formados (269) por una potencia de la razon, á la progresion geométrica que expresa los números la podemos representar por $\div\div 3^0 : 3^1 : 3^2 : 3^3 : \&c.$ y como en esta el exponente de la razon es el término de la progresion aritmética ó el logaritmo, resulta que á dicha razon se la llama *base del sistema*, y que en todo sistema *el logaritmo de un número es igual al exponente de una potencia de la base igual con dicho número.*

En todo sistema se conoce qual es la base, porque es el número que tiene por logaritmo la unidad.

Reunidas dos progresiones en que la aritmética empiece por *cero* y la geométrica por *uno* tales como las (P), se tendrá que un término qualquiera de la progresion aritmética se compondrá de tantas veces la razon como términos hay antes de él (285); y uno qualquiera de la geométrica se compondrá de una potencia de la razon expresada por el número de términos que hay antes de él (289); y como estas dos progresiones se corresponden el primer término de la una con el primer término de la otra, el segundo con el segundo, el tercero con el tercero, &c. resulta que *en un término qualquiera de la progresion aritmética será la razon tantas veces sumando como en el término correspondiente de la geométrica sea factor la razon de esta.*

Luego si se suman dos términos de la progresion aritmética, en la suma estará contenida tantas veces por sumando la razon quantas esté por factor en el término correspondiente de la progresion geométrica; y por consiguiente este término de la geométrica será el producto de los dos correspondientes á aquellos dos de la aritmética que se sumaron.

Esto quiere decir que *para multiplicar por logaritmos se suma el logaritmo del multiplicando con el logaritmo del multiplicador, se busca en las tablas del sistema el número que corresponde á este logaritmo y este será el producto*; así, para multiplicar el 9 por el 81 sumaremos el 2 logaritmo de 9 con el 4 logaritmo de 81, y veremos que la suma 6 corresponde al número 729, que es el producto verdadero de 9 por 81.

Para dividir por logaritmos se resta el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, se busca en las tablas el número que corresponde á este logaritmo y este será el quociente, cuyo procedimiento está fundado en que siendo el dividendo igual al producto del divisor por el quociente, el logaritmo del dividendo ha de ser igual á la suma del logaritmo del divisor con el del quociente; y por consiguiente el logaritmo del quociente igual á la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el del divisor; y así, para dividir 243 por 27 restaremos de 5 logaritmo de 243 el 3 logaritmo de 27, y como la diferencia 2 corresponde al número 9, digo que 9 es el quociente de dividir 243 por 27.

Para elevar á potencias se multiplica el logaritmo de la cantidad por el exponente de la potencia, se busca en las tablas el número que corresponde á este logaritmo, y esta será la potencia; cuyo procedimiento está fundado en que en la potencia está contenida por factor tantas veces la raiz como unidades tiene el exponente de la potencia: y de consiguiente se habrá de sumar consigo mismo el logaritmo de la raiz tantas veces como unidades tiene dicho exponente. Y así, para elevar el 9 á la tercera potencia multiplicaremos el 2 que es el logaritmo de 9, por 3, y el producto 6 veremos que corresponde al 729, que es en efecto la tercera potencia del 9.

Para extraer raices se divide el logaritmo de la cantidad por el exponente de la raiz, se busca en la tabla el número á que corresponde este logaritmo, y esta será la raiz que se deseaba; cuyo procedimiento está fundado en que extraer raices es lo contrario de elevar á potencias, y por lo mismo se ha de seguir la regla opuesta; por lo que si se quisiera extraer la raiz segunda de 729 dividiríamos el 6 logaritmo de 729 por 2 exponente de la raiz quadrada, y el quociente 3 veríamos que corresponde á 27, que es la raiz quadrada de 729.

Si las progresiones no tuviesen la circunstancia expresada arriba, se deberian añadir algunas otras reglas para encontrar estos resultados, que no expondremos por no traer utilidad alguna.

305 Puesto que las operaciones de multiplicar se reducen por logaritmos á operaciones de sumar, las de dividir á restar, las de elevar á potencias á simples multiplicaciones, y la extraccion de raices á simples divisiones, resulta que con el auxîlio de los logaritmos se abrevian considerablemente todas estas operaciones complicadas. Por lo qual es un asunto de la mayor importancia el dar á conocer los métodos con que se tienen calculados los logaritmos de los números.

Para la formacion de las tablas se ha elegido por base el número 10, por ser la raiz de la escala aritmética que nos sirve en nuestro sistema de numeracion; de manera que se han reunido las progresiones siguientes.

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, \&c.$$
$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 \&c.$$
$$\div\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7 \&c.$$

donde se ve que las dos últimas son una misma, solo que en la tercera estan indicadas las operaciones y en la segunda estan efectuadas; y tambien se advierte que los logaritmos no son sino los exponentes á que se ha de elevar la base para producir los números.

Estas progresiones aunque se continuasen todo lo que se quisiese, no nos suministrarian unas grandes ventajas; pues las operaciones de multiplicar, dividir, &c. por 10, por 100, &c. no cuestan ningun trabajo. Y así, todo el mérito consiste en hacer que los números 2, 3, 4, 5, &c. formen parte de esta progresion geométrica, y que se tengan sus términos correspondientes en la aritmética. Para esto lo primero que se presentó á los primeros calculadores de logaritmos fue que si entre 1 y 10 interpolaban un número considerable de medios geométricos, por exemplo 10.000000, la diferencia entre ellos seria muy corta, y por consiguiente entre estos términos los habrá que se diferencien muy poco de los números 2, 3, &c. y executando lo mismo entre 10 y 100 se tendrian tambien términos muy próxîmos á 11, 12, &c. Si se executaba la misma interpolacion en la progresion aritmética se podrian entresacar de esta los términos que correspondiesen á los números que en la geométrica se aproxîmasen mas á 2, 3, 4, &c. y se tendrian de este modo, colocando en una

columna estos números y en otra á su lado los logaritmos, construidas nuestras tablas.

Pero el hacer esta interpolacion exîgia (290) que se dividiese el 10 por 1, y que del quociente 10 se extraxese una raiz cuyo exponente fuese 10000001, cosa que no pudiéndose executar porque no habria papel ni cabeza para ello, aunque el método general de practicarlo se conoce (303), se abandonó este medio y se eligió el siguiente.

En primer lugar entre 1 y 10 se interpoló un medio geometrico y se halló el 3,1622&c. que en la tabla adjunta está señalado con C, y se hizo igual interpolacion entre 0 y 1 de la progresion aritmética, y se halló el correspondiente 0,5000000&c. Ahora, si entre 1 y 3,1622 &c. que estan representados por A y C en la tabla, interpolamos otro medio geométrico, tendremos dos números que se diferenciarán menos entre sí, y por medio á 1,778&c. que está representado en la tabla por D; continuando la misma operacion interpolando medios entre los términos mas próxîmos que se halle el 2, y executando la misma operacion con los correspondientes en la aritmética, al cabo de la 24.ª operacion sacamos por término medio, como se ve en la tabla de la página siguiente, el Δ que es 2,0000000, que solo se diferenciaria del valor 2 en guarismos decimales que se hallasen en el octavo lugar; y como en ninguna de las operaciones comunes ocurre el necesitar una exâctitud mayor, nos podemos ya contentar con este, y tomar el término 0,3010300 correspondiente en la aritmética por el verdadero logaritmo de 2.

Ahora, para el de 3 hallaríamos primero un medio proporcional entre E y C de la tabla, que son los mas próxîmos entre que se halla, y continuaríamos la operacion del mismo modo que se ve en la tabla respecto del 2; despues para hallar el de 4 no tendremos mas que duplicar el logaritmo de 2, para el de 5 tampoco teníamos necesidad de calcularle directamente; pues como 5 es igual con $\frac{10}{2}$ restando del logaritmo de 10 que es 1,0000000 el logaritmo de 2 que es 0,3010300 obtendríamos 0,6989700 para el logaritmo de 5. Para hallar el de 6 sumaríamos el logaritmo de 3 con el de 2 porque $6=3\times2$; para el de 7 le tendríamos que calcular directamente interpolando medios; para el de 8 nos bastará triplicar el de 2; para el de 9 duplicar el de 3; y en una palabra solo tendríamos que calcular interpolando medios los logaritmos de los números primeros.

306 Habiendo manifestado ya como se pueden formar estas tablas por los métodos que conocemos hasta ahora, debemos pasar á explicar su disposicion. Las tablas que hasta ahora se han calculado con mas extension y exâctitud son las que se han formado baxo la direccion de M. Prony; estas abrazan hasta los logaritmos de 200000 y estan calculados con diez guarismos decimales: pero aun no se han publicado; por lo que aqui manifestaremos en el ínterin la disposicion de las publicadas en castellano por nuestro antecesor D. Tadeo Lope y Aguilar, que con-

	MEDIOS geométricos.	Logaritmos.		MEDIOS geométricos.	Logaritmos.
A	1.0000000	0,0000000	*O*	1.9999786	0,3010253
C	3.1622777	0,5000000	*P*	2.0005408	0,3011474
B	10.0000000	1,0000000	*N*	2.0011032	0,3012695
A	1.0000000	0,0000000	*O*	1.9999786	0,3010253
D	1.7782794	0,2500000	*Q*	2.0002596	0,3010864
C	3.1622777	0,5000000	*P*	2.0005408	0,3011474
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
E	2.3713737	0,3750000	*R*	2.0001190	0,3010558
C	3.1622777	0,5000000	*Q*	2.0002596	0,3010864
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
F	2.0535249	0,3125000	*S*	2.0000489	0,3010406
E	2.3713737	0,3750000	*R*	2.0001190	0,3010558
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
G	1.9109529	0,2812500	*T*	2.0000137	0,3010329
F	2.0535249	0,3125000	*S*	2.0000489	0,3010406
G	1.9109529	0,2812500	*O*	1.9999786	0,3010253
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
F	2.0535249	0,3125000	*T*	2.0000137	0,3010329
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
I	2.0169144	0,3046875	*X*	2.0000048	0,3010310
F	2.0535249	0,3125000	*T*	2.0000137	0,3010329
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
K	1.9988546	0,3007812	*Y*	2.0000004	0,3010301
I	2.0169144	0,3046875	*X*	2.0000048	0,3010310
K	1.9988546	0,3007812	*V*	1.9999961	0,3010291
L	2.0078642	0,3027344	*Z*	1.9999982	0,3010296
I	2.0169144	0,3046875	*Y*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	*Z*	1.9999982	0,3010296
M	2.0033543	0,3017578	*W*	1.9999993	0,3010298
L	2.0078642	0,3027344	*Y*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	*W*	1.9999993	0,3010298
N	2,0011032	0,3012695	π	1.9999998	0,3010299
M	2.0033543	0,3017578	*Y*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	π	1.9999998	0,3010299
O	1.9999786	0,3010253	Δ	2.0000000	0,3010300
N	2.0011032	0,3012695	*Y*	2.0000004	0,3010301

tienen los logaritmos de los números hasta 107500; las quales solo se diferencian de la última edicion estereotipa de Didot en 500 logaritmos, que nada influye en unas tablas; y ademas se tienen en castellano por la mitad del precio que las citadas.

En primer lugar debemos advertir que la parte entera de que se compone el logaritmo de un número, se llama *característica*; y se llama *mantisa* á la fraccion decimal que acompaña á la característica. Ahora, como los logaritmos de 10, 100, 1000, &c. no tienen mantisa por ser los términos enteros de la progresion primitiva, resulta que los logaritmos de los términos que crezcan en progresion décupla tienen una misma mantisa; porque han de resultar de la suma del logaritmo del menor con el de 10,100,1000,&c. cuyos logaritmos son 1,2,3,&c. sin mantisa. Tambien se verifica otra propiedad, y es que todos los números que convienen en tener igual número de guarismos tienen una misma característica, y que esta tiene tantas unidades menos una como guarismos el número propuesto; porque los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100, por exemplo, han de ser mayores que 1 y menores que 2, luego tendrán 1 de característica, que es una unidad menos que el número de guarismos; lo qual es sumamente importante, porque dado un número sabemos inmediatamente qual es la característica de su logaritmo, y dada la característica conoceremos los guarismos del número, que han de ser uno mas que unidades tiene dicha característica. Por cuyo motivo la primera abreviacion que hay en las tablas es el no hallarse la característica.

Esto supuesto, ábranse dichas tablas y se observará que la primera columna de la izquierda tiene encima de sí la letra *N*, inicial de *números*, porque estos se hallan debaxo de ella; á su lado se ve una columna en que dice Logar., expresion abreviada de *Logaritmos*. Despues sigue otra columna de números y al lado otra en que se hallan sus logaritmos, siendo cado uno el logaritmo del número que tiene á su izquierda; y continúa del mismo modo hasta concluir la quarta llana con 1000 y su logaritmo. Se advierte que antes del logaritmo hay una coma, la qual indica que á su izquierda se debe colocar la característica que corresponda al número segun los guarismos que contenga.

Desde la 3.ª columna de la primera llana se ve que el logaritmo de 102 no tiene enfrente de sí mas de los cinco guarismos 86002, y que hay dos lugares huecos; lo qual quiere decir que los guarismos que debia haber allí son los que hay encima en el de arriba; de manera que poniendo los términos de la mantisa ,0086002, y poniendo tambien la característica 2 que nosotros sabemos que corresponde al 102, será su logaritmo completo 2,0086002. Del mismo modo tendremos que el logaritmo de 829 es despues de puesta la característica 2,9185545; y que el de 943 es igual con 2,9745117.

Los logaritmos inmediatos de los números que son mayores que 1000

tienen ya tres guarismos comunes; por lo qual se presentan de aquí en adelante las tablas con otra disposicion muy importante é ingeniosa, que es como aparecen desde la segunda llana de la hoja tercera; y que sirven para encontrar el logaritmo de todo número que no contenga mas de seis cifras, lo que se consigue del modo siguiente. *Se buscan las quatro primeras cifras en la columna de los números que es la que tiene N encima, y los tres primeros guarismos que en la columna que tiene encima cero se hallan enfrente ó por la parte superior de dicho número, serán los tres primeros guarismos de la mantisa; para hallar los restantes observaremos que si el número propuesto no tiene mas de quatro guarismos los otros quatro guarismos de la mantisa serán los que en la columna que encima tiene cero se correspondan enfrente del número propuesto; si tiene cinco guarismos se buscará en la columna que tenga encima el quinto guarismo, qué quatro guarismos son los que corresponden enfrente de los quatro primeros guarismos del número propuesto, y estos serán los quatro últimos guarismos de la mantisa. Si tiene seis guarismos el número propuesto, despues de hallado el logaritmo que corresponde á los cinco primeros guarismos, se verá qual de las tablitas que hay en la última columna que encima tiene un número, y luego á la izquierda de una raya los nueve guarismos* 1, 2, *&c., corresponde enfrente del número propuesto ó la mas próxîma superior, y se tomará el número que esté á la derecha del que expresa el sexto guarismo, lo qual se añadirá á las últimas cifras de la mantisa hallada, con lo que se tendrá el logaritmo pedido.*

Propongámonos, por exemplo, hallar el logaritmo de 1046, y lo primero que executaré será poner la característica que aqui es 3; buscaré estos quatro guarismos en la columna de los números, que aqui se encuentran en la primera llana, y veo tambien que aun en los números hay abreviacion pues se omiten de cinco en cinco los dos primeros guarismos; de manera que busco primero los de 10, y veo luego donde se hallan los otros dos 46, y como á su lado no hay tres guarismos, sino un hueco, veo quales son los que estan encima; y como son ,019 los pondré despues de la característica, y á continuacion los quatro guarismos 5317 que se hallan enfrente de 46 en la misma columna donde arriba hay cero, porque aqui solo consta el número de quatro guarismos; con lo qual tendremos que logar. 1046=3,0195317; del mismo modo hallaria que log. 1389=3,1427022, y que log. 6874=3,8372095.

Propongámonos ahora hallar el logaritmo de 10374, primero pondré la característica que aqui corresponde ser 4, porque tiene cinco guarismos el número; despues buscaré los tres primeros guarismos que hay separados en la columna que tiene cero encima, y que corresponden enfrente ó encima del 1037 que se halla en la primera llana, y hallo que son ,015; luego, veo en la columna que por arriba tiene 4 quales

son los quatro guarismos que corresponden enfrente del 1037, y hallo ser 9462; por lo que me resulta que log.10374=4,0159462.

Del mismo modo hallaria que log. 13738=4,1379235, y que log.48376=4,6846300.

Podria ocurrir que enfrente de los quatro primeros guarismos no correspondiese exâctamente ningun número en la columna del quinto; por exemplo, si me propusiera hallar el logaritmo de 40837, despues de puesta la característica 4 buscaria los tres primeros guarismos de la mantisa, y hallaria que eran por la regla general 610; pero baxando despues por la columna que encima tiene el quinto guarismo 7, hallo hueco el lugar que corresponde enfrente de 4083; en este caso se toman los tres primeros guarismos de la mantisa que esten próxîmamente inferiores, y hallo aqui que son 611, luego veré enfrente de estos guarismos que es lo que corresponde en la columna que tiene 7 encima, y hallo ser 0538; por lo que log.40837=4,6110538.

Pasemos ya á los logaritmos de números de seis guarismos, y nos propondremos primero hallar el de 134685; ante todas cosas pondré la característica que sé que es 5, despues hallaré el logaritmo correspondiente al número 13468 como si tubiese solo estos cinco guarismos, y encuentro ser 5,1293031; ahora para hallar lo que le corresponde por el sexto guarismo veré qual de las tablitas que hay en la última columna corresponde mas enfrente del número de solos quatro guarismos, y hallo ser aqui la que encima tiene 323; veo á la derecha del último guarismo que es 5 que número hay, y como hallo 162 añado esto á los últimos guarismos de la mantisa hallada, como aqui se ve (A):

(A)

$$\begin{array}{r} 5,1293031 \\ 162 \\ \hline 5,1293193 \end{array}$$

Y encuentro por último que el logaritmo de 134685 es 5,1293193.

Del mismo modo hallaria que

$$\log.468328=\left\{\begin{array}{r}5,6705427\\74\end{array}\right\}=5,6705501$$

$$\log.783472=\left\{\begin{array}{r}5,8940224\\11\end{array}\right\}=5,8940235,$$

$$\text{y finalmente } \log.349035=\left\{\begin{array}{r}5,5428628\\63\end{array}\right\}=5,5428691.$$

Quando el número tenga mas de seis guarismos, despues de puesta la característica correspondiente, se halla primero la mantisa como si solo tubiese cinco, y luego se multiplican los restantes por la diferencia que se halla en las tablas de diferencias y productos; en el producto se separan tantos guarismos decimales con la coma como guarismos habia mas de cinco, y lo que quede á la izquierda se añade á la mantisa del logaritmo hallado. Por exemplo: si quisiéramos hallar el logaritmo de 34892863, pondríamos desde luego la característica correspondiente que es 7; despues veríamos que la mantisa que pertenece á los cinco prime-

ros guarismos es 5427259, á la qual añadiendo el producto de multiplicar 125 por los otros tres guarismos restantes 863, despues de separados tres guarismos con la coma que da 107,875 ó 108 (§ 151), obtendremos que el log. $34892863 = \left\{ \begin{matrix} 7,5427259 \\ 108 \end{matrix} \right\} = 7,5427367$.

Del mismo modo hallaríamos que

log. $5984032 = \left\{ \begin{matrix} 6,7769916 \\ 23 \end{matrix} \right\} = 6,7769939$.

Esta práctica está fundada en que como la mantisa de un logaritmo es la misma que la de todos los números que esten en progresion décupla, resulta que la mantisa del 34892863 será la misma que la del logaritmo de 34892,863; ahora, hallada ya la mantisa del 34892, para encontrar lo que le corresponde por la parte decimal 0,863 podremos formar esta proporcion:

1 (diferencia entre los números 34892 y 34893) : 125 (diferencia entre sus logaritmos) : : 0,863 (diferencia entre el número propuesto y el 34892) : x (diferencia entre los logaritmos del número propuesto y el de 34892) $= \frac{125 \times 0,863}{1} = 125 \times 0,863$, lo que conduce á establecer la regla practicada antes.

En esto se funda la construccion de las tablitas de diferencias y productos que se hallan en la última columna de cada llana, y en que estan calculadas las partes que corresponde añadir por un guarismo qualquiera que tenga demas el número; en efecto, fixándonos en la que se halla enfrente del 783472, veremos que la diferencia es 56, y multiplicando esta diferencia por los nueve números dígitos, tendremos la tabla (A); y como en virtud de la regla que acabamos de demostrar se debe separar en cada producto un guarismo, si lo executamos y añadimos una unidad al último quando el que se desprecie sea 5 ó mayor que 5, se nos convertirá esta tabla en la (B) que es la que se halla en el libro.

(A)

1	56
2	112
3	168
4	224
5	280
6	336
7	392
8	448
9	504

(B)

	56
1	6
2	11
3	17
4	22
5	28
6	34
7	39
8	45
9	50

Debemos observar que en estas tablas que estan dispuestas por el método abreviado, y que empiezan verdaderamente desde 1000 en adelante, se pueden hallar los logaritmos de los números menores que 1000; pues si quisiéramos hallar el logaritmo de 47, despues de puesta la característica pondríamos la mantisa del 470 ó del 4700; lo que es muy importante en muchas ocasiones.

307 La qüestion inversa, á saber, *encontrar el número correspondiente á un logaritmo dado*, es tambien de la mayor importancia. Estas

tablas nos dan directamente medios para hallar los números hasta de seis cifras, para lo qual se practicará lo siguiente. *Búsquense primero los tres primeros guarismos de la mantisa en los que estan separados en la columna que tiene cero encima y debaxo; despues véase si alguno de los números de quatro guarismos de la misma columna es igual con los otros del logaritmo propuesto, en cuyo caso el número buscado será el de quatro cifras, que en la columna de los números está enfrente de los quatro últimos guarismos de la mantisa. Si los quatro últimos guarismos de la mantisa dada, no se hallan exâctamente en la columna que tiene cero encima, véase entre quales está y continúese hácia la derecha del menor de ellos hasta llegar á uno que sea igual; en cuyo caso el número que se busca será igual á los quatro guarismos que en la columna de los números estan enfrente de estos quatro de la mantisa, junto con el guarismo que tenga sobre sí la columna en que se hallan dichos quatro guarismos, y tendremos el número que constará de estos cinco guarismos. Ahora, sino se hallasen los últimos quatro guarismos exâctamente, veria entre qué dos columnas se hallaban; se pondria el número correspondiente al menor de ellos, y luego se hallaria la diferencia entre los últimos guarismos de la mantisa propuesta y el menor de ellos; y esta diferencia se veria en las tablas de los productos á qué múltiplo se aproxîmaba mas, y se pondria por sexto guarismo del número el que expresa este múltiplo.*

Solo falta ahora que sepamos quántos guarismos enteros debe tener este número: para lo qual *se separan con la coma de izquierda á derecha tantos guarismos mas uno como unidades tenia la característica.* Y si por la característica debiese tener mas de seis guarismos, entonces *si el logaritmo se encontró exâctamente se pondrán los ceros que se necesiten á continuacion del número hallado; y sino, la diferencia entre la mantisa del logaritmo propuesto y el menor de aquellos dos entre que se halla en las tablas, la dividiríamos por la diferencia de la tablita que se halla mas enfrente; y el quociente decimal le pondríamos despues de los cinco primeros guarismos hallados*; con lo qual se tendria el número con los guarismos que se desease, y se colocaria la coma donde conviniese.

Propongámonos ahora hallar el número á que corresponde el logaritmo 2,5352941: primero buscaré los tres primeros guarismos de la mantisa que son 535; hallados estos, veo si los otros quatro se hallan en esta columna; y como en efecto se verifica, digo que el número es 3430 que está enfrente, junto con el 0 de la columna; de manera que el número será 34300; pero como la característica es 2, nos indica que el número ha de tener solo tres guarismos enteros; luego los separaremos con la coma y será el número 343,00 ó solamente 343.

Si el logaritmo fuese 3,5984075 hallaria primero los tres primeros guarismos en la columna del cero, y despues baxaria por ella viendo si

los otros quatro se hallaban en ella ó buscando el menor de ellos, y hallaria que era el 3527; continúo viendo en las demas columnas de la derecha qual de los que estan enfrente del 3527 es igual con los quatro guarismos 4075 últimos de la mantisa propuesta; y como lo he encontrado tomo los guarismos 3966 que estan en la columna de los números; á esto se agregará el guarismo 5 de la columna en que se hallan los quatro últimos guarismos de la mantisa, y diré que el número es 39665; pero como la característica dice que solo ha de haber quatro guarismos en enteros, separaré el último con la coma, y el número pedido será 3966,5.

Si el logaritmo fuese 3,6597593 hallaria ser 4568 los quatro primeros guarismos, y veria que lo demas de la mantisa se hallaba entre las columnas 3 y 4, por lo que el número será mayor que 45683 y menor que 45684; como aqui solo ha de tener en enteros quatro guarismos, sino queremos mas aproxîmacion que un guarismo decimal, tomaremos el número menor 45683 y tendremos, despues de puesta nuestra coma, que es el número 4568,3; si quisiéramos una aproxîmacion mayor, por exemplo, de dos guarismos, hallaríamos la diferencia entre 7546 últimos guarismos de la mantisa de las tablas y 7593 de la mantisa propuesta; y la diferencia 47 veríamos en la tabla de los productos de la diferencia anterior á que múltiplo corresponde, y veo que aqui al que mas se aproxîma es al 48, y por lo mismo pongo el 5 que está á la izquierda del 48 despues del último guarismo 3, y el número será 4568,35. Si hubiéramos querido mayor aproxîmacion, hubiéramos dividido la diferencia 47 por 95, ó hubiéramos reducido á quebrado decimal el $\frac{47}{95}$ que da 0,49473 &c. por lo que digo que el número correspondiente al logaritmo dado 3,6597593 es 4568,349473 &c.

Si el logaritmo fuese 6,8715352, veria que se hallaba entre la mantisa del 74393 y la del 74394; pero como aqui la característica me dice que el número ha de tener siete guarismos, no me contentaré con estos cinco guarismos primeros, sino que la diferencia 31 que hay entre la mantisa del propuesto y la del menor entre que se halla, la dividiré por 59, diferencia que se halla en las tablas, y el quociente decimal 0,52542 &c. le pondré á continuacion del menor; y tomando siete guarismos enteros saco que el número correspondiente al logaritmo dado es 7439352,542 &c.

Finalmente, si se me propusiese hallar el número á que corresponde el logaritmo 7,8914371, hallaria que era exâctamente al 77882; pero como la característica me dice que ha de tener ocho guarismos en enteros, supliré con ceros los guarismos que me faltan, y hallaré que el número es 77882000.

El método que hemos seguido para encontrar desde el quinto guarismo en adelante, está fundado en que si llamamos *d* á la diferencia que hay entre la mantisa del logaritmo propuesto y la del menor entre que

se halla en las tablas, y D la diferencia que se halla en las tablas, podemos poner aproxîmadamente (*) esta proporcion $D:1::d:x=\frac{d}{D}$ que da la regla que hemos practicado.

Resolucion de algunas qüestiones por logaritmos.

308 Supongamos que se nos pide hallar por logaritmos el quarto término de esta proporcion $11526:27829::34578:x=\frac{27829\times34578}{11526}$, donde la primera operacion que hallo indicada es la multiplicacion; para executar esta por logaritmos busco primeramente el logaritmo que corresponde á 27829 y hallo ser 4,4444976; despues busco el de 34578 y hallo que es 4,5387999; sumándolos como se ve (A), resulta 8,9832975; y como veo indicada la division del producto 27829×34578 por 11526, para executarla por logaritmos restaré el logaritmo 4,0616786 que corresponde al 11526 de 8,9832975; y executándolo como alli se ve, sale por resta 4,9216189; busco el número que corresponde á este logaritmo y hallo ser 83487, con lo que queda resuelto el problema propuesto. Aqui se ve que para hallar este quarto término he tenido que hacer primero una suma y despues una resta; y como los matemáticos deben conciliar con la exâctitud la brevedad lo mas que sea posible, se ha ideado un medio que es muy socorrido por quanto el mayor uso que se hace de los logaritmos es para hallar quartos términos de proporciones; lo qual se executa por medio del *complemento aritmético*, del qual ya hemos insinuado algo (100), y daremos á conocer ahora suficientemente.

(A)
4,4444976
4,5387999
8,9832975
4,0616786
4,9216189

Se llama *complemento aritmético de un número á la diferencia que hay entre dicho número y la unidad seguida de tantos ceros como guarismos tiene dicho número*; y se llama *complemento logarítmico de un número al complemento aritmético de su logaritmo.* Para hallar el complemento aritmético de un número se resta el primer guarismo de la derecha de 10 y todos los demas de 9. Por medio del complemento aritmético se convierten las operaciones de restar en operaciones de sumar.

(*) *Decimos que este resultado es aproxîmado, porque las diferencias de los logaritmos no son proporcionales con las de los números; pero el error que resulta de esta suposicion no influye en los guarismos que comunmente se necesitan. En adelante daremos medios para calcular directamente los logaritmos por medio de los números, y al contrario, con toda la exâctitud que deseemos.*

Por exemplo: si quisiéramos restar 453 del número 827, hallaria el complemento de 453, restándole de 1000 y sacaria 547, que sumado con 827 me daria 1374; ahora, aqui en vez de haber quitado de 827 el 453 le he añadido 547, luego en la suma 1374 no solo tengo los 453 demas sino los 547; y como entre los dos componen 1000, resulta que debo rebaxar una unidad al guarismo de los millares, y tendré que la diferencia pedida es 374.

En este exemplo se ve que el executar la resta por el complemento es mas complicado que sin hacer uso de él; por lo que á primera vista parece que no es de la mayor importancia; sin embargo observando que el complemento se halla directamente restando el último guarismo de la derecha de 10 y todos los demas de 9, podremos ir poniendo debaxo del minuendo con la misma facilidad el complemento que el mismo subtraendo; pues el mismo trabajo nos costará poner un guarismo que su diferencia á 9, sino es el último que entonces será su diferencia á 10. Y entonces, en el caso que acabamos de resolver será tan sencillo lo uno como lo otro.

Pero quando ocurra hallar un quarto término de una proporcion geométrica por logaritmos, ó quando hay muchas multiplicaciones y divisiones á un tiempo, es sumamente ventajoso el hacer uso del complemento; en cuyo caso *se ponen los logaritmos de todos los factores los unos debaxo de los otros, despues los complementos logarítmicos de los divisores, se suma todo, y en la suma se rebaxan tantas unidades en los lugares correspondientes como divisores habia, y el número á que corresponde este logaritmo será el resultado que se buscaba.*

Con la misma facilidad se pone un complemento logarítmico que el logaritmo; porque si quiero hallar el complemento logarítmico de 53427, como su característica ha de ser 4, diré: de 4 á 9 van 5 que es la característica del complemento; ahora iré á buscar la mantisa, y como los tres primeros guarismos son 727 iré diciendo: de 7 á 9 van 2 que pongo al lado de la característica; de 2 á 9 van 7 que pongo al lado del 2; de 7 á 9 van 2 que pongo tambien; veo despues que los otros quatro guarismos de la mantisa son 7608; pero al tiempo de escribirlos voy diciendo: de 7 á 9 van 2 que pongo; de 6 á 9 van 3 que pongo; de 0 á 9 van 9 que pongo; de 8 á 10 (porque es el último) van 2 que pongo, y tengo que el complemento logarítmico de 53427 es 5,2722392. Si el número terminare por ceros, se deberia restar de 10 el último guarismo significativo del número y los demas de 9, poniendo despues los ceros convenientes. Tambien se pudiera empezar por lo último diciendo: de 8 á 10 van 2, de 0 á 9 van 9, &c. pero yo lo encuentro mas cómodo del modo que hemos expuesto; cada uno podrá elegir el que mejor le parezca.

Ahora, para hallar por medio del complemento el quarto término de la proporcion de arriba, pondré los logaritmos 4,4444976 y 4,5387999

de los factores 27829 y 34578 los unos debaxo de los otros, y luego el complemento logarítmico del 11526; y sumándolo todo y borrando la decena que sale en la característica por causa del complemento, saco como se ve en (A) el mismo logaritmo que antes.

(A)

Log. 27829=4,4444976
Log. 34578=4,5387999
C.Log. 11526=5,9383214

1̶4,9216189

309 En las tablas cuyo manejo hemos explicado solo se hallan los logaritmos de los números enteros comprendidos entre 1 y 102500; pero en el 2.º tomo de dichas tablas donde se hallan las trigonométricas que es la 2.ª parte del tomo 3.º se hallan los logaritmos desde 102500 hasta 107500. Por medio de ellas podemos tambien calcular, aunque no con toda exâctitud, los logaritmos de los números mayores como ya lo hemos executado; pero ahora es necesario que veamos como se han de encontrar los logaritmos de los quebrados, de los números mixtos y de los quebrados decimales.

Supongamos 1.º que se quiera encontrar el logaritmo de un número mixto; para esto *reduciremos el entero á la especie del quebrado que le acompaña*, *hallaremos el logaritmo del denominador*, *le restaremos del logaritmo del numerador*, y *la diferencia será el logaritmo pedido.* Sea el número $57\frac{32}{67}$ que reduciendo el entero á la especie del quebrado es $\frac{3851}{67}$, y tendremos . . . .

Log. 3851=3,5855735
Log. 67 =1,8260748

Log. $57\frac{32}{67}$=1,7594987

Para hallar el logaritmo de un quebrado deberemos restar el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador; pero si el quebrado es propio la resta será negativa, lo que indica que el logaritmo de un quebrado es *negativo*; tambien se llama *defectivo.*

Esto tambien resulta de las progresiones primitivas, porque si las suponemos continuadas hácia la izquierda, serán:

&c. —3 . —2 . —1 . 0 . 1 . 2 . 3 .&c.
&c.: $\frac{1}{1000}$: $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{10}$: 1 : 10 : 100 : 1000 :&c.

las que nos manifiestan que los logaritmos de todos los números menores que 1 han de ser negativos ó defectivos; así, si quisiéramos hallar el logaritmo de $\frac{37}{85}$, buscaríamos el logaritmo del numerador y el del denominador, y como este no le podríamos restar de aquel, lo haríamos al contrario y pondríamos á la resta el signo —, de manera que tendremos . . . . .

Log. 85=1.9294189
Log. 37=1.5682017

Log. $\frac{37}{85}$=—0,3612172

Si nos propusiéramos ahora resolver la qüestion inversa, esto es, hallar el número correspondiente á un logaritmo defectivo ó negativo, qual es el —0,3612172, lo que executaríamos seria añadirle un número qualquiera de unidades, por exemplo 4, lo que equivaldria á restarle

de 4, como se ve en (A): buscaríamos ahora á qué número corresponde este logaritmo, y hallaríamos que era á 4352,9&c.; pero con añadir quatro unidades que es el logaritmo de 10000 al logaritmo propuesto, nos resulta un número 10000 veces mayor; luego para tener el verdadero, le deberemos hacer este número de veces menor, lo que conseguiremos corriendo la coma quatro lugares hácia la izquierda; de manera que el número á que corresponde el logaritmo propuesto es 0,43529, que es el quebrado $\frac{37}{85}$ reducido á decimales como en efecto debe verificarse.

(A)

$$\begin{array}{r} 4 \\ -0,3612172 \\ \hline 3,6387828 \end{array}$$

Si el número cuyo logaritmo quisiésemos hallar tubiese enteros y decimales, pondríamos la característica que corresponde al entero, y buscaríamos la mantisa que correspondia á todos los demas guarismos como sino tubiese la coma; y así, para hallar el logaritmo de 385,72, despues de puesta la característica 2 buscaré la mantisa correspondiente al 38572 como sino hubiese coma, y hallaré que L.385,72=2,5862722.

Si el número propuesto fuese un quebrado decimal, entonces le pondríamos en forma de quebrado comun y hallaríamos su logaritmo, que seria defectivo, por el método anterior; pero usando del complemento logarítmico llegamos á tener esta regla sencilla: *el logaritmo de un quebrado decimal tiene por característica 9, ó un número con tantas unidades menos de 9 quantos ceros hay entre la coma y los guarismos significativos; y por mantisa la misma que la del número si fuese entero.*

Por esta regla tendremos que el logaritmo de 0,47 es 9,6720979; este logaritmo segun lo dicho (306) deberia corresponder á un número de diez guarismos; y así, para no equivocarle, aunque no es fácil porque un calculador jamas se puede equivocar en tomar un número por otro que es 1000000000 menor, no obstante nosotros distinguiremos á los logaritmos de los quebrados decimales poniendo la coma por la parte de arriba é inversa, ó tambien se podrian diferenciar poniendo un punto entre la característica y la mantisa como practican algunos.

Tambien hallaríamos por la regla $\left\{ \begin{array}{l} \text{que log.0,59624=9‘7754211} \\ \text{y que log.0,00483=7‘6839481.} \end{array} \right.$

Para demostrar esta regla propongamonos un quebrado qualquiera tal como 0,532: este puesto en forma de quebrado comun será $\frac{532}{1000}$. Para hallar su logaritmo deberíamos restar el logaritmo de 1000 del logaritmo de 532; pero si queremos hacer uso del complemento logarítmico, con el logaritmo del 532 sumaremos el complemento logarítmico de 1000 en esta forma (A):

que en efecto tiene la misma mantisa que el logaritmo de la parte decimal considerada como entero; porque en el complemento logarítmico del denominador no hay mantisa; y tiene 9 de ca-

(A)

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 532 = & 2,7259116 \\ \text{compl. log.}1000 = & 7 \\ \hline \text{log.}0,532 = & 9‘7259116 \end{array}$$

racterística porque no habiendo cero alguno entre la coma y los guarismos significativos, la característica del número considerado como entero debe tener tantas unidades menos una como guarismos; ahora, como el denominador tiene un guarismo mas que el numerador, la característica de su logaritmo debe tener una unidad mas; por consiguiente su complemento será una unidad menos que el complemento de la característica del numerador, y añadido á la característica de este dará una unidad menos que 10, esto es 9.

Ahora, por cada cero que hubiese entre la coma y los guarismos significativos, aumentaria una unidad la característica de su denominador, por consiguiente disminuiria la de su complemento; luego disminuiria esta misma unidad la característica del número total. Así, si el número fuese 0,000532 le pondríamos baxo esta forma $\frac{532}{1000000}$, cuyo logaritmo se hallaria usando del complemento como aqui se ve, y comprueba la regla dada.

$$
\begin{array}{r}
\text{Log.}532=2,7259116 \\
\text{C.Log.}1000000=4, \\
\hline
\text{Log.}0,000532=6'7259116
\end{array}
$$

Si nos propusiéramos elevar el número 0,532 á una potencia qualquiera tal como la tercera, multiplicaríamos su logaritmo por 3 en la forma que aqui se ve (A):

$$
\begin{array}{r}
(A) \\
9'7259116 \\
3 \\
\hline
29'1777348
\end{array}
$$

y sacaríamos que el logaritmo de su tercera potencia era 29'1777348; pero como una potencia qualquiera de un quebrado decimal tendrá 9 de característica ó menos de 9, borraremos las dos decenas que nos resultan, á causa de haber triplicado la decena del complemento, y será Log.$(0,532)^3=9'1777348$. Al contrario, si quisiéramos extraer una raiz qualquiera de un quebrado decimal, á la característica que le correspondiese, le deberíamos anteponer tantas decenas demas como unidades tubiese el exponente de la raiz menos una, y despues dividiríamos por el exponente de dicha raiz. Esta regla tendria alguna excepcion si la característica del quebrado decimal fuese 7 ó menor que 7.

310 Puesto que ya sabemos la teoría de los logaritmos, tenemos ya medios para despejar la incógnita x en la equacion en que se halla ella misma por exponente, y que por lo mismo se llama *equacion exponencial*; y así, si nos proponemos despejar x en la $a^x=b$, observaremos que á una misma cantidad ó á cantidades iguales debe corresponder un mismo logaritmo, luego tomando los logaritmos de ambos miembros se tendrá Log. a^x=Log. b; pero el logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia, luego se tendrá xLog.a=Log.b, de donde (221) sale $x=\frac{\text{Log.}b}{\text{Log.}a}$.

Si consideramos que a sea la base del sistema, z el número y x el logaritmo, tendremos que $a^x=z$,

y como x en este caso es el logaritmo de z le podremos indicar de este modo : $z=a^{log.z}$, y respecto de otro número z', tendremos $z'=a^{log.z'}$; y multiplicando estas cantidades será $zz'=a^{log.z}a^{log.z'}=a^{log.z+log.z'}$, por lo que resultará que
$\text{Log}.zz'=\text{Log}.(a^{log.z+log.z'})=\text{Log}.a(\text{Log}.z+\text{Log}.z')=\text{Log}.z+\text{Log}.z'$, porque el logaritmo de la base es siempre la unidad ; de donde se deduce que el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.

Si dividiéramos dichas expresiones, sacaríamos

$$\frac{z}{z'}=\frac{a^{log.z}}{a^{log.z'}}=a^{log.z-log.z'},$$

de donde deduciríamos que $\log.\frac{z}{z'}=\log.z-\log.z'$,

y quiere decir que el logaritmo de un quociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Si la primera $z=a^{log.z}$ la elevásemos á la potencia n, seria $z^n=(a^{log.z})^n=a^{n\log.z}$, de donde $\log.\ z^n=n\times\log.z$, y quiere decir que el logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia.

Si extraemos la raiz del grado n será

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a^{log.z}}=(a^{log.z})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}\times\log.z}=a^{\frac{\log.z}{n}}$$

de donde $\log.\sqrt[n]{z}=\frac{\log.z}{n}\times\log.a=\frac{\log.z}{n}$,

y quiere decir que el logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad dividido por el exponente radical, cuyas conseqüencias son las mismas que se deduxeron por las consideraciones hechas sobre las progresiones.

De las equaciones indeterminadas de primer grado.

311 Hemos dicho (215) que qüestiones indeterminadas son aquellas que tienen menos equaciones que incógnitas, y que la parte de la análisis que tiene por objeto la resolucion de estas qüestiones se llama *análisis indeterminada*. Quando despues de haber eliminado tantas incógnitas menos una como equaciones tiene la qüestion, se llega por último á una equacion tal como esta $ax\pm bz=c$: no hay otro medio para determinar una qualquiera de las incógnitas x, z, que dar valores á la otra: y como por cada valor que se dé á z, por exemplo, resultará uno diferente para x, se deduce que en una equacion de esta especie las cantidades que se señalan con las últimas letras del alfabeto reciben el nombre de *variables*, porque en una misma qüestion pueden tener todos los valores que se quieran.

Tambien hemos dicho que despues que Descartes, aplicando el Algebra á la Geometría, usó de las últimas letras del alfabeto para señalar las variables, siguieron los algebristas señalando tambien las incógnitas con las mismas letras; no por esto ha resultado una gran confusion, pues para conocer si la cantidad señalada con x,z,&c. es incógnita ó es variable, basta saber si la equacion es determinada ó indeterminada.

312 Para resolver la qüestion indeterminada $ax \pm bz = c$ en todas sus partes, nos propondremos ahora algunas qüestiones que conduzcan á ella, principiando por la mas sencilla que es la de ser $a=1$ y $b=1$.

Qüestion 1.ª *Hallar dos números cuya suma sea* 10.

Si suponemos que los dos números sean x y z, tendremos $x+z=10$, de donde resulta $x=10-z$. Ahora, como puede haber muchos números cuya suma sea 10, tales como 3 y 7, 4 y 6, $7\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, y 13 y -3, &c. para determinar la x no hay mas que dar un valor qualquiera á z, y por cada valor que le demos nos resultará uno para x; pero el número de los valores se limita mucho si se añade la circunstancia de que los números sean enteros y positivos; por lo que si en vez de z substituimos la serie de los números naturales 1,2,3, &c. tendremos las resoluciones siguientes: $\begin{cases} \text{Si } z=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \\ \text{Será } x=9,8,7,6,5,4,3,2,1,\ 0,-1. \end{cases}$

que dice la 1.ª que quando $z=1$ la equacion $x=10-z$ da $x=10-1=9$; quando $z=2$ la misma equacion da $x=10-2=8$,&c. hasta que de hacer $z=10$, veo que me resulta $x=10-10=0$, que como no es número no da la resolucion pedida; de hacer $z=11$ resulta $x=10-11=-1$; y como de suponer valores mayores á z resultarian siempre valores negativos de x, tenemos que la qüestion no admite en números enteros positivos nada mas que nueve resoluciones, ó porque las quatro últimas no se diferencian de las quatro primeras, no admite la qüestion sino cinco resoluciones.

313 Qüestion 2.ª *Dividir el número* 37 *en dos partes tales que la una sea divisible por* 2 *y la otra por* 5.

Siguiendo siempre con el espíritu analítico supondremos conocidas las dos partes, y llamaremos x' á la una y z' á la otra, lo que nos dará $x'+z'=37$. Ahora, como la una de estas partes tal como la x' ha de ser divisible por 2, tendremos que $\frac{x'}{2}$ dará un quociente exâcto; y y como no le conocemos, le llamaremos x y tendremos $\frac{x'}{2}=x$, lo que da $x'=2x$. Como la otra ha de ser divisible por 5 la expresion $\frac{z'}{5}$ dará quociente exâcto, que llamándole z tendremos $\frac{z'}{5}=z$, lo que da $z'=5z$. Substituyendo estos valores de x' y de z' en la equacion primitiva se nos convertirá en $2x+5z=37$.

A esta equacion hubiéramos llegado desde luego si hubiéramos hecho este raciocinio: *pues que la una parte ha de ser divisible por* 2, *llamando* x *al quociente que resulte, una de estas partes será* 2x; *y puesto que la otra lo ha de ser por* 5, *llamando* z *al quociente que resulte será* 5z, lo qual nos hubiera dado inmediatamente la equacion $2x+5z=37$.

Y tambien pudiéramos decir solamente como se suele executar: *sea* 2x *una parte y* 5z *la otra, y tendremos* $2x+5z=37$.

Pero como es esta la primera qüestion de esta especie que planteamos, hemos querido manifestar á los principiantes los raciocinios que deben hacer para percibir el espíritu que conduce á semejante planteo.

Planteada ya una qüestion de esta especie, para resolverla se executa lo siguiente: *se despeja la incógnita que tiene menor coeficiente, sacando en su expresion todos los enteros que se puedan; despues si resulta quebrado, se iguala este con otra nueva incógnita ó variable que para mayor sencillez convendrá ponerle el mismo signo que tenga en el quebrado la incógnita* (*). *De esta equacion se despeja la incógnita del quebrado; y si en su expresion resultase por último quebrado, se igualará este con otra nueva incógnita, y así se procederá hasta llegar á una incógnita, en cuyo valor no haya quebrado. Entonces este valor se va substituyendo en todas las antecedentes, y para hallar las resoluciones de la qüestion se van dando valores á la última incógnita ó variable, y los que resulten para las que entran en el planteo de la qüestion son los que la resuelven.*

Por esta causa despejaremos x en la equacion $2x+5z=37$, lo que dará

1.º $2x=37-5z$, y $x=\frac{37-5z}{2}=18-2z+\frac{1-z}{2}$.

Igualaré ahora este quebrado con la incógnita u que lleve el signo $-$; lo que me dará $\frac{1-z}{2}=-u$, de donde $1-z=-2u$, $-z=-2u-1$, y mudando los signos á toda la equacion, será $z=2u+1$.

Como en este valor de z no entra ya quebrado, le substituiremos en el de x, y tendremos

$$x=18-2z+\frac{1-z}{2}=18-2(2u+1)-u=18-4u-2-u=16-5u.$$

Ahora iremos dando valores á u y viendo en lo que se nos convierten los de z y de x, como se ve en (A) página siguiente.

(*) *Decimos que todo quebrado que vaya resultando se iguale con una nueva variable, porque como llevamos el objeto de sacar los valores enteros de las variables que satisfacen á la qüestion, paraque* x, *por exemplo, sea número entero, lo deberá ser* $\frac{1-z}{2}$.

(A)	(B)
Si $u = 0, 1, 2, 3, 4$	$x' = 2x = 32, 22, 12, 2$
$z = 1, 3, 5, 7, 9$	$z' = 5z = 5, 15, 25, 35$
$x = 16, 11, 6, 1, -4$	

Como de suponer $u=4$ resultan ya valores negativos, no tenemos mas que quatro resoluciones, y substituyendo estos valores de z y de x en los de x' y z' se tendrán los valores que se ven en (B); y sumando estas expresiones en columna, veremos que la suma de cada dos equivale á 37 como lo exîgia la qüestion.

314 Qüestion 3.ª *Dividir el número* 100 *en dos partes, tales que partiendo la una por* 5 *dexe el residuo* 2, *y partiendo la otra por* 7 *dexe el residuo* 4.

Si la primera parte dividida por 5 dexa el residuo 2 la podremos hacer $=5x+2$; y por la misma razon la segunda será $=7z+4$; y como la suma de las dos partes ha de componer 100, tendremos

$$5x+2+7z+4=100 \text{ ó } 5x=94-7z,$$

de donde sale $x=\frac{94-7z}{5}=18-z+\frac{4-2z}{5}$; haremos ahora $\frac{4-2z}{5}=-u$, que da $4-2z=-5u$, de donde $-2z=-5u-4$ y $z=\frac{5u+4}{2}=2u+2+\frac{u}{2}$, que haciendo $\frac{u}{2}=t$ tendremos $u=2t$, cuyo valor substituido en las equaciones anteriores dará : $\begin{cases} z=4t+2+t=5t+2 \\ x=18-5t-2-2t=16-7t; \end{cases}$

paraque la x no sea negativa es preciso que $7t$ sea menor que 16, esto es, que la t no puede pasar de 2. No admite pues la qüestion propuesta mas de tres soluciones :

1.ª $t=0$ que da $x=16$, $z=2$, y las dos partes $5x+2$, y $7z+4$ serán 82 y 18, cuya suma $=100$;

2.ª $t=1$, que da $x=9$, $z=7$, y las dos partes $47+53=100$;

3.ª $t=2$, que da $x=2$, $z=12$, y las dos partes $12+88=100$.

315 Qüestion 4.ª *Dos soldados tenian guardados entre los dos* 100 *cartuchos, y el uno le dice al otro: si cuento mis cartuchos de* 8 *en* 8 *me sobran* 7, *y el otro le responde si yo cuento los mios de* 10 *en* 10 *me sobran tambien* 7; *¿quántos tenia cada uno?*

Ya que el número de cartuchos del primero dividido por 8 dexa el residuo 7, y el número que tenia el segundo dividido por 10 dexa el residuo 7, el número del primero será $8x+7$, y el del segundo $10z+7$, con lo qual tendremos $8x+10z+14=100$, ú $8x=86-10z$ ó $4x=43-5z$, que da $x=\frac{43-5z}{4}=10-z+\frac{3-z}{4}$, y haciendo ahora $\frac{3-z}{4}=-u$ se tendrá $3-z=-4u$ que da $z=3+4u$;

y substituyendo este valor en el de x sacaremos $x=7-5u$,

de donde resulta que $5u$ ha de ser menor que 7 y por consiguiente u menor que 2, esto es, que no hay mas que las dos soluciones siguientes:
1.ª $u=0$, que da $x=7$, y $z=3$, que manifiesta que el primer soldado podia tener 63 cartuchos y el segundo 37 cuya suma $=100$.
2.ª $u=1$, que da $x=2$, $z=7$, y el primero podria tener en este caso 23, y el segundo 77 cuya suma tambien es $=100$.

316 Todas las qüestiones resueltas hasta aqui se han hallado comprendidas en una equacion de esta forma $ax+bz=c$, en la qual a, b y c representan números enteros y positivos, y de las quales tambien se han de sacar números enteros y positivos para los valores de x y z. Pero quando b es negativa, toma la equacion esta forma $ax=bz+c$, las qüestiones son en este caso de muy distinta naturaleza, y admiten una infinidad de soluciones. Vamos á resolver algunas.

Aqui pueden ocurrir tres casos: 1.º quando la equacion tiene todos sus términos y las incógnitas x y z no tienen mas coeficiente que la unidad, v. g. $x-z=c$. A una equacion de esta forma conduce la siguiente qüestion y todas las que se le parecen.

Qüestion. *Hallar dos números cuya diferencia sea 6.*

Llamo x al número menor y z al mayor, y tendré $z-x=6$, y $z=x+6$. Puedo poner en lugar de x todos los números enteros posibles, y z será siempre seis unidades mayor que x; de modo que si $x=100$ será $z=106$, luego admite una infinidad de soluciones.

317 El segundo caso es quando la equacion no tiene mas términos que los que llevan incógnita siendo $c=0$, en cuyo caso será

$$ax-bz=0 \text{ ó } ax=bz,$$

y los coeficientes de las incógnitas son números enteros mayores que la unidad. Á equaciones de esta forma conduce la siguiente qüestion, y todas las que se le parecen.

Qüestion. *Hallar un número que sea divisible por 7 y por 13.*

Llamando N el número que busco, tendré que como ha de ser divisible por 7, $\frac{N}{7}$ dará un quociente exâcto, que como no le conocemos le llamaremos x y será $\frac{N}{7}=x$, lo que da $N=7x$; como dicho número tambien ha de ser divisible por 13 tendremos igualmente que $\frac{N}{13}$ dará quociente exâcto, que como tampoco conocemos y será diferente del anterior, le llamaremos z y será $\frac{N}{13}=z$, lo que da $N=13z$; igualando estas dos expresiones de N tendremos $7x=13z$ que da $x=\frac{13z}{7}=z+\frac{6z}{7}$. haciendo $\frac{6z}{7}=u$ será $6z=7u$ y $z=\frac{7u}{6}=u+\frac{u}{6}$, que haciendo $\frac{u}{6}=t$

será $u=6t$; y substituyendo este valor de u en las anteriores, tendremos $z=u+\frac{u}{6}=6t+t=7t$, y $x=z+\frac{6z}{7}=7t+6t=13t$, lo que da $N=7x=7\times13t=91t$, que dando á t diferentes valores, tendremos las resoluciones siguientes: $\begin{cases} \text{Si } t=0, 1, 2, 3, 4 \text{ \&c.} \\ N=0, 91, 182, 273, 364 \text{ \&c.} \end{cases}$

Á la expresion $N=91t$ pudiéramos haber llegado inmediatamente por este raciocinio. Puesto que $x=\frac{13z}{7}$ y x ha de ser un número entero, $13z$ será divisible por 7; pero como 13 no lo es deberá serlo z, luego z tendrá esta forma $7t$, y por lo mismo $x=\frac{13\times7t}{7}=13t$, cuyo valor substituido en el de N dará $N=7x=7\times13t=91t$.

Si ademas se añadiese la circunstancia de que el número propuesto debiese ser divisible por 11, tendríamos tambien $N=11r$, que igualando este valor de N con el que habíamos ya obtenido por las primeras circunstancias, será $11r=91t$ que da $r=\frac{91t}{11}$, y como ha de ser un número entero y 91 no es divisible por 11, lo será el t que tendrá esta forma $11s$ y dará $r=\frac{91\times11s}{11}=91s$, y por lo mismo $N=11r=11\times91s=1001s$.

318 En el tercer caso, que es quando c no es 0, la equacion tiene todos sus términos, y las incógnitas coeficientes mayores que la unidad, tal como la $ax-bz=c$. La resolucion de las qüestiones que conducen á equaciones de esta forma, tiene alguna mas dificultad que la de los casos anteriores, como lo darán á conocer los exemplos siguientes:

Qüestion 1.ª *Hallar un número tal que sea divisible por 7, pero que si se le parte por 13 dexe el residuo 4.*

Sea N este número, con lo qual tendremos $N=7x$, y tambien $N=13z+4$, luego $7x=13z+4$ que nos da $x=\frac{13z+4}{7}=z+\frac{6z+4}{7}$, haciendo $\frac{6z+4}{7}=u$ obtendré $6z=7u-4$, que da $z=\frac{7u-4}{6}=u+\frac{u-4}{6}$; ahora haciendo $\frac{u-4}{6}=t$, será $u-4=6t$ y $u=6t+4$; y substituyendo este valor en las anteriores, tendremos $z=u+\frac{u-4}{6}=6t+4+t=7t+4$, $x=z+\frac{6z+4}{7}=7t+4+6t+4=13t+8$, y $N=7x=7(13t+8)=91t+56$,

que, dando valores á t, resultan las soluciones siguientes:

Si $t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, &c.
$N=56,\ 147,\ 238,\ 329,\ 420$, &c.

319 Qüestion 2.ª *Hallar un número tal que dividido por 6 dexe el residuo 2, y dividido por 13 dexe el residuo 3.*

Sea N el número, y tendré $N=6x+2$ y $N=13z+3$;

luego $6x+2=13z+3$ ó $6x=13z+1$, que da $x=\frac{13z+1}{6}=2z+\frac{z+1}{6}$,

haré $\frac{z+1}{6}=t$ lo que da $z=6t-1$;

luego $N=13z+3=13(6t-1)+3=78t-13+3=78t-10$,

y dando valores á t resulta $\begin{cases} \text{Si } t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \text{ \&c.} \\ N=68,\ 146,\ 224,\ 302,\ 380, \text{ \&c.} \end{cases}$

320 Qüestion 3.ª *Una quadrilla de hombres y mugeres van á merendar á escote; cada hombre paga 25 reales, y cada muger 16; al repasar la cuenta se halla que el gasto de todas las mugeres juntas monta un real mas que el gasto de todos los hombres, ¿quántos eran los hombres y quántas las mugeres?*

Sea el número de las mugeres $=x$, el de los hombres $=z$, y tendremos que el gasto de las mugeres será $16x$, y el de los hombres $25z$;

luego $16x=25z+1$, y $x=\frac{25z+1}{16}=z+\frac{9z+1}{16}$.

Sea $\frac{9z+1}{16}=u$, lo que da $9z+1=16u$ y $z=\frac{16u-1}{9}=u+\frac{7u-1}{9}$,

que haciendo $\frac{7u-1}{9}=t$ será $7u=9t+1$, y $u=\frac{9t+1}{7}=t+\frac{2t+1}{7}$,

y haciendo ahora $\frac{2t+1}{7}=s$ será $2t=7s-1$, y $t=\frac{7s-1}{2}=3s+\frac{s-1}{2}$;

continuando las igualaciones sacaremos $s-1=2r$, y $s=2r+1$.

Substituyendo ahora sucesivamente, tendremos:

$$t=3s+\frac{s-1}{2}=3(2r+1)+r=6r+3+r=7r+3,$$

$$u=t+\frac{2t+1}{7}=7r+3+2r+1=9r+4,$$

$$z=u+\frac{7u-1}{9}=9r+4+7r+3=16r+7,$$

$$x=z+\frac{9z+1}{16}=16r+7+9r+4=25r+11.$$

Por consiguiente el número de las mugeres era $25r+11$ y el de los hom-

bres $16r+7$; en cuyas fórmulas se puede substituir en lugar de r todos los números enteros que se quiera, y se tendrá

Si $r = 0, 1, 2, 3, 4,$ &c.
Número de las mugeres $= 11, 36, 61, 86, 111,$ &c.
Id. de los hombres $= 7, 23, 39, 55, 71,$ &c.

Por la primera solucion que consta de los números menores, las mugeres gastaron 176 reales y los hombres 175, esto es, 1 real menos.

321 Qüestion 4.ª *Un chalan compra caballos y bueyes: por cada caballo da 31 doblones, y 20 doblones por cada buey; al ajustar su cuenta halla que los bueyes le han costado 7 doblones mas que los caballos: ¿quántos bueyes ha comprado y quántos caballos?*

Sea x el número de los bueyes, z el de los caballos, y tendremos

$20x=31z+7$, que da $x=\frac{31z+7}{20}=z+\frac{11z+7}{20}=z+u$,

llamando u á la fraccion $\frac{11z+7}{20}$, en la qual quitando el divisor se tendrá

$11z+7=20u$ y $z=\frac{20u-7}{11}=u+\frac{9u-7}{11}=u+t$, haciendo $\frac{9u-7}{11}=t$;

luego $9u=11t+7$, y $u=\frac{11t+7}{9}=t+\frac{2t+7}{9}=t+s$ haciendo $\frac{2t+7}{9}=s$,

que da $t=\frac{9s-7}{2}=4s+\frac{s-7}{2}=4s+r$, haciendo $\frac{s-7}{2}=r$, que da $s=2r+7$.

luego $t=4s+r= 9r+28$
$u= t+s=11r+35$
$z= u+t=20r+63$ número de caballos,
$x= z+u=31r+98$ número de bueyes.

Luego los menores valores positivos de x y z se sacan con hacer $r=-3$, porque haciendo $r=-4$ ya salen valores negativos para z y x; los valores mayores siguen formando una progresion aritmética conforme aquí manifestamos
N.º de bueyes $x=5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222,$ &c.
N.º de caballos $z=3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143,$ &c.

Si reflexionamos acerca del modo con que el valor de las primeras variables se determina por medio del valor de las siguientes, observaremos 1.º que el número 7 se halla con signo positivo en las equaciones de número ímpar, esto es, tales como en la primera

$x=\frac{31z+7}{20}$ y en la tercera $u=\frac{11t+7}{9}$ &c. y con signo negativo en las equaciones de número par, como en la segunda $z=\frac{20u-7}{11}$,

y en la quarta $t=\frac{9s-7}{2}$; 2.º que en el segundo miembro de la equa-

cion que expresa el valor de cada incógnita se halla un número procedente de la relacion que hay entre 31 y 20, ó uno de los quocientes que salen si se busca el máxîmo comun divisor de estos dos números, sirviendo de coeficiente á la primera incógnita de dicho miembro, y no teniendo la otra letra mas coeficiente que la unidad. Estos coeficientes siguen el órden de las divisiones de que salen, es decir, que en la quinta equacion $s=2r+7$ el coeficiente de la primera letra r del segundo miembro es 2, quinto quociente; en la quarta equacion $t=4s+r$, la primera letra s del segundo miembro lleva el coeficiente 4, quarto quociente, y r la unidad. En las equaciones tercera, segunda y primera, la primera letra del segundo miembro lleva por coeficiente la unidad, porque las divisiones á que da motivo la investigacion del máxîmo comun dîvisor de 31 y 20 dan estos quocientes.

De donde se deduce que para resolver una qüestion de esta especie no hay mas que *hallar el máxîmo comun divisor, é igualar la incógnita que tiene el menor coeficiente con la otra multiplicada por el primer quociente, acompañada de la incógnita que sigue; despues la primera del segundo miembro de esta equacion igualarla con la segunda multiplicada por el segundo quociente acompañada de la otra; luego la que sigue y así sucesivamente, hasta que habiendo llegado al último quociente, se agrega al múltiplo de la incógnita correspondiente el término constante con un signo positivo si el número de equaciones es ímpar, y negativo si par; despues se va substituyendo el valor de la última incógnita en los de las anteriores, hasta que se hayan determinado las que entran en la qüestion.*

De manera que hallando el máxîmo comun dîvisor del 31 y 20, como aqui se presenta (A):

(A)

31	20	11	9	2	1
	1	1	1	4	2
11	9	2	1	0	

y practicando la regla tendremos inmediatamente (suponiendo que las incógnitas empiecen por p y q, paraque se sucedan sin interrupcion, y por consiguiente que la equacion de que se trata sea $20p=31q+7$) las adjuntas equaciones:

$$p=1\times q+r, q=1\times r+s, r=1\times s+t, s=4\times t+u, t=2\times u+7.$$

Y substituyendo este valor de t en las anteriores, tendremos:
$s=8u+28+u=9u+28$, $r=9u+28+2u+7=11u+35$,
$q=11u+35+9u+28=20u+63$, $p=20u+63+11u+35=31u+98$;
donde vemos que los valores de p y q son los mismos que hallámos antes para x y z que hacian de incógnitas.

322 Resolveremos por este método aun la siguiente:

Qüestion: *Hallar un número tal que si se le divide por 13 dexe el residuo 7, y si se le divide por 31 dexe el residuo 15.*

Llamo N el número, y será $N=13p+7$, y $N=31q+15$, de donde $13p+7=31q+15$, ó $13p=31q+8$.

Ahora, hallando el máximo comun divisor del 13 y 31 será:

31	13	5	3	2	1
	2)	2)	1)	1)	2
5	3	2	1	0	

por lo que tendré: $p=2q+r$, $q=2r+s$, $r=s+t$, $s=t+u$, $t=2u+8$; lo que da substituyendo este valor de t en el anterior y demas:

$$s=2u+8+u=3u+8,$$
$$r=3u+8+2u+8=5u+16,$$
$$q=10u+32+3u+8=13u+40,$$
$$p=26u+80+5u+16=31u+96.$$

Y saldrá $N=13(31u+96)+7=403u+1248+7=403u+1255$; y ahora el menor valor que u pueda tener para satisfacer á la qüestion es -3 porque -4 ya da valores negativos, y así tendremos las soluciones siguientes $\left\{\begin{array}{llll}\text{Si } u=-3 & \text{si } u=-2 & \text{si } u=-1 & \text{si } u=0 \\ N=46, & N=449, & N=852, & N=1255.\end{array}\right.$

Y así sucesivamente dando valores á u tendremos un conjunto de términos que cumplirán con las condiciones del problema.

Esc. Antes de concluir este asunto haremos una prevencion muy necesaria, y es *que la equacion* $ax=bz+c$ *solo se puede resolver quando los dos números* a *y* b *no tienen mas divisor comun que* 1; *y en no concurriendo esta circunstancia, la qüestion será imposible á no ser que el divisor comun de* a *y* b *lo sea tambien de* c.

Si se supusiese, por exemplo, que $9x=15z+2$: como 3 divisor comun de 9 y 15 no lo es de 2, no se puede resolver la qüestion; porque como $9x-15z$ siempre es divisible por 3 nunca puede llegar á ser $=2$. Más si en el caso actual fuese $c=3$ ó $c=6$ &c. la qüestion sería posible; porque dividiendo por el factor comun 3 tendríamos $3x=5z+1$. Luego los números a y b no pueden tener mas comun divisor que la unidad, y en todos los demas casos no tendrá aplicacion la regla dada (321).

Esto se hará mas claro resolviendo la equacion $9x=15z+2$ por el método comun; pues sacaremos $x=\frac{15z+2}{9}=z+\frac{6z+2}{9}=z+u$ haciendo $\frac{6z+2}{9}=u$, de donde $9u=6z+2$ ó $6z=9u-2$, luego $z=\frac{9u-2}{6}=u+\frac{3u-2}{6}=u+r$ haciendo $\frac{3u-2}{6}=r$, lo que da $3u-2=6r$ ó $3u=6r+2$, por consiguiente $u=\frac{6r+2}{3}=2r+\frac{2}{3}$; donde se ve claramente que esta expresion jamas podrá ser un número entero, por ser indispensablemente r número entero.

Demostracion de algunas proposiciones acerca de las cantidades constantes y variables, y de los límites.

323 Hemos dicho (311) que *cantidad constante* es aquella que en una misma qüestion no puede tener mas de un solo valor; y que *cantidad variable* es la que en una misma qüestion puede tener todos los valores que se quieran; pues ahora vamos á demostrar algunas proposiciones que nos serán de la mayor utilidad en lo sucesivo.

Teorema 1.º *Si de dos cantidades* X, B, *una variable y la otra constante, la variable* X *al paso que crece se acerca á la constante* B, *la cantidad constante* B *será mayor que la variable* X.

Dem. Una cantidad con relacion á otra solo puede ser mayor, igual, ó menor que ella; luego quedará probado que es una de las tres cosas, demostrando que no puede ser ninguna de las otras dos; cuyo método de demostrar se llama (Introd.) *método de exhaucion*. Luego quedará demostrado que $B>X$, si hacemos ver que no puede ser igual ni menor. En efecto, B no puede ser igual con X, pues siendo $B=X$, si X crece se separa del valor de B; y si vuelve á crecer se volverá á separar mas, y á cada paso que vaya creciendo se irá separando mas del valor de B; que no cumple con la circunstancia que exîge lo enunciado en el teorema, que es el aproxîmarse mas á B al tiempo que crece X; luego paraque esta circunstancia se verifique, B no ha de ser igual con X. Tampoco puede ser menor, pues si $B<X$, al paso que X crezca se diferenciará mas de B; y por lo mismo no puede cumplir con la circunstancia de que X al crecer se acerque á B, siendo $B<X$; luego si dicha circunstancia no se puede verificar en ninguno de los casos de $B=X$, $B<X$, indispensablemente se verificará en el otro, á saber, quando $B>X$, que era *L. Q. D. D.*

324 Teorema 2.º *Si de dos cantidades* X, B, *una variable y la otra constante, la variable* X *al paso que mengua se acerca al valor de* B, *esta cantidad* B *será menor que la cantidad* X.

Dem. En efecto, sino es $B<X$ será igual ó mayor. Si es $B=X$ y X mengua, se diferenciará de B: y si vuelve á menguar se diferenciará mas, y al paso que vaya menguando se irá diferenciando mas de B; lo que no puede ser, pues la condicion exîge que se vaya aproxîmando. Tampoco puede ser $B>X$, pues al paso que X mengüe se irá diferenciando mas de B, que tampoco cumple con lo enunciado. Luego si B no puede ser igual ni mayor que X, será forzosamente menor. *L. Q. D. D.*

325 Teorema 3.º *Dadas dos cantidades desiguales, digo que si de la mayor se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un resultado que será menor que la otra cantidad por pequeña que sea.*

Expl. Sean B y K estas dos cantidades: digo que si de la mayor B se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré

á tener un residuo menor que la cantidad K por pequeña que esta sea.

Dem. Multiplíquese K por un número n tal que el producto $n\times K$ sea mayor que B, y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproxîmado al valor de B; en cuyo caso será $B<n\times K$. Ahora, estas cantidades que son desiguales tambien tendrán desiguales sus mitades; y por lo mismo si á cada una de ellas le quitamos su mitad, las otras mitades que queden serán desiguales, es decir que $\frac{B}{2}<\frac{n\times K}{2}$; pero si de $n\times K$ se quita solamente K (que será igual con la mitad de $n\times K$ solo quando $n=2$, y en todos los demas casos será menor que la mitad de $n.K$) con mayor razon quedarán desiguales; luego $\frac{B}{2}<n\times K-K=(n-1)K$. Si de estas cantidades que son desiguales quitamos la mitad, tambien quedarán desiguales; y si de la mayor quitamos menos de la mitad (como será quitar K en el caso de que ($n-1$) sea mayor que 2) con mas razon quedarán desiguales; y como prosiguiendo quitando á la menor la mitad, y á la mayor la cantidad K, (que solo será igual con la mitad, en el caso de que el múltiplo que reste de K sea el duplo y en todos los demas casos será menor), los resultados quedarán siempre desiguales: tendremos que al haber hecho un número de restas expresado por $n-1$ los resultados quedarán aun desiguales; pero si de $n\times K$ se quita ($n-1$) veces la K queda en $n\times K-(n-1)\times K=n\times K-n\times K+K=K$. Luego K será mayor que el residuo que quede de haber quitado á B la mitad, y al residuo la mitad, y así sucesivamente hasta las $n-1$ veces; luego por pequeña que sea la cantidad K, podemos hacer menor la cantidad B, quitándole su mitad, y á lo que quede su mitad y así sucesivamente.

Esc. En esta proposicion se supone que haya un número n que multiplicado por K haga que el producto $n\times K$ sea mayor que B. Para concebir un número de esta especie bastará notar que el caso menos favorable á la qüestion es quando B sea muy grande, y K muy pequeña; pero por pequeña que sea K la podremos concebir representada por un quebrado $\frac{1}{p}$, cuyo numerador sea la unidad, y el denominador p tan grande como se desee; en cuyo caso multiplicando p por $B+1$, tendremos el número n tal que $n\times K$ ó $n\times\frac{1}{p}>B$.

Cor. 1.° De aqui resulta que *si de dos cantidades desiguales, de la mayor se quita mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente, con mas razon podemos decir que lo que resulte será menor que una cantidad dada por pequeña que sea*; pues si esto se podia conseguir quitando solo la mitad, y luego la mitad, &c. con

mas razon se conseguirá quitando mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente.

Cor. 2.° Tambien resulta de esta proposicion que *podemos concebir á toda variable un valor menor que qualquiera otra cantidad dada por pequeña que sea.* Porque si suponemos que K sea dicha cantidad, por ser variable puede tener todos los valores que queramos; y como aqui la consideramos sola, esto es, sin que las variaciones estén sujetas á ninguna ley mas que á nuestro arbitrio, podremos hacer que á cada paso la variacion que le resulte sea el quitarle la mitad ó mas de la mitad, que es lo mismo que hacerla dos veces menor ó mas de dos veces menor; y de este modo, por el teorema antecedente, tendremos un resultado al cabo de cierto tiempo que será menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Cor. 3.° De aqui se deduce tambien que como un producto disminuye al paso que mengua uno qualquiera de sus factores, quando queramos hacerle menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, *no hay mas que hacer á uno de los factores dos veces ó mas de dos veces menor, y luego dos veces ó mas de dos veces menor*, &c. y como en este caso el producto á cada paso va siendo dos veces ó mas de dos veces menor, este producto (teor. ant.) podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada, por pequeña que sea. Y al contrario si vemos que uno de los factores de un producto va siendo á cada paso dos veces ó mas de dos veces menor, como en el mismo caso el producto irá siendo dos veces ó mas de dos veces menor, llegará (teor. ant.) á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

326 Teor. 4.° *Si dos cantidades invariables* A y B *son tales que su diferencia* A—B *sea menor que una tercera cantidad* K, *por pequeña que esta pueda ser, dichas cantidades son iguales entre sí.*

Dem. En efecto, si fuesen desiguales se tendria necesariamente que $A-B=d$, señalando d su diferencia; luego no seria posible que K tubiese un valor menor que d, y por consiguiente tan pequeño como se quisiese; y como por el supuesto K puede ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue que no puede haber la diferencia d entre dichas cantidades; luego serán iguales. L. Q. D. D.

Esc. Aqui decimos que las cantidades son invariables, porque se puede encontrar una expresion de $\sqrt{3}$, tal que se diferencie de la verdadera una cantidad menor que qualquier cantidad dada, sin que llegue jamas al valor exàcto de $\sqrt{3}$; pero estos resultados mudan á cada nueva aproxìmacion, mientras que las cantidades A y B no son susceptibles la una ni la otra sino de una sola determinacion.

327 Teor. 5.° *Si tres cantidades* X, A, B *son tales que la primera* X, *que se supone variable (pero siempre mayor ó menor que las otras dos* A, B *que son constantes) se pueda aproxìmar á ambas al mismo tiempo tanto como se quiera, dichas dos cantidades* A *y* B *serán iguales.*

Dem. Sino es $A=B$ será porque la una tal como A lleve á la otra una cantidad qualquiera K, lo que dará $A=B+K$; y entonces acercándose X á A tanto como se quiera, no se podrá acercar á B al mismo tiempo tanto como se desee por impedirlo la cantidad K; y como por el supuesto se puede X acercar á ambas á un mismo tiempo tanto como se desee, se sigue que no puede haber ninguna diferencia entre A y B, luego serán iguales. L.Q.D.D.

328 Teor. 6.º *Si dos cantidades variables* X, Z *se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes* A y B, *y ademas la relacion* $\frac{X}{Z}$ *de las dos primeras es constante, digo que la relacion* $\frac{A}{B}$ *que tienen las dos constantes es la misma que la* $\frac{X}{Z}$ *de las variables.*

Dem. Por poderse acercar X á A tanto como se quiera y Z á B, tenemos que las relaciones $\frac{X}{A}$, $\frac{Z}{B}$ se podrán diferenciar de la unidad tan poco como se desee; y por lo mismo estas relaciones si tienen alguna diferencia no se podrá expresar por ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea. En efecto, si supusiésemos que su diferencia se podia señalar por la cantidad d, vendríamos á tener, por exemplo, $\frac{X}{A}-\frac{Z}{B}=d$, ó $\frac{X}{A}=\frac{Z}{B}+d$; pero en este caso, pudiéndose acercar $\frac{Z}{B}$ á la unidad tanto como se quiera, no lo podria hacer la cantidad $\frac{X}{A}$ por impedirlo la cantidad d, contra lo dicho antes; luego la diferencia entre $\frac{X}{A}$ y $\frac{Z}{B}$ si es que la tienen, no se puede expresar. Ahora, por ser constante la relacion $\frac{X}{Z}$ llamándola C tendremos $\frac{X}{Z}=C$, de donde $X=C\times Z$. Substituyendo en vez de X este valor en $\frac{X}{A}$ tendremos las relaciones $\frac{Z\times C}{A}$ y $\frac{Z}{B}$, que sino se puede expresar su diferencia por ninguna cantidad dada, tampoco se podrá expresar la de las cantidades $\frac{C}{A}$ y $\frac{1}{B}$ que es la que debia constituir dicha diferencia, por ser comun la cantidad Z; y como estas dos cantidades $\frac{C}{A}$ y $\frac{1}{B}$ son constantes, inferimos por el teorema 4.º que $\frac{C}{A}=\frac{1}{B}$, ó multiplicando por A será

$C = \frac{A}{B}$; pero C es igual con $\frac{X}{Z}$, luego $\frac{X}{Z} = \frac{A}{B}$; luego *si dos cantidades*, &c.

Quando una cantidad variable se puede acercar á otra constante tanto como se quiera, de manera que la diferencia entre ellas pueda llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, pero sin que jamas puedan llegar á ser iguales, se llama á la constante *límite* de la variable.

En la idea de límite estan comprendidas esencialmente dos: la 1.ª que la cantidad se pueda acercar al límite tanto como se quiera, y la 2.ª que jamas pueda llegar á serle igual.

Por esta causa resulta que A y B en el teor. 5.º son el límite de X, y quiere decir en general que *si dos cantidades son el límite de una tercera son iguales entre sí.* Tambien en el teor. 6.º resulta que A es el límite de X, y B el de Z; y dicho teorema quiere decir que *si dos cantidades variables al paso que se acercan á sus límites conservan siempre una relacion constante, la relacion de los límites es la misma que la de las variables.*

Á toda cantidad variable la podemos concebir dos límites: uno verdadero, real y efectivo que es el o; y el otro que no es mas que un límite considerado, y se le representa por $\frac{1}{0}$.

En efecto, si suponemos que X sea dicha variable, y que á cada variacion se vaya convirtiendo en ser la mitad ó menos que la mitad, al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; y por lo mismo la diferencia entre x y o podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada. Por otra parte x jamas llegará á ser o mientras permanezca cantidad, luego el o tiene las dos circunstancias esenciales al límite; y por lo mismo es el límite de las cantidades que decrecen.

Ahora, si concebimos que en la expresion $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$, la x vaya disminuyendo, la expresion $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$ irá aumentando; y como x puede disminuir tanto como se desee, resulta que $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$ podrá aumentar tanto como se quiera; pero x al disminuir se va acercando continuamente á su límite o, luego la expresion $\frac{a}{x}$ se irá acercando continuamente á $\frac{a}{0}$ ó $\frac{1}{0}$, y será por consiguiente una especie de límite de las cantidades que crecen (*).

(*) *Hemos dicho que $\frac{1}{0}$ es una especie de límite, porque no contiene el segundo carácter esencial de esta idea, á saber, que la diferencia*

329 A toda expresion cuyo denominador es o se le suele dar el nombre de *infinito*, que se señala con este signo ∞; de manera que $\frac{1}{0}$ y ∞ representan una misma cosa. Se le da el nombre de infinito porque las cantidades que toman esta forma pueden llegar á ser mayores que qualquiera otra dada.

Para convencernos de esto, observaremos que si en vez de o ponemos una expresion qualquiera que le sea igual tal como $1-1$, y hacemos la division de 1 por $1-1$, tendremos $\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+\&c.$ que quiere decir que para obtener el valor de esta expresion se ha de añadir sucesivamente la unidad á ella misma, continuamente ó sin fin; con lo qual llegará á ser mayor que qualquier cantidad dada por grande que sea.

Puesto que $\frac{1}{0}$ ó $\frac{a}{0}=\infty$, si quitamos el divisor será $a=0\times\infty$ ó $1=0\times\infty$, y dividiendo por ∞, será $\frac{a}{\infty}$ ó $\frac{1}{\infty}=0$; lo que suministra otro medio de representar el cero, límite de las cantidades que decrecen.

330 Si una cantidad variable X tiene dos valores diferentes A y B, podremos suponer que para pasar de A á B ha de haber tenido todos los valores que estan comprendidos entre A y B; esto quiere decir que qualquiera que sea la cantidad C (cuyo valor sea $>A$ y $<B$) podremos suponer que esta cantidad C ha resultado de una variacion de X. En efecto, si llamamos D á la diferencia entre A y B, tendremos que $B-A=D$; y hallando tambien la diferencia entre A y C, tendremos, llamándola d, $C-A=d$.

Ahora, suponiendo que la variacion primitiva que le resulte á X sea el convertirse en $A+\frac{1d}{D}$, la segunda el convertirse en $A+\frac{2d}{D}$, la tercera en $A+\frac{3d}{D}$, &c. á la variacion expresada por D, se habrá convertido en $A+D\times\frac{d}{D}=A+d=C$; luego toda cantidad cuyo valor se halle entre los valores A y B de X se podrá considerar originada de un valor de la variable X. De aqui se deduce que si *la una de estas cantidades fuese positiva y la otra negativa*, *podíamos inferir que habia un*

---

entre la cantidad y $\frac{1}{0}$ *pueda ser menor que qualquier cantidad dada; en efecto, no se puede suponer que siendo Z una variable que va creciendo, le falta la cantidad* K *para llegar á ser* $\frac{1}{0}$; *porque entonces añadiendo á Z la* K *deberia ser igual con* $\frac{1}{0}$ *y por consiguiente* $\frac{1}{0}$ *no podria ser mayor que* Z+K *contra el supuesto: porque nosotros podemos concebir que á una cantidad qualquiera, por grande que sea, se le añade una unidad 2 unidades,* 1000 *unidades, &c. y siempre resultará una mayor.*

valor de la variable que seria cero; pues cero se halla entre las cantidades positivas y negativas.

Ahora, si en la expresion se hallare la variable enlazada con constantes, no siempre podríamos decir que tendria un valor o; pues si se hallase la variable en el denominador, quando esta hiciese que el denominador se acercase á cero, la expresion se acercaria á $\frac{1}{0}$; y quando hiciese que el denominador mudase de signo, tambien mudaria de signo la expresion; en cuyo caso no podríamos afirmar que la expresion habia tenído un valor cero, porque habria pasado por $\frac{1}{0}$; de donde se deduce que pues una expresion no puede variar de signo si el numerador ó el denominador no le muda, y quando el numerador le muda pasa por o, y quando su denominador le muda pasa por $\frac{1}{0}$ ó ∞, podremos establecer que *quando una cantidad pasa de positiva á negativa, ha de haber un valor intermedio en el qual ha de ser* o *ó* $\frac{1}{0}=\infty$ (*).

(*) *He hecho las mayores diligencias para ver esta proposicion bien demostrada: lo mas que he encontrado es que algunos autores, viéndola verificada en algunos casos particulares, la han establecido como verdadera. Todo lo que he dicho acerca de este punto es fruto de mis investigaciones, lo que advierto paraque se reflexîone bien, y se vea si se halla otra demostracion aun mas directa. Aun me parece que se puede establecer que así como* o *es* $<+1$ y >-1, *así tambien* $\frac{1}{0}$ *ó* ∞ *es* $>+1$ y <-1. *La análisis que me ha conducido á esta conclusion es la siguiente: puesto que* $0>-1$, *si una misma cantidad tal como* 1 *la dividimos por* o y *por* -1, *tendremos que el primer resultado será menor que el segundo; luego será* $\frac{1}{0}<-\frac{1}{1}=-1$, *luego* $\frac{1}{0}$ *es menor que* -1, *ó que qualquier cantidad negativa; pero como* $\frac{1}{0}$ *es mayor que qualquier cantidad positiva, resulta que estando el valor de* $\frac{1}{0}$ *entre los valores negativos y positivos, podremos hacer que al pasar una cantidad de positiva á negativa, pase por uno de estos dos grados ó por* o *ó por* $\frac{1}{0}$.

Esto tambien va conforme con este otro principio: sea $\frac{a}{a-x}$ *y supongamos que siendo* $x<a$ *vaya creciendo* x; *en este caso* $a-x$ *disminuirá y por lo mismo* $\frac{a}{a-x}$ *aumentará siempre que crezca* x; *luego si suponemos á* x *un valor qualquiera tal como* a, *para todos los valores de* x *mayores que* a, *la expresion dará un valor mayor que* $\frac{a}{a-a}$; *y para todos los valores menores le dará menor; pero quando* $x=a$, *la expresion* $\frac{a}{a-x}$ *se convierte en* $\frac{a}{a-a}=\frac{a}{0}=\infty$, *y quando* $x>a$ *se convierte en*

La expresion $a=0\times\infty$ nos da á conocer que una cantidad qualquiera la podemos suponer representada por cero multiplicado por el infinito; ahora, si en vez de ∞ ponemos su valor $\frac{a}{0}$ ó $\frac{1}{0}$, será $a=0\times\frac{a}{0}=\frac{a\times 0}{0}=\frac{0}{0}$; y si en vez de 0 substituimos en la misma expresion su igual $\frac{1}{\infty}$, tendremos que $a=0\times\infty=\frac{1}{\infty}\times\infty=\frac{\infty}{\infty}$; donde se ve que tambien es símbolo de una cantidad qualquiera la expresion $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

331 Todos estos símbolos nos sirven para indicarnos quando las circunstancias con que tratamos de determinar una cantidad, son insuficientes para este objeto, por convenir á qualquier cantidad en general.

Propongámonos, por exemplo, resolver esta qüestion: *Hallar un número tal que si á su quádruplo se le añaden 7 unidades, resulte el quociente de dividir 15 por 3, junto con la suma de dos veces la tercera parte del séxtuplo de dicho número con 2.*

Si llamamos x á dicho número, tendremos planteada la qüestion en la siguiente equacion $4x+7=\frac{15}{3}+2\times\frac{1}{3}\times 6x+2$;
y practicando las reglas establecidas (223) tendré:
1.º $4x-2\times\frac{1}{3}\times 6x=\frac{15}{3}+2-7$, ó $x(4-2\times\frac{1}{3}\times 6)=\frac{15}{3}+2-7$
que da $x=\dfrac{\frac{15}{3}+2-7}{4-2\times\frac{1}{3}\times 6}$,
que despues de executadas las operaciones indicadas, será
$x=\dfrac{5+2-7}{4-\frac{12}{3}}=\dfrac{7-7}{4-4}=\frac{0}{0}$, por lo que inferimos que la cantidad x puede tener un valor qualquiera; sin embargo hasta aqui causará alguna admiracion el que una equacion no nos sirva para determinar una incógnita; pero si executamos las operaciones indicadas en el segundo miembro de la equacion primitiva, tendremos:

$$4x+7=\tfrac{15}{3}+2\times\tfrac{1}{3}\times 6x+2=5+2\times\tfrac{6}{3}x+2=2\times 2x+7=4x+7,$$

equacion que no expresa ninguna circunstancia para poder determinar la x, pues la sola circunstancia es que *el quádruplo de dicho número mas siete sea igual con el mismo quádruplo mas siete*; y como qualquier cantidad es igual con ella misma, resulta que toda equacion en que los dos miembros esten representados por una misma cantidad, no pueden

---

una expresion negativa; luégo $\frac{a}{0}$ *ó* ∞ *es menor que qualquier cantidad negativa.*

servir para determinarla; y por lo mismo el cálculo nos debe indicar en el último resultado que qualquier cantidad cumple con la circunstancia exîgida.

A esta clase de equaciones se les da el nombre de *equaciones idénticas*, y solo sirven para dar á conocer que se verifica una verdad; pero de ningun modo para determinar una cantidad. Así $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ es una equacion idéntica, y solo sirve para dar á conocer que siempre se verifica que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia da la diferencia entre los quadrados de dichas cantidades; y como esta es una propiedad general de todas las cantidades, la equacion en que esté cifrada de ninguna manera nos ha de poder determinar dichas cantidades.

De muy distinta naturaleza es qualquiera de estas equaciones

$$(a+x)(a-x)=a^2, (a+x)(a-x)=x^2, (a+x)(a-x)=b^2 \&c.$$

pues qualquiera de ellas nos daria un valor particular para x.

Sin embargo de todo lo expuesto, es necesario convenir en que no toda expresion que se reduce á $\frac{0}{0}$ expresa una cantidad qualquiera; pues en muchos casos esto proviene de que en su numerador y denominador se halla un factor comun, que reduciéndose á cero haga tomar á la expresion la forma de $\frac{0}{0}$. Así, esta por exemplo, $\frac{a^2-x^2}{ba-bx}$ se reduce á $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, porque entonces se convierte en $\frac{a^2-a^2}{ba-ba}=\frac{0}{0}$; y no obstante tiene un valor particular en este supuesto, á saber, $\frac{2a}{b}$; porque si descomponemos arriba y abaxo en factores se tendrá $\frac{(a+x)(a-x)}{b(a-x)}$, que suprimiendo arriba y abaxo $a-x$ se tendrá $\frac{a+x}{b}$, que en el supuesto de $x=a$ será $\frac{2a}{b}$. De este punto volveremos á tratar mas adelante.

DIGRESION

En que se demuestran con toda generalidad algunas proposiciones anteriores, y de que se hace uso en los libros sin demostracion.

332. Puesto que ya hemos dado á conocer la exîstencia de las cantidades incomensurables ó irracionales, vamos á manifestar que aun quando los factores sean irracionales no altera el producto su diferente colocacion, como lo prometîmos (180).

Supongamos que las dos cantidades sean A y B, de las quales la una sea irracional; si sacamos el valor aproxîmado de B por decimales, llamamos b al número n de guarismos decimales, y 6 á la suma de todos los que faltan, será $B=b+6$, y si llamamos b' á la parte b junta

con una unidad decimal que ocupe el lugar n, tendremos $b'>B>b$; y llamando $6'$ á lo que b' lleva B será $b'=B+6'$ (p).

Ahora, b' se diferenciaba de b en una unidad decimal del órden n: y como B ha de estar entre el valor de b' y de b, resultará que la diferencia entre b' y B ó entre B y b será menor que una unidad decimal del órden n; y como si suponemos que n se convierta en $n+1$, la unidad que ocupe el lugar $n+1$ será diez veces menor que la del órden n, resulta que la diferencia entre b' y b se habrá hecho con esto diez veces menor; y por lo mismo la diferencia entre b' y B ó entre B y b se habrá hecho mas de diez veces menor. Ahora, si concebimos que $n+1$ se convierte en $n+2$, la diferencia entre b' y b se habrá hecho otras diez veces menor, y la de entre b' y B ó entre B y b mas de diez veces menor; luego con suponer que la n vaya aumentando una unidad, ó que el valor de b sea el de un guarismo decimal mas, vamos haciendo que la diferencia entre b' y b vaya siendo diez veces menor, y la de entre b' y B ó entre B y b mas de diez veces menor; y como en qualquiera de estos casos (325) la diferencia podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, resulta que la diferencia $6'$ podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Ahora, multiplicando por A los dos miembros de la equacion (p) tendremos $b'A=B\times A+6'A$, por lo que $b'A>B\times A$; pero (325 cor. 3.º) el producto $6'A$ podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, y como este es el exceso que $b'A$ llevará á $B\times A$ tendremos que la diferencia entre $b'A$ y $A\times B$ podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada. Puesto que b' es una fraccion será lo mismo $b'A$ (§ 180) que $A\times b'$, luego tendremos que $A\times b'>B\times A$, pero su diferencia podrá ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Ahora, $b'\times A$ se puede acercar tanto como se quiera á $B\times A$, y por la misma razon $A\times b'$ se podrá acercar á $A\times B$ tanto como se quiera; pero al acercarse $b\times A$ á $B\times A$ y $A\times b'$ á $A\times B$ conservan siempre una misma relacion, á saber, la de igualdad, luego (328, teor. 6.º) tendremos que esta misma relacion será la de las constantes; luego tambien resultará $\frac{A\times B}{B\times A}=1$, ó $A\times B=B\times A$.

Supóngamos ahora que ambos factores A y B sean irracionales, y tendremos que sino son iguales los productos $A\times B$ y $B\times A$, el uno llevará al otro una diferencia D, y resultará, por exemplo, $AB-BA=D$.

Si suponemos $B=b+6$ como antes, y substituimos este valor será $A(b+6)-(b+6)A=D$, ó $Ab+A6-bA-6A=D$; que como en virtud de lo expuesto (§180) $A\times b=b\times A$, quedará $A6-6A=D$ (q). Esta diferencia siendo independiente del número de guarismos que tiene n, resulta que será la misma aunque 6 fuese no solo lo que sigue despues

del guarismo decimal n, sino lo que sigue despues del guarismo decimal $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, &c. pero en este caso β irá siendo menor; si llamamos δ al número que expresa las veces que β se hace menor al considerar que es el valor de las figuras que siguen á $n+1$, tendremos $\frac{A\beta}{\delta}-\frac{\beta A}{\delta}=D$, ó substituyendo por D su valor (q) $\frac{A\beta}{\delta}-\frac{\beta A}{\delta}=A\beta-\beta A$ que da $A\beta-\frac{A\beta}{\delta}=\beta A-\frac{\beta A}{\delta}$ ó quitando los divisores $A\beta\delta-A\beta=$...... $\beta A\delta-\beta A$ ó $A\beta\times(\delta-1)=\beta A\times(\delta-1)$ que suprimiendo el factor $\delta-1$ queda $A\beta=\beta A$, y por mismo $A\beta-\beta A=0$; pero $A\beta-\beta A=D$, luego $D=0$, y por lo mismo $A\times B-B\times A=0$, ó $AB=BA$.

333 Tambien hemos visto que la multiplicacion de las cantidades que tenian exponentes se hacia sumando los exponentes, y que esta demostracion es verdadera quando el exponente es entero, y quando es quebrado; ahora vamos á demostrar que tambien lo es quando los exponentes son irracionales ó incomensurables.

Supongamos que se quiera multiplicar a^x por a^z, vamos á demostrar que el producto es a^{x+z}, ya se suponga que x ó z ó ambas sean irracionales.

Supongamos primero que x sea comensurable, y que no lo sea z. Si á z la expresamos en fraccion decimal y llamamos z' á los n guarismos primeros decimales, será $z'<z$; pero si á z' se le añade una unidad en el guarismo que expresa el lugar n se tendrá otra nueva fraccion z'' que será $>z$, y siendo z' y z'' fracciones se tendrá demostrado (205) que $a^xa^{z'}=a^{x+z'}$ y que $a^xa^{z''}=a^{x+z''}$; pero el producto a^xa^z debe estar entre $a^xa^{z'}$ y $a^xa^{z''}$, ó entre $a^{x+z'}$ y $a^{x+z''}$, luego si la cantidad a^{x+z} fuese mayor ó menor que a^xa^z será necesario para igualarla, disminuir ó aumentar su exponente $x+z$ en una cierta cantidad u, lo que daria $a^{x+z+u}=a^xa^z$, ó $a^{x+z-u}=a^xa^z$.

Ahora debemos distinguir los dos casos de quando $a>1$ y $a<1$; en el primero las cantidades a^xa^z crecen con su exponente, y en el segundo decrecen quando su exponente aumenta, de donde se sigue que en el primer caso $a^xa^{z''}$ ó $a^{x+z''}$ excede á a^xa^z. Sin embargo el exceso de z'' sobre z pudiéndose hacer menor que qualquier cantidad dada por consideraciones idénticas á las (332), resulta que se podrá hacer menor que u; por consiguiente se podrá hacer $a^{x+z''}<a^{x+z+u}$, de manera que si se supusiese que $a^{x+z+u}=a^xa^z$ se tendria al mismo tiempo $a^{x+z+u}=a^xa^z$, $a^{x+z''}<a^{x+z+u}$, y $a^{x+z''}>a^xa^z=a^{x+z+u}$; pero esto es un absurdo, porque la cantidad $a^{x+z''}$ no puede ser al mismo tiempo menor y mayor que una misma cantidad a^{x+z+u}, luego el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo será.

Al contrario si se supusiese que $a^{x+z-u}=a^xa^z$, resultaria que siendo $z'<z$ se tendrá $a^xa^{z'}$ ó $a^{x+z'}<a^xa^z$; y que la diferencia entre z' y z

pudiendo ser menor que qualquiera cantidad dada u, podríamos hacer que $a^{x+z'}>a^{x+z-u}$; de manera que se tendria á un mismo tiempo $a^{x+z-u}=a^x a^z$, $a^{x+z'}<a^x a^z=a^{x+z-u}$, y $a^{x+z'}>a^{x+z-u}$; lo qual tambien es un absurdo, luego en este caso se verifica que $a^x a^z=a^{x+z}$, pues de suponer lo contrario caemos en un absurdo.

Ahora, quando $a<1$, se hace $a^x a^{z''}$ ó $a^{x+z''}$ mas pequeña que $a^x a^z$, y el exceso de z'' sobre z pudiéndose hacer menor que qualquier cantidad dada podremos hacer que $a^{x+z''}>a^{x+z+u}$, de manera que si se supusiese que $a^{x+z+u}=a^x a^z$ se tendria á un mismo tiempo $a^{x+z+u}=a^x a^z$, $a^{x+z''}>a^{x+z+u}$, $a^{x+z''}<a^x a^z=a^{x+z+u}$, lo que tambien es absurdo.

Al contrario, si se sostubiese que $a^{x+z-u}=a^x a^z$, se convendria igualmente en que $a^x a^{z'}$ ó $a^{x+z'}$, excederia á $a^x a^z$, y que la diferencia entre z' y z pudiendo llegar á ser menor que qualquier cantidad dada, se podrá hacer que $a^{x+z'}<a^{x+z-u}$, y que así tendríamos á un tiempo $a^{x+z'}<a^{x+z-u}=a^x a^{z'}$, $a^{x+z'}>a^x a^z$, lo qual tambien es un absurdo; pues deberíamos tener á un mismo tiempo $a^x a^z>a^{x+z'}$ y $<a^{x+z'}$; luego en ambos casos se verifica que $a^x a^z=a^{x+z}$.

Ahora, solo nos falta probar que la proposicion tambien es verdadera quando x es tambien irracional. Para esto observaremos que si en vez de z substituimos z', z'', esto es, los mismos valores de que acabamos de hacer uso, no habrá desde luego ninguna duda acerca de las dos equaciones $a^x a^{z'}=a^{x+z'}$, $a^x a^{z''}=a^{x+z''}$, porque ya estamos seguros de que la multiplicacion de las cantidades exponenciales de la misma base se hace por la suma de sus exponentes, quando uno solo de los exponentes es irracional; ahora, el producto $a^x a^z$ es medio entre los productos $a^x a^{z'}$ y $a^x a^{z''}$ ó entre los productos $a^{x+z'}$ y $a^{x+z''}$, y por consiguiente nos hallamos en el mismo caso que antes para demostrar que hay absurdo en suponer que $a^x a^z$ no sea igual á a^{x+z}; luego se puede considerar como cierto el que la multiplicacion de una misma cantidad con diferentes exponentes se hace por la suma de estos, tanto siendo racionales, como en el caso de no serlo.

334 Puesto que la multiplicacion de las potencias de una misma cantidad se hace por la suma de sus exponentes, qualquiera que sea la naturaleza de estos, se sigue que la division de las potencias de una misma cantidad, qualquiera que sea la naturaleza de sus exponentes, debe hacerse por la substraccion de ellos.

Para demostrarlo, supongamos que $\frac{a^x}{a^z}=a^u$, señalando con u una cantidad qualquiera; ahora, como el divisor por el quociente ha de dar el dividendo tendremos $a^x=a^z \times a^u=a^{z+u}$, para lo qual es indispensable que $z+u=x$; lo que da $u=x-z$ y por consiguiente $\frac{a^x}{a^z}=a^u=a^{x-z}$.

335 La elevacion á potencias de estas cantidades se debe hacer en todos los casos, multiplicando el exponente de la cantidad por el de la potencia á que se debe elevar; principiaremos por el caso en que la potencia ha de ser entera, y tendremos que siendo x racional ó irracional, será $(a^x)^2 = a^x \times a^x = a^{x+x} = a^{2x}$, $(a^x)^3 = a^x \times a^x \times a^x = a^{x+x+x} = a^{3x}$, y en general quando n es un número entero $(a^x)^n = a^x \times a^x \times a^x \times a^x \ldots\ldots = a^{x+x+x+x\cdots} = a^{nx}$.

De aqui se deduce la regla inversa, á saber, que la raiz quadrada de a^x es $a^{\frac{x}{2}}$, la cúbica $a^{\frac{x}{3}}$, y en general su raiz de grado n será $a^{\frac{x}{n}}$; para hallar esta regla analíticamente supondríamos que siendo n un número entero $\sqrt[n]{a^x} = a^u$, siendo u una cantidad indeterminada; elevando á la potencia n será $a^x = a^{n \cdot u}$, y como paraque se verifique esta equacion ha de tener la a en ambos miembros un mismo exponente, será $x = nu$, lo que da $u = \frac{x}{n}$, y por lo mismo $\sqrt[n]{a^x} = a^u = a^{\frac{x}{n}}$

Pero si por una parte la elevacion á una potencia entera de una cantidad exponencial qualquiera se hace multiplicando el exponente de esta cantidad por el de la potencia á que se quiere elevar, y si por otra la extraccion de una raiz entera de una cantidad exponencial a^x se hace dividiendo el exponente de esta cantidad por el exponente de la raiz que se quiere extraer; se sigue que a^x elevado á una potencia de exponente fraccionario qualquiera $\frac{p}{q}$ será $a^{\frac{p}{q}x}$, y por tanto que la elevacion de las cantidades exponenciales á potencias fraccionarias se hace multiplicando el exponente de estas cantidades por el de la potencia á que se las quiere elevar.

Ahora, para demostrar que la elevacion de una cantidad exponencial qualquiera a^x a una potencia de exponente irracional z, se debe hacer dando á a por exponente xz, haremos estas dos observaciones: 1.ª que substituyendo por z los valores fraccionarios z'. z'' (§ 333), a^x elevado á z' será $= a^{xz'}$ y a^x elevado á z'' será igual $a^{xz''}$. La 2.ª que a^x elevado á z será mayor que $a^{xz'}$ y menor que $a^{xz''}$ quando $a > 1$, pero que será menor que $a^{xz'}$ y mayor que $a^{xz''}$ quando $a < 1$.

Esto supuesto, sea primero $a > 1$, y si a^{xz} no fuese igual á la potencia z de a^x, será mayor ó menor que esta potencia, es decir, que en el primer caso seria $a^{x(z-u)}$ y en el segundo $a^{x(z+u)}$ lo que fuese igual á la potencia z de a^x; pero la diferencia entre z y z' por una parte, y la de z' y z'' por otra, se puede hacer menor que u; luego si se pretendiese que $a^{x(z-u)}$ fuese igual con $(a^x)^z$ se convendria al mismo tiempo en que $a^{xz'} > a^{x(z-u)} = a^{xz}$, y en que $a^{xz'} < (a^x)^z$, por la segunda observacion anterior; lo qual es un absurdo porque $a^{xz'}$ no puede ser á

un mismo tiempo mayor y menor que $(a^x)^z$. Si se quisiese que $a^{x(z+u)}$ fuese igual con $(a^x)^z$, como nos veríamos precisados á convenir al mismo tiempo en que $a^{xz''} < a^{x(z+u)} = (a^x)^z$, y en que $a^{xz''} > (a^x)^z$, por dicha observacion, caeríamos aun en absurdo; y como en el caso de $a < 1$ tambien se verifica un absurdo semejante de suponer que la potencia z de a^x es mayor ó menor que a^{xz}, se sigue que la elevacion á potencias de las cantidades exponenciales se debe hacer multiplicando su exponente por el de la potencia á que es necesario elevarla, y esto qualquiera que sea la naturaleza del exponente.

Esta conclusion conduce á esta otra, á saber, que la extraccion de una raiz qualquiera de una cantidad exponencial se debe hacer dividiendo el exponente de esta cantidad por el exponente de la raiz que se quiere extraer; y así la raiz z de a^x es $a^{\frac{x}{z}}$ porque elevando $a^{\frac{x}{z}}$ á la potencia z se obtiene $a^{\frac{xz}{z}} = a^x$; por lo que las proposiciones sentadas por verdaderas en la multiplicacion algebráica lo son efectivamente en todos los casos, y no puede quedar ninguna duda acerca de su certidumbre.

Terminemos estas investigaciones demostrando directamente la regla dada (213) para descomponer en factores imaginarios.

Sea, por exemplo, la expresion a^2+b^2, y cuyos factores supondremos que sean $a+\alpha b$ y $a+\beta b$; por lo qual será

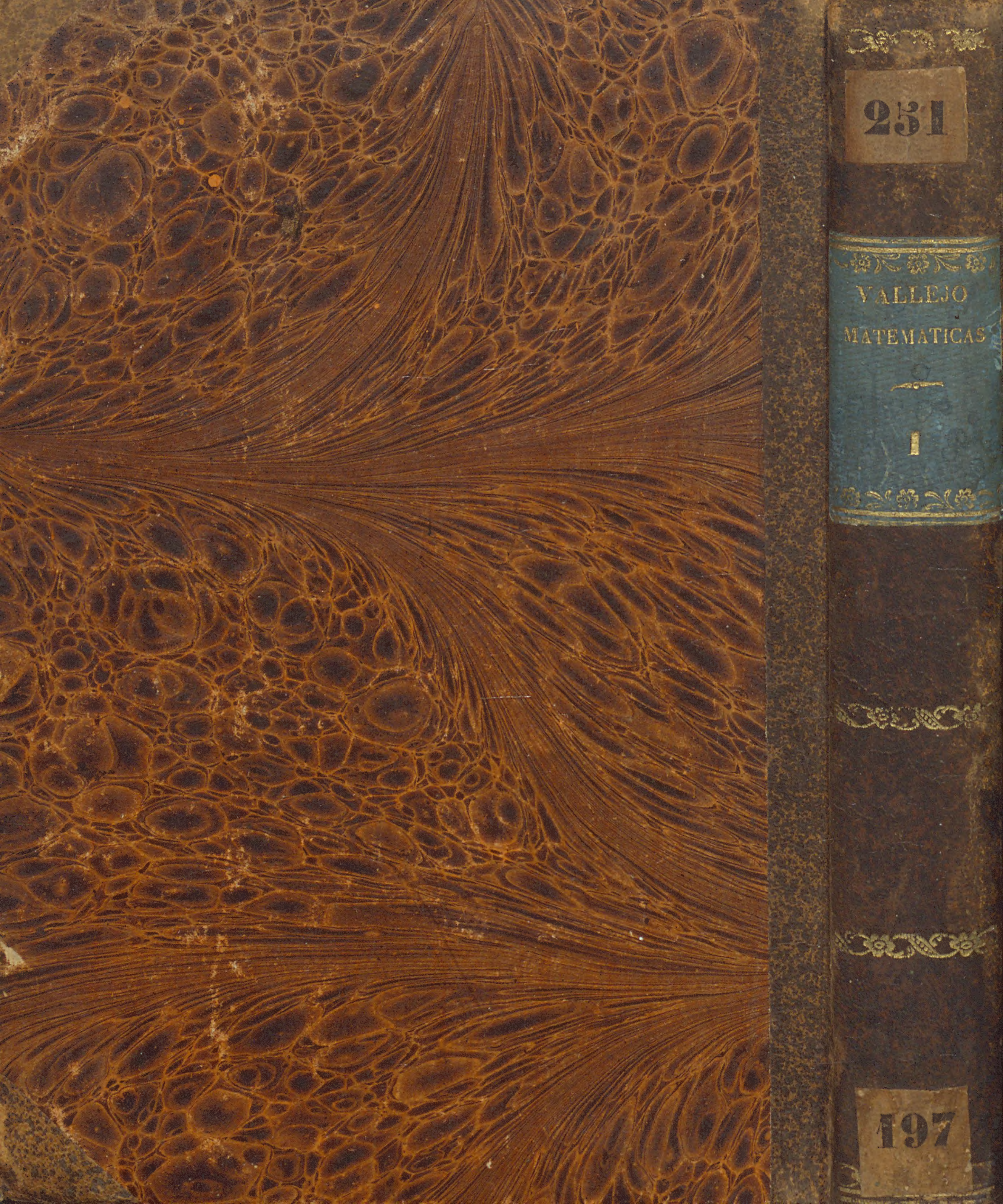
$$a^2+b^2=(a+\alpha b)(a+\beta b)=a^2+a\alpha b+a\beta b+\alpha\beta b^2;$$

y como estos dos miembros han de ser iguales, se tendrá que para cumplir con esta circunstancia deberá ser $a\alpha b+a\beta b=0$ y $\alpha\beta=1$; la primera da, suprimiendo el factor comun ab, $\alpha+\beta=0$ ó $\alpha=-\beta$, cuyo valor substituido en la segunda da $-\beta^2=1$, de donde $\beta^2=-1$ y $\beta=\pm\sqrt{-1}$, de donde sale por último $\alpha=-\beta=\mp\sqrt{-1}$; luego los dos factores tendrán esta forma: $a\mp b\sqrt{-1}$ y $a\pm b\sqrt{-1}$, que suministran la regla que alli deduximos por observacion.

Fin de la parte primera.






251
VALLEJO
MATEMATICAS
1
197


colorchecker CLASSIC
calibrite
mm